12

Relativistik (Bezugssysteme mit hoher Relativgeschwindigkeit)

12.1 Vorbemerkungen: der Konflikt

Das vorige Kapitel beschäftigte sich im 2. Abschnitt mit Bezugssystemen, die sich mit einer gewissen konstanten Geschwindigkeit *u* relativ zueinander bewegen. Dabei wurde angenommen, daß diese Relativgeschwindigkeit wie auch die Geschwindigkeit der Körper in diesen Inertialsystemen klein seien gegen die Lichtgeschwindigkeit *c*. Unter dieser Annahme wurden die sogenannten Galilei-Transformationen formuliert, die den Übergang von einem dieser Bezugssysteme in ein anderes vermitteln.
Es wurde festgestellt:

> *Die Gesetze der klassischen Physik sind galilei-invariant. Alle uns geläufigen physikalischen Vorgänge und Prozesse laufen in allen Inertialsystemen in gleicher Weise ab. Konstante Translationsgeschwindigkeiten der Bezugssysteme machen sich bei diesen Vorgängen nicht bemerkbar; Absolutgeschwindigkeiten sind nicht feststellbar.*

Nichts wies anscheinend daraufhin, daß für die Translationsgeschwindigkeiten der Körper eine obere Grenze existieren könnte. Es gibt aber Experimente, die klar zeigen, daß eine solche Grenze vorhanden ist, nämlich die Lichtgeschwindigkeit. Licht – oder allgemein eine elektromagnetische Welle – zeigt ein besonderes Verhalten, auf das die Formulierung der physikalischen Gesetze abgestimmt werden muß.
Die Geschwindigkeit eines Schiffes gibt man an relativ zum Wasser, auf dem es schwimmt. Fährt es stromab, dann addiert sich für den Beobachter am Ufer die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers zu dieser Eigengeschwindigkeit, fährt das Schiff stromaufwärts, dann subtrahiert sie sich von ihr. Dasselbe gilt für eine Welle, z. B. eine Schallwelle in Luft. Die Schallgeschwindigkeit wird relativ zur Luft angegeben. Je nach Windrichtung addiert oder subtrahiert sich von ihr die Windgeschwindigkeit – für den Beobachter auf dem festen Boden. Oder denken Sie an eine Wasserwelle: Auch hier addieren sich die Wellengeschwindigkeit und die Strömungsgeschwindigkeit vektoriell.

Nun eine Lichtwelle! Sie existiert als elektromagnetisches Feld auch im Vakuum (mit solchen Feldvorstellungen haben wir heute keine Schwierigkeiten mehr). Licht kann sich im Vakuum ausbreiten. Relativ wozu soll man jetzt die Lichtgeschwindigkeit angeben? Stellen Sie sich nur einmal vor, man nähme dem Schiff das Wasser weg... oder der Wasserwelle die Wasseroberfläche... oder dem Schall die Luft. Schall und Wasserwelle hören auf zu existieren, und das Schiff wäre ein ruhender Klotz in der Landschaft. Damit kann man sich ungefähr ausmalen, wie verzweifelt nach einem Medium gesucht wurde, relativ zu dem man die Geschwindigkeit des Lichts angeben könnte. Die Suche nach diesem sogenannten „Äther", den man sich als Träger für die Lichtwelle dachte, blieb erfolglos.

Man könnte z. B. daran denken, die Geschwindigkeit eines Photons relativ zur Lichtquelle zu messen, aus der es stammt. Es zeigt sich, daß die Geschwindigkeit der Lichtquelle sich zwar in der Energie des Photons und damit in der Frequenz der Lichtwelle niederschlägt (Doppler-Effekt), auf die Geschwindigkeit des Photons selbst aber keinen Einfluß hat: Michelson[1] verglich mit seinem Interferometer (siehe Optik) die Geschwindigkeit des Lichts in Richtung der Bahngeschwindigkeit der Erde mit der senkrecht zu ihr. Er konnte keinen Unterschied feststellen. Hat das Photon einmal die Lichtquelle verlassen, dann läuft es mit Lichtgeschwindigkeit, gleichgültig relativ zu welchem Bezugssystem man diese Geschwindigkeit mißt. Die Vakuumlichtgeschwindigkeit beträgt in allen Inertialsystemen

$$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s} \approx 300\,000\ \mathrm{km/s}.$$

Man muß sich schon einmal klarmachen, was es heißt, eine Geschwindigkeit vor allen anderen auszuzeichnen, indem man nicht mehr angeben muß, relativ zu welchem Bezugssystem sie denn zu messen sei. Diese Auszeichnung genießt nur das Licht. Akzeptiert man aber diesen experimentellen Befund, dann darf man sich nicht über tiefgreifende Konsequenzen für die Vorstellung von Raum und Zeit wundern, die mit dem „gesunden Menschenverstand" der täglichen Erfahrung in Konflikt stehen. Es wird sich zeigen, daß mit den „Grundgrößen" Weg und Zeit beim Übergang von einem ins andere Bezugssystem etwas passiert, was man bisher für unmöglich gehalten hätte: Längen- und Zeitdifferenzen werden von „ruhenden" und „bewegten" Beobachtern unterschiedlich beurteilt; ruhende und bewegte Beobachter sind verschiedener Meinung bezüglich der Reihenfolge von räumlich weit getrennten Ereignissen etc. Der Zeitablauf ist für verschiedene Beobachter verschieden; man muß Abschied nehmen von der „absoluten Zeit", die – wie Newton sagt – für alle gleichförmig und gleichmäßig abläuft. Die Zeit tritt als vierte Koordinate zu den drei Raumkoordinaten hinzu, innig mit ihnen verwoben. Vier gleichberechtigte Koordinaten beschreiben das *vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum.*

Ein Beobachter konstruiert sich ein Koordinatensystem und ordnet alle Ereignisse, die er erlebt: Er sagt, wo sie stattgefunden haben (3 Ortskoordinaten) und wann sie stattgefunden haben (1 Zeitkoordinate). Ein anderer Beobachter, der sich relativ zu ihm mit konstanter Geschwindigkeit bewegt,

[1] Albert Abraham Michelson 1852–1931

tut das auch. Er kommt zu anderen Koordinaten – natürlich wird man sagen. Er kommt aber auch zu anderen Zeiten. Die mathematische Erfassung des Übergangs von einem zum anderen Beobachter zeigt aber, daß die Zeitkoordinate, die der zweite Beobachter einem Ereignis zuordnet, von den Ortskoordinaten des Ereignisses abhängt, die der erste ihm gab – und nicht nur von der Zeit, die er für das Ereignis notierte.

Neue Transformationsgleichungen vermitteln den Übergang von einem Inertialsystem in ein anderes – die *Lorentz-Transformationen.*[2] Nun wird gefordert:[3]

> *Alle Inertialsysteme sind gleichwertig, nicht nur die mit kleinen Geschwindigkeiten relativ zueinander bewegten (Einsteinsches Relativitätsprinzip). Die physikalischen Gesetze müssen lorentz-invariant formuliert werden.*

Die Vorstellung eines vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums macht natürlich Schwierigkeiten. Zum Glück lassen sich die wesentlichen Effekte der relativistischen Kinematik, die aber nur Bewegungen mit konstanter Relativgeschwindigkeit umfaßt, mit einer einzigen Raumkoordinaten beschreiben. Das ist die Koordinate, die der „ruhende" Beobachter braucht, um die gleichförmige Bewegung des „bewegten" Beobachters zu beschreiben. Das sei wie im Kap. 10 die x-bzw. x'-Koordinate: $x \parallel x'$.

Nimmt man noch die Zeit hinzu, dann kann man in diesem zweidimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum alle wesentlichen Fakten beschreiben und geometrisch veranschaulichen. Wegen dieser Möglichkeit, die relativistischen Effekte geometrisch anschaulich ohne die „Zauberformeln" der Lorentz-Transformationen darstellen zu können, wird im folgenden eine kurze Einführung in die Anfangsgründe der Relativistik gegeben, die sich von der sonst üblichen unterscheidet; es wird nur ein Minimum an Mathematik verwendet. Die Methode geht auf den Astronomen Hermann Bondi zurück.[4]

12.2 Geometrische Darstellung

Ein Beobachter A, der von sich behauptet, er ruhe, zeichnet ein (x, t)-Bezugssystem (Fig. 12.1). Er betrachtet sich selbst als den Nabel der Welt, er ruht bei $x = 0$; seine „Weltlinie" ist die t-Achse; er beobachtet und notiert, was die anderen Leute tun. B ist z. B. eine Person, die zum Zeitpunkt $t = 0$ mit ihm zusammentraf und die sich mit einer gewissen Geschwindigkeit in positiver x-Richtung bewegt. Ein dritter Beobachter C dagegen bewegt sich in $-x$-Richtung auf A zu, während D relativ zu A ruht; seine Weltlinie ist eine Gerade parallel zur t-Achse des Zentralbeobachters A.

Ohne Schwierigkeiten erkennt man: Je schneller sich die Körper (oder Beobachterkollegen) relativ zu A bewegen, um so stärker sind ihre Weltlinien gegen die vertikale t-Achse geneigt. Am schnellsten bewegt sich ein Lichtblitz – nämlich mit Lichtgeschwindigkeit. Seiner besonderen Bedeutung entspre-

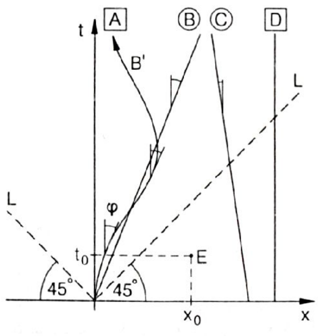

Fig. 12.1: Die von einem Beobachter A gezeichneten Achsen x und t spannen ein zweidimensionales Raum-Zeit-Kontinuum auf. In diesem bedeutet ein Punkt $E = (x_0, t_0)$ ein Ereignis, das zum Zeitpunkt t_0 am Ort x_0 stattfindet. Ein Vorgang, d. h. eine dichte Folge von Ereignissen ist durch eine Linie zu beschreiben, die man *Weltlinie* nennt und die im allgemeinen krumm ist.

[2] Hendrik Antoon Lorentz 1853–1928
[3] Albert Einstein 1879–1955
[4] Hermann Bondi *1919

chend werden einem Lichtblitz auch besondere Geraden im (x, t)-Diagramm zugeordnet: die Winkelhalbierenden, in Fig. 12.1 gestrichelt eingezeichnet (L). Hier besagen diese speziellen Geraden: Zum Zeitpunkt $t = 0$, als er mit B zusammentraf, sendete A einen Lichtblitz in positiver und einen in negativer x-Richtung aus; der eine Lichtblitz wird etwas später von seinen Kollegen C und D registriert.

Die Wahl der Winkelhalbierenden als Lichtgeraden soll auch zum Ausdruck bringen: Mit der Sekunde als Einheit der Zeit und mit der Lichtgeschwindigkeit als Naturkonstanten ist die natürliche Einheit der Länge die *Lichtsekunde* (Ls) also die Strecke, die das Licht in einer Sekunde durcheilt. Mit diesen Basiseinheiten ist die Lichtgeschwindigkeit also

$$c = 1 \text{ Ls/s}. \tag{12.1}$$

Die Geschwindigkeiten u aller Beobachter sind kleiner als c, in der Einheit Ls/s gemessen also kleiner als 1. Das ist das gleiche, wie wenn man alle Geschwindigkeiten in Bruchteilen von c angibt:

$$u < c \quad \longleftrightarrow \quad \beta = \frac{u}{c} < 1. \tag{12.2}$$

Die Weltlinien aller Beobachter im Diagramm der Fig. 12.1 müssen also steiler als die Lichtgeraden sein. Je schneller sich ein Beobachter (relativ zu A) bewegt, um so mehr nähert sich die Steigung seiner Weltlinie der Steigung der Lichtgeraden. Der Tangens des eingezeichneten Winkels φ ist direkt durch β gegeben,

$$\tan\varphi = \beta = \frac{u}{c}. \tag{12.3}$$

Umgekehrt ausgedrückt: *Eine Linie, auch eine krumme wie die des beschleunigt bewegten Beobachters B', verläuft stets steiler als die Lichtgerade* ($|\tan\varphi| < 1$)*; man nennt sie dann eine Weltlinie.* Wir werden nur gleichförmig bewegte Körper betrachten, deren Weltlinien Geraden sind.

Das Diagramm trägt der ausgezeichneten Bedeutung der Lichtgeschwindigkeit Rechnung: Gleichgültig welcher der Beobachter in Fig. 12.1 einen Lichtblitz aussendet, stets ist die Weltlinie dieses Blitzes eine 45°-Gerade; der Blitz läuft mit Lichtgeschwindigkeit, relativ zu welchem Bezugssystem man diese auch immer mißt. Das war ja das wesentliche experimentell gesicherte Faktum.

Bemerkung:
Im folgenden wird bei allen geometrischen Darstellungen im (x, t)-Diagramm auf die explizite Angabe beider Achsen verzichtet. Es werden immer nur die Zeitachsen gezeichnet. Mit dem Trick, die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ (Ls/s) zu setzen, hat man – wie noch verdeutlicht werden wird – die Information „Entfernung" sozusagen auch auf der Zeitachse untergebracht. Man vermeidet dadurch Schwierigkeiten mit der Geometrie der Raum-Zeit-Welt, die nicht mehr euklidisch ist. Darum braucht man sich aber nicht zu kümmern, wenn man die mathematische Umsetzung der geometrischen Konstruktionen im (x, t)-Diagramm vermeidet. Man beachte nur: Das Diagramm wird vom „ruhenden" Beobachter A gezeichnet; der relativ zu ihm bewegte Beobachter B müßte ein anderes Diagramm zeichnen.

12.3 Der Bondische k-Faktor

Drei Experimentatoren A, B und C machen ein einfaches Experiment: Fig. 12.2. Der Beobachter A (also derjenige, auf den alles bezogen wird und der die Figur zeichnet) sendet in regelmäßigen Abständen T Lichtblitze in $+x$-Richtung aus. Der sich mit einer Geschwindigkeit u von A wegbewegende Beobachter B empfängt nach seiner eigenen Uhr die Blitze in einem größeren Abstand $k \cdot T$ $(k > 1)$, denn er versucht ja, vor dem Licht zu fliehen. k ist umso größer, je schneller sich B von A wegbewegt. Könnte er sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen (was er nicht kann!), wäre k unendlich groß. Ein relativ zu A ruhender Beobachter C empfängt die Lichtblitze natürlich in dem gleichen zeitlichen Abstand T, mit dem sie A ausgesendet hat. Bewegt sich ein Beobachter auf seinen Kollegen A zu, empfängt er die Blitze in einem um den Faktor $1/k$ kürzeren Abstand. Würde B seinerseits immer beim Empfang der Blitze von A selbst einen Blitz in positiver x-Richtung abschicken, so kämen diese Blitze zusammen mit den Blitzen von A im Abstand $\frac{1}{k} \cdot (kT) = T$ bei C an.

Quintessenz:

Entfernen sich die Beobachter voneinander, dann vergrößert sich der zeitliche Blitzabstand um den Faktor k, bewegen sie sich jedoch mit der gleichen Geschwindigkeit aufeinander zu, dann verringert er sich um den Faktor 1/k.

$$\text{Oder allgemein: } \begin{cases} 1 < k < \infty: & \text{die Beobachter entfernen sich voneinander;} \\ k = 1 \quad : & \text{die Beobachter ruhen relativ zueinander;} \\ 0 < k < 1 \; : & \text{die Beobachter bewegen sich aufeinander zu.} \end{cases}$$

Der exakte mathematische Zusammenhang zwischen dem k-Faktor und der Relativgeschwindigkeit u der Beobachter wird im nächsten Abschnitt hergeleitet.

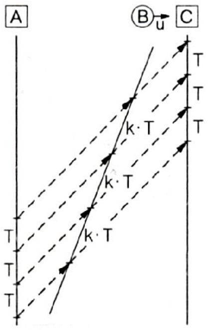

Fig. 12.2: Die von einem Experimentator A im zeitlichen Abstand T ausgesendeten Lichtblitze werden von einem relativ zu ihm ruhenden Kollegen C im gleichen Abstand empfangen; der Experimentator B, der sich von A mit konstanter Geschwindigkeit wegbewegt, empfängt die Blitze im größeren zeitlichen Abstand $k \cdot T$.

12.4 Messung von Entfernungen und Geschwindigkeiten

Entfernungen werden am besten mit der bereits im Kapitel 1 kurz beschriebenen Radarmethode direkt in Lichtsekunden gemessen, was man mit der konstanten Lichtgeschwindigkeit auch sofort in Meter umrechnen kann – falls notwendig. Der Experimentator A will z.B. die Entfernung zu seinem Kollegen B messen. Er sendet einen Lichtblitz in Richtung von B und fängt ihn nach der Reflexion an einem Spiegel bei B wieder auf (Fig. 12.3a). Die Zeit zwischen der Aussendung des Blitzes und seinem Wiedereintreffen wird gemessen. In Fig. 12.3.b ist das zugehörige (x, t)-Diagramm skizziert. Der Lichtblitz wird zur Zeit $t = t_1$ auf die Reise geschickt, zur Zeit $t_1 + \tau$ am Spiegel Sp reflektiert und zur Zeit $t_2 = t_1 + 2\tau$ von A wieder aufgefangen.

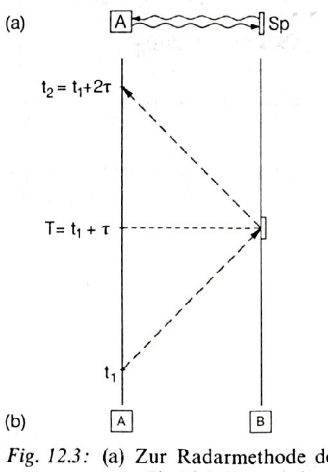

Fig. 12.3: (a) Zur Radarmethode der Entfernungsmessung: Ein Lichtblitz wird ausgesendet und nach Reflexion wieder aufgefangen. Die Laufzeit ist direkt ein Maß für die Entfernung zwischen Experimentator A und Spiegel Sp seines Kollegen B.
(b) Darstellung der Entfernungsmessung im (x, t)-Diagramm.

Der Zeitpunkt der Reflexion liegt offensichtlich genau in der Mitte zwischen Aussendezeit und Empfangszeit,

$$t_{refl} = t_1 + \tau = \frac{t_1 + t_2}{2}. \tag{12.4}$$

Der Spiegel ist genau

$$\frac{t_2 - t_1}{2} = \tau \text{ Ls (Lichtsekunden)} \quad \text{oder} \quad l = c\tau \text{ m (Meter)} \tag{12.5}$$

von A entfernt. Das Ereignis „Lichtreflexion am Spiegel" hat also für A die Ortskoordinate $\tau = (t_2 - t_1)/2$ (in Ls) und die Zeitkoordinate $T = (t_1 + t_2)/2$ (in s). Beide Informationen sind also auf der Zeitachse untergebracht; die explizite Angabe der Ortsachse erübrigt sich.

Diese Radarmethode eignet sich auch zur Messung von Geschwindigkeiten (Autofahrer wissen das!). Man sendet einfach zwei Lichtblitze kurz hintereinander aus und empfängt die am bewegten Gegenstand reflektierten Blitze wieder. Dann erhält man nach der gerade beschriebenen Methode die Strecke, die der Gegenstand zwischen den beiden Reflexionen zurückgelegt hat. Diese ist nur noch durch die zugehörige Zeitdifferenz zu dividieren, um die gewünschte Geschwindigkeit zu ermitteln. Man kann die Meßmethode noch vereinfachen und auf einen der Lichtblitze verzichten, wenn man den Zeitnullpunkt geschickt wählt oder, was auf das gleiche hinausläuft, den ersten Blitz z. Zt. $t = 0$ aussendet.

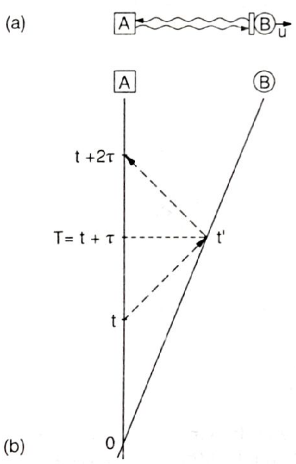

Fig. 12.4: Experimentator A mißt die Geschwindigkeit eines Gegenstandes (oder eines Kollegen) B mit der Radarmethode durch Aussenden eines Lichtblitzes. Dieser wird zur Zeit t von A ausgesendet, zur Zeit $t + \tau$ am Spiegel von B reflektiert und zur Zeit $t + 2\tau$ von A wieder aufgefangen.

Die Einzelheiten dieser vereinfachten Geschwindigkeitsmessung sind im Diagramm der Fig. 12.4 festgehalten. B ist der mit der Geschwindigkeit $\beta = u/c$ sich von A wegbewegende Kollege; A will diese Geschwindigkeit messen. Die Zeitmessung beginnt, wenn B bei A vorbeikommt, d. h. wenn ihre Weltlinien sich schneiden. A wartet eine Zeit t ab, sendet dann einen Lichtblitz in Richtung von B aus und empfängt ihn zur Zeit $t + 2\tau$ wieder.

A sagt:
Mein Blitz wurde z. Zt. $T = t + \tau$ bei B reflektiert. B befand sich dann gerade τ Lichtsekunden von mir entfernt. Zum Zurücklegen dieser Entfernung brauchte mein Lichtblitz τ Sekunden, mein Kollege B aber $T = t + \tau$ Sekunden. Die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die zum Zurücklegen der Entfernung benötigten Zeiten:

$$\frac{u}{c} = \frac{\tau}{T}. \tag{12.6}$$

Durch Messung der Sendezeit t und der Empfangszeit $t + 2\tau$ kann A damit also sofort die Geschwindigkeit seines Kollegen B in Lichtsekunden pro Sekunde angeben.

Man kann aber noch ein bißchen weiterrechnen und erhält sogleich den Zusammenhang zwischen dem k-Faktor und der Relativgeschwindigkeit u. Nach der Definition des k-Faktors (Fig. 12.2) läßt sich die Relexionszeit t' des Blitzes nach der Uhr von B angeben (zur Erinnerung: Es soll berücksichtigt werden, daß die Uhren der beiden Experimentatoren verschiedene Zeiten anzeigen):

$$t' = k \cdot t, \tag{12.7}$$

denn so war der k-Faktor ja definiert: Der sich wegbewegende Beobachter empfängt, wenn man den nicht gezeichneten Blitz bei $t = 0$ mit hinzunimmt, die Blitze im k-fachen zeitlichen Abstand.

Dann gilt aber auch umgekehrt: Der z. Zt. t' bei B reflektierte Blitz kommt zur Zeit $k \cdot t'$ bei A an, denn von B's Standpunkt aus bewegt sich A mit gleicher Geschwindigkeit von ihm weg. Es gilt also:

$$t + 2\tau = k \cdot t' = k^2 \cdot t. \tag{12.8}$$

Damit läßt sich die Laufzeit τ des Blitzes und die Reflexionszeit $T = t + \tau$ als Funktion der Sendezeit t angeben:

$$\tau = \frac{1}{2}\left(k^2 - 1\right) \cdot t \quad \text{und} \quad T = t + \tau = \frac{1}{2}\left(k^2 + 1\right) \cdot t. \tag{12.9}$$

Setzt man dies in (12.6) ein, erhält man sofort den Zusammenhang zwischen dem k-Faktor und der Relativgeschwindigkeit u der beiden Experimentatoren:

$$\beta = \frac{u}{c} = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1} \quad \text{oder} \quad k = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \tag{12.10}$$

Das Diagramm der Fig. 12.5 zeigt den Zusammenhang zwischen k und der Relativgeschwindigkeit $\beta = u/c$. Man erkennt : $k = 1$ ist gleichbedeutend mit $u = 0$; Sender A und Kollege B ruhen relativ zueinander. Ersetzen von k durch $1/k$ ist gleichbedeutend mit dem Ersetzen von u durch $-u$ (oder β durch $-\beta$): Im ersten Fall bewegen sich A und B wie in Fig. 12.2 voneinander weg, im zweiten Fall bewegen sie sich aufeinander zu – wie B und C in Fig. 12.2.

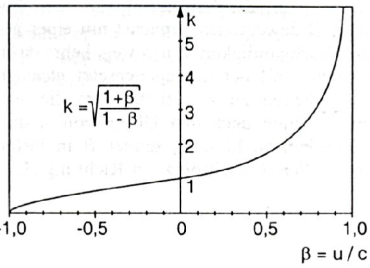

Fig. 12.5: Abhängigkeit des k-Faktors von der Relativgeschwindigkeit u.

Mit Hilfe von (12.10) kann man nun alle mit Hilfe der (x, t)-Diagramme gewonnenen Erkenntnisse statt mit k auch mit $\beta = u/c$ ausdrücken. Zum Beispiel registriert in Fig. 12.2 der sich von A wegbewegende Beobachter B die von A im Abstand T ausgesendeten Lichtblitze im größeren Abstand $T' = k \cdot T$ oder mit der kleineren Frequenz

$$\nu' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{k} \cdot \nu = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \cdot \nu. \tag{12.11}$$

Denkt man nun statt an einzelne Lichtblitze an Lichtwellen mit der Frequenz ν, dann ist $\nu' < \nu$ die Lichtfrequenz, die ein vom Sender sich wegbewegender Beobachter registriert. Das ist der sogenannte *Dopplereffekt*[5]; er wird uns in der Wellenlehre wiederbegegnen.

12.5 Die Zeitdilatation und das Zwillingsparadoxon

Wir wollen mit der Beschreibung des bekannten sogenannten Zwillingsparadoxons beginnen, das, wie sich dann herausstellt, gar kein Paradoxon ist, aber unglaublich klingt:

[5] Christian Doppler 1803 – 1853

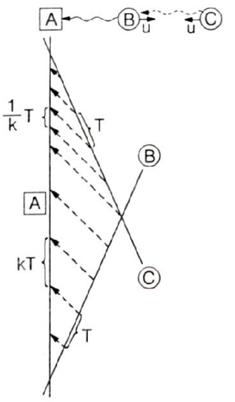

Fig. 12.6: Zum Zwillingsparadoxon: Ein Beobachter B bewegt sich zunächst mit einer gewissen Geschwindigkeit von A weg, kehrt dann aber wieder mit der entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeit zu A zurück. Um die verflossenen Zeiten nach den Uhren von A und B vergleichen zu können, sendet B in festen Zeitintervallen T Lichtblitze in Richtung A.

Im unternehmungslustigen Alter von 20 Jahren entschließt sich einer von zwei Zwillingsbrüdern, mit einem Raumschiff, das in kürzester Zeit eine Geschwindigkeit von – sagen wir – $u = 0{,}9c$ erreichen kann, auf eine große Reise zu gehen. Er kehrt (nach seiner Uhr) nach 10 Jahren, also im Alter von 30 Jahren zurück und muß feststellen, daß sein Bruder bereits 43 Jahre alt geworden ist.

Das klingt wie Zauberei. Wir wollen das „Experiment" der beiden Brüder schrittweise mit Hilfe des (x,t)-Diagramms verfolgen. A sei der Bruder, der zu Hause bleibt und das Diagramm zeichnet; B ist der Bruder, der sich mit der Geschwindigkeit u auf die Reise begibt, nach einer gewissen Zeit in das Raumschiff von C umsteigt und mit der gleichen Geschwindigkeit zurückkehrt. Die beiden Brüder haben ausgemacht, daß B im regelmäßigen Abstand T Lichtblitze nach Hause schickt. A empfängt diese Blitze im Abstand $k \cdot T > T$ und entnimmt daraus, daß sich sein Bruder von ihm entfernt. Nach n Blitzen, also nach der Zeit $n \cdot kT$ empfängt A plötzlich die Blitze in dem viel kürzeren Abstand $(1/k) \cdot T$ und erkennt daran, daß sich sein Bruder mit der (entgegengesetzt) gleich großen Geschwindigkeit auf der Rückreise befindet. Nach weiteren n kurz aufeinanderfolgenden Blitzen sind die beiden Brüder wieder beisammen und vergleichen ihre Uhren:

Für den Reisenden B ist die Zeit

$$\Delta t' = 2nT$$

vergangen, denn er hat insgesamt $2n$ Blitze nach Hause geschickt. Für den daheimgebliebenen A verging jedoch die Zeit

$$\Delta t = n \cdot k \cdot T + n \cdot \frac{1}{k} \cdot T = n \cdot \left(k + \frac{1}{k}\right) \cdot T .$$

In unserem Beispiel war $\Delta t' = 2nT = 10$ Jahre. Mit $u = 0{,}9\,c$, also $k = 4{,}35$ kommt für $\Delta t = (4{,}35 + 1/4{,}35) \cdot 5 = 23$ Jahre heraus!

Der daheimgebliebene, also ruhende Bruder muß schließen, daß bewegte Uhren langsamer gehen. Er findet das unglaublich und vermutet, daß sein Bruder mit seiner Uhr bei den Beschleunigungsphasen seines Raumschiffs oder beim Umsteigen auf das Raumschiff von C eventuell Schaden erlitten hat.

Die beschriebene Zeitdilatation kann man ohne große Rechnung aber bereits dem Diagramm der Fig. 12.4 entnehmen, wo A die Geschwindigkeit von B mißt und es kein Umsteigen auf ein zurückkehrendes Raumschiff gab.

A sagt: „Mein Blitz wurde zur Zeit $T = t + \tau$ reflektiert."
B sagt: „Der Blitz wurde bei mir zur Zeit t' reflektiert."
Diese beiden Aussagen kann man vergleichen, wenn man die Erkenntnisse von Gl. (12.9) und $t' = k \cdot t$ berücksichtigt. Man gelangt sofort zu $T/t' = \frac{1}{2}(k + 1/k)$, oder wenn man auf Zeitdifferenzen umschreibt $(T \to \Delta t;\ t' \to \Delta t')$:

$$\boxed{\Delta t = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) \cdot \Delta t' \quad \text{oder} \quad \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \Delta t',} \qquad (12.12)$$

oder $\Delta t = \gamma \cdot \Delta t'$ oder $\Delta t > \Delta t'$.

A sagt

Bewegte Uhren gehen langsamer.

Damit ist jedoch nicht etwa einer der beiden Beobachter ausgezeichnet. Die Angelegenheit ist völlig symmetrisch. Lassen wir *B* einmal urteilen! Dann muß er das Diagramm zeichnen, das in Fig. 12.7 wiedergegeben ist.

Jetzt gehören alle mit einem Apostroph versehenen Zeitangaben zum ruhenden Bezugssystem, alle ungestrichenen zum bewegten System. *B* schickt jetzt einen Lichtblitz in Richtung von *A* und fängt das reflektierte Signal wieder auf.

B sagt: Der Blitz wurde zur Zeit $\Delta t' = t' + \tau'$ bei *A* reflektiert.
A sagt: Bei mir wurde das Licht zur Zeit $\Delta t = t$ reflektiert.
Jetzt muß man analog zu (12.9) schreiben:

$$\Delta t' = t' + \tau' = \frac{1}{2}\left(k^2 + 1\right) \cdot t' \quad \text{und} \quad \Delta t = k \cdot t'.$$

Diesmal ergibt sich daraus

$$\Delta t' = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) \cdot \Delta t \quad \text{oder} \quad \Delta t' = \gamma \cdot \Delta t, \quad \text{also} \quad \Delta t < \Delta t'. \quad (12.13)$$

Auch *B* kommt zu dem Schluß: Bewegte Uhren gehen langsamer.

Die Zeitdehnung wächst mit der Relativgeschwindigkeit. Der Faktor γ wird für $u = c$ unendlich und für $u > c$ schließlich imaginär. Die Zeit ist aber etwas physikalisch Reales und damit mathematisch Reelles. Die Lichtgeschwindigkeit tritt hier auf als absolute Grenzgeschwindigkeit, die zwei Beobachter mit ihren Bezugssystem relativ zueinander je haben können.

Auch der Spezialfall $u = c$ ist natürlich interessant: Nehmen wir einen „Reisenden", der sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt – ein Photon im Vakuum z. B. – und machen uns noch einmal klar, was Gl. (12.12) besagt! Ein Photon von fernen Sternen ist von uns aus gesehen viele Milliarden Jahre unterwegs; das wäre die Lebensdauer, die wir ihm zuschreiben müßten. Wenn wir versuchen, aus Gl. (12.12) die Lebensdauer anzugeben, die es in seinem eigenen Bezugssystem hätte, so kommt wegen $u = c$ und $\gamma = \infty$ stets Null heraus: Für ein Photon gibt es kein Altern.

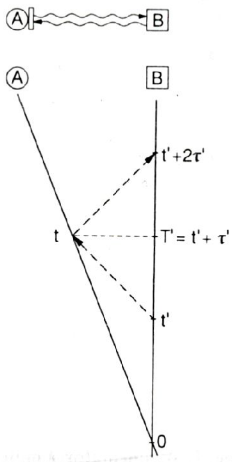

Fig. 12.7: B, der von sich behauptet, er ruhe, zeichnet ein (x, t)-Diagramm, in dem er festhält, daß *A* sich mit der Geschwindigkeit *u* von ihm wegbewegt.

12.6 Die Längenkontraktion

Auch bei Längenmessungen kommen ruhende und bewegte Beobachter zu unterschiedlichen Ergebnissen. Wie ein Experimentator die Länge eines Maßstabs in seinem eigenen Bezugssystem mißt, wurde oben beschrieben. Der ruhende Beobachter *A* will nun aber die Länge des Maßstabs seines Kollegen *B* messen, der sich relativ zu ihm mit der Geschwindigkeit *u* bewegt. Er wendet – genau wie *B* es tun würde – die Radarmethode an, schickt Lichtblitze aus, die an den Maßstabsenden reflektiert werden, und

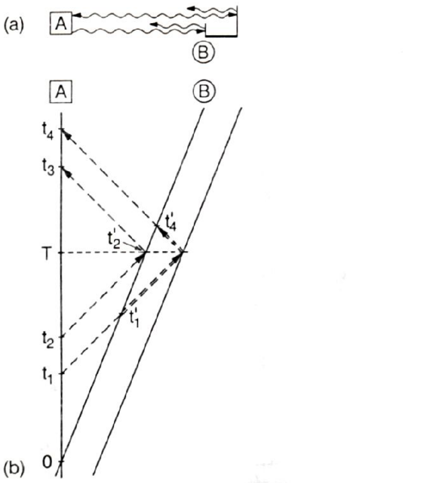

Fig. 12.8: Ein ruhender Experimentator A mißt die Länge eines Maßstabs, der sich mit B von A wegbewegt. A zeichnet je eine Weltlinie für jedes Maßstabsende und achtet darauf, daß die beiden von ihm ausgesendeten Lichtblitze zur gleichen Zeit an den Maßstabsenden reflektiert werden.

empfängt sie wieder (Fig. 12.8a). Im Teil (b) der Figur sieht man das vom ruhenden Beobachter A gezeichnete (x, t)-Diagramm: Er zeichnet zwei parallele Weltlinien für den Anfangs- und für den Endpunkt des Maßstabs von Kollegen B. Dann hat A nur noch auf eines zu achten: die beiden von ihm ausgesendeten Lichtblitze müssen zu zwei Zeiten t_1 und t_2 so abgeschickt werden, daß sie *nach seiner eigenen Uhr zur gleichen Zeit* T an den Maßstabsenden reflektiert werden. (Das ist eigentlich selbstverständlich; man muß auch bei der normalen Längenmessung eines Gegenstands durch Vergleich mit einem Meterstab die „Signale" von den Gegenstandsenden gleichzeitig ausgehen lassen und darf den Gegenstand zwischen den Ablesezeitpunkten nicht verschieben.) Wenn A seine Blitze dann zu den Zeiten t_3 und t_4 wieder empfängt, kann er den Zeitpunkt der Reflexionen berechnen:

$$T = \frac{t_1 + t_4}{2} = \frac{t_2 + t_3}{2}. \tag{12.14}$$

Zu dieser Zeit T war das vordere Ende des Maßstabs

$$\tau_1 = T - t_2 = \frac{t_3 - t_2}{2} \text{ Ls},$$

das hintere Ende des Maßstabs

$$\tau_2 = T - t_1 = \frac{t_4 - t_1}{2} \text{ Ls}$$

von A entfernt. Der Maßstab besitzt also für A die Länge

$$L = \tau_2 - \tau_1 = t_4 - t_3 = t_2 - t_1 \text{ Ls}. \tag{12.15}$$

Bevor wir dies mit Hilfe des k-Faktors umformen, wollen wir auch noch die Länge L' aufschreiben, die der bewegte Beobachter B seinem Maßstab zuordnet. Seine Längenmessung ist auch in Fig. 12.8 enthalten: B möge sich am linken Ende seines Maßstabs befinden; er braucht bloß einen Lichtblitz zum rechten Maßstabsende auszusenden. Er tut dies hier genau zum Zeitpunkt t'_1, wenn er den t_1-Blitz von A empfängt. Seinen eigenen Blitz fängt er z. Zt. t'_4 wieder auf. Er mißt also die Maßstabslänge

$$L' = \frac{1}{2}\left(t'_4 - t'_1\right) \text{ Ls}. \tag{12.16}$$

L und L' müssen noch durch den k-Faktor miteinander in Verbindung gebracht werden. Wieder entnimmt man aus Fig. 12.7:

$$t'_1 = k \cdot t_1; \quad t'_2 = k \cdot t_2; \quad t_3 = k \cdot t'_2 = k^2 \cdot t_2; \quad t_4 = k \cdot t'_4.$$

Man kann damit in (12.13) die gestrichenen durch die ungestrichenen Zeiten ersetzen und erhält unmittelbar

$$L' = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) \cdot (t_2 - t_1) = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) \cdot L = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot L. \tag{12.17}$$

Der ruhende Experimentator A schreibt also für die Länge des Maßstabs auf:

$$L = \frac{2k}{k^2+1} \cdot L' = \sqrt{1-\beta^2} \cdot L' = \frac{1}{\gamma} \cdot L'. \qquad (12.18)$$

Maßstäbe, die parallel zu ihrer Ausdehnung bewegt werden, sind für den ruhenden Beobachter verkürzt.

Hier erscheint der gleiche Faktor γ wie bei der Zeitdilatation Gl. (12.12) – nur im Nenner. Für den ruhenden Beobachter werden bewegte Maßstäbe um den gleichen Faktor verkürzt, um den die mit bewegten Uhren gemessenen Zeitintervalle verlängert werden.

Beispiel: Durch kosmische Strahlung entstehen in den oberen Atmosphärenschichten in ca. 20 km Höhe Mesonen, deren Eigenlebensdauer nach Laborexperimenten $T' = 2{,}15\ \mu s$ beträgt. Bei diesen Experimenten haben die Mesonen nur sehr kleine Geschwindigkeiten. Die ruhenden Experimentatoren messen praktisch die gleiche Lebensdauer, die auch ein gedachter, mit dem Meson mitbewegter Beobachter messen würde. – Die Mesonen in der Atmosphäre besitzen jedoch eine sehr hohe Energie und eine sehr große Geschwindigkeit von etwa $0{,}9994c$, also praktisch Lichtgeschwindigkeit. Ohne Berücksichtigung der relativistischen Zeitdehnung würden die Mesonen während ihrer Lebensdauer einen mittleren Weg von $c \cdot T' \approx 640$ m zurücklegen. Sie hätten keine Chance, bis zur Erdoberfläche vorzudringen, wo man sie jedoch nachweisen kann. Das Nachweisexperiment wird in unserem Ruhsystem gemacht. Von hier aus gesehen müssen wir dem Meson eine größere (gedehnte) Lebensdauer von $T = \gamma \cdot T'$ zubilligen. Bei $\gamma = 1/\sqrt{1-0.9994^2} \approx 30$ leben die Mesonen also rund $65\ \mu s$, in denen sie mühelos die Strecke von 20 km bewältigen. – Der Beobachter, den wir uns auf dem Meson sitzend denken, hat aber auch keine Argumentationsschwierigkeiten. Für ihn lebt das Meson natürlich nur die erwähnten $2{,}15\ \mu s$; er sieht den Experimentator auf der Erde mit annähernd Lichtgeschwindigkeit auf sich zurasen; er sieht die Strecke bis zur Erde um den Faktor γ verkürzt. Statt 20 km bleiben da gerade noch 640 m, die er wiederum mühelos in der kurzen Zeit zurücklegt.

12.7 Die Lorentz-Transformationen

Nun sollen schließlich auch die Transformationsformeln erarbeitet werden, die den Übergang zwischen zwei relativ zueinander bewegten Bezugssystemen vermitteln und die an die Stelle der Galilei-Transformationen treten, wenn die Relativgeschwindigkeiten nicht mehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind; das sind die sogenannten *Lorentz-Transformationen.* Im Sinne unserer Diagramme heißt dies: Die räumliche und zeitliche Koordinate eines Ereignisses wird einmal vom „ruhenden" Beobachter A und einmal vom bewegten Beobachter B gemessen und miteinander verglichen.

Ein geeignetes (x, t)-Diagramm ist in Fig. 12.9 angegeben. Beide Beobachter stellen ihre Uhren auf Null, wenn sie gerade aneinander vorbeirasen. Ein Ereignis E findet von Beobachter A aus gesehen jenseits von Beobachter B statt. Es kann sich dabei einfach um die Reflexion eines Lichtstrahls handeln, den A z. Zt. t_1 ausgesendet hat oder um eine durch den Lichtstrahl ausgelöste Explosion.

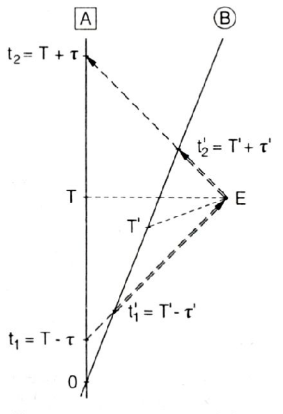

Fig. 12.9: Zur Herleitung der Lorentz-Transformationen ermitteln ein ruhender Beobachter A und ein bewegter Beobachter B die räumlichen und zeitlichen Koordinaten eines weit entfernten Ereignisses E. Dabei könnte es sich z. B. um eine Explosion handeln, die durch den z. Zt. t_1 von A ausgesendeten Lichtstrahl ausgelöst wird.

A notiert:

1) Aussendung des Lichtblitzes z. Zt. $t_1 = T - \tau$.
2) Empfang des reflektierten Lichtblitzes z. Zt. $t_2 = T + \tau$.

Das Ereignis E ist also $\tau = \frac{1}{2}(t_2 - t_1)$ Ls von A entfernt und hat z. Zt. $T = \frac{1}{2}(t_2 + t_1)$ s stattgefunden. Die raumzeitlichen Koordinaten des Ereignisses sind also für A: $E = (\tau, T)$.

B sendet z. Zt. t'_1, wenn das t_1-Signal von A ihn erreicht, ebenfalls einen Lichtblitz nach E und empfängt den reflektierten bei t'_2 wieder.

B notiert:

1) Aussendung des Lichtblitzes z. Zt. $t'_1 = T' - \tau'$.
2) Empfang des reflektierten Blitzes z. Zt. $t'_2 = T' + \tau'$.

Das Ereignis E ist also $\tau' = \frac{1}{2}(t'_2 - t'_1)$ Ls von B entfernt und hat z. Zt. $T' = \frac{1}{2}(t'_2 + t'_1)$ s stattgefunden. Die raumzeitlichen Koordinaten des Ereignisses sind also für B: $E = (\tau', T')$.

Aus dem Diagramm der Fig. 12.9 kann man wieder entnehmen:

$$t'_1 = k \cdot t_1 \quad \text{und} \quad t_2 = k \cdot t'_2$$

oder

$$T' - \tau' = k \cdot (T - \tau) \quad \text{und} \quad T' + \tau' = \frac{1}{k} \cdot (T + \tau). \tag{12.19}$$

Durch Addition bzw. Subtraktion erhält man unmittelbar die *Lorentz-Transformationen:*

$$\boxed{\begin{aligned} \tau' &= \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) \cdot \tau - \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right) \cdot T, \\ T' &= \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) \cdot T - \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right) \cdot \tau. \end{aligned}} \tag{12.20}$$

Man kann sie leicht in die handelsübliche Form bringen, wenn man den k-Faktor durch β, die speziellen Zeitkoordinaten T und T' des Ereignisses E durch t bzw. t' und die in Lichtsekunden gemessenen Ortskoordinaten τ und τ' durch die in Metern zu messenden $x = c \cdot \tau$ bzw. $x' = c \cdot \tau'$ ersetzt. Es ergibt sich dann mit

$$\frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right) = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Lorentz-Transformationen:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x = \frac{x' + ut}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t' = \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t = \frac{t' + \beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{12.21}$$

$$y = y' \qquad z = z'$$

$$\beta = u/c$$

Der linke Gleichungssatz gilt für den Übergang vom System $S(A)$ ins System $S'(B)$, der rechte für den umgekehrten Übergang. Hin- und Rücktransformationen gehen auseinander hervor, indem die gestrichenen durch die ungestrichenen Größen und die Relativgeschwindigkeit u durch $-u$ (bzw. β durch $-\beta$) ersetzt werden.

Vergleicht man diese Transformationen mit den Galileischen, dann sieht man sofort, daß letztere offenbar die Näherungen sind für $u \ll c$. Bei allen relevanten Koordinaten tritt der charakteristische relativistische Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ auf. Bei den Zeitkoordinaten erscheinen jetzt aber auch die Ortskoordinaten, wie man dies im umgekehrten Fall für selbstverständlich erachtet. Darin manifestiert sich die Gleichberechtigung von Orts- und Zeitkoordinaten.

Die angegebenen Transformationsgleichungen wurden unter der Hand noch durch die Beziehungen für die beiden anderen Ortskoordinaten y und z ergänzt. Aus der nur zweidimensionalen geometrischen Darstellung erfährt man über sie nichts. Bei ihnen gibt es aber auch keine Schwierigkeiten:

Maßstäbe, die senkrecht zur ihrer Ausdehnung bewegt werden, erfahren keine Längenänderungen.

Das folgt wiederum einfach aus der Gleichberechtigung der beiden Bezugssysteme S und S'; wieder sei die Relativgeschwindigkeit u, wie in Fig. 12.10 eingetragen. Vor dem Start von S' vergleichen beide Beobachter ihre Maßstäbe; sie sollen gleich lang sein. Die Maßstäbe werden an der y- bzw. y'-Achse befestigt und in gleicher Höhe (M, M') mit einem Schreibstift versehen. Dann startet B mit seinem System und fliegt mit der Geschwindigkeit u an A vorbei. Jeder der Schreibstifte macht dann beim Vorbeifliegen auf dem jeweils anderen Maßstab einen Strich. Nehmen wir einmal an, A fände wirklich unterhalb M einen Strich, dann schließt er, daß der Maßstab seines Kollegen B kürzer ist als sein eigener, daß also *bewegte Maßstäbe kürzer seien*. Umgekehrt findet dann B einen Strich auf seinem Maßstab oberhalb M'. B bezeichnet sich natürlich in seinem System als ruhend und behauptet, daß A sich mit seinem System S mit $-u$ bewege. Nach seinem Meßergebnis ist der Maßstab von A länger als sein eigener. Er schließt also, daß *bewegte Maßstäbe länger seien als ruhende*.

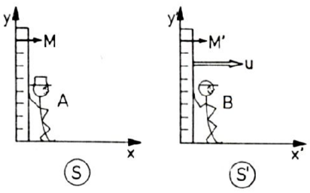

Fig. 12.10: Ein ruhender Beobachter A und ein mit der Geschwindigkeit u bewegter Beobachter B vergleichen zwei Maßstäbe, die senkrecht zur Bewegungsrichtung an den y-Achsen angebracht sind.

Damit könnte man unterscheiden, welches der beiden Systeme sich wirklich bewegt und welches ruht. Die beiden Inertialsysteme sollen aber völlig gleichberechtigt sein, was nur möglich ist, wenn beide Beobachter zum gleichen Schluß kommen.

12.8 Transformation von Geschwindigkeiten

Die Transformation von Geschwindigkeiten von einem ruhenden Bezugssystem in ein mit der Geschwindigkeit u bewegtes System kann man ebenfalls mit Hilfe des k-Kalküls gewinnen. Da man sich bei ihm aber von vornherein auf eine einzige Raumkoordinate beschränkt, erhält man natürlich nur eine Aussage über die Komponente der Geschwindigkeit in dieser Koordinatenrichtung. Über die Komponenten in den anderen Raumachsenrichtungen erfährt man nichts.

Am besten geht man daher gleich von den Lorentz-Transformationen (12.21) aus. Die beiden Bezugssysteme seien wieder so gewählt, daß die x-Achsen parallel sind. Die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme sei wieder u.

Definitionsgemäß gilt für die Geschwindigkeiten $\vec{v}$ und $\vec{v}\,'$ in den beiden Bezugssystemen:

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

$$\vec{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'}\right).$$

Um $\vec{v}$ und $\vec{v}'$ zueinander in Beziehung zu setzen, braucht man nur zu beachten, daß die beiden Beobachter in S und S' ihre individuellen Uhren mit sich herumtragen ($t \neq t'$). Es gilt dann mit (12.21):

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}, \tag{12.22}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{v_y \cdot \sqrt{1-\beta^2}}{1 - uv_x/c^2} \tag{12.23}$$

und analog für v'_z.

Diese Gleichungen beschreiben den Übergang von S nach S'. Um die umgekehrten Transformationen zu erhalten, hat man nur $\vec{v}$ durch $\vec{v}\,'$ und u durch $-u$ zu ersetzen. Zusammenfassend hat man also für eine Geschwindigkeit $\vec{v}$ in beliebiger Richtung die Transformationsbeziehungen (für $x \parallel x'$):

Geschwindigkeitstransformationen:

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - \beta v_x/c} \qquad v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \beta v'_x/c}$$

$$v'_y = \frac{v_y \cdot \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta v_x/c} \qquad v_y = \frac{v'_y \cdot \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta v_x/c} \tag{12.24}$$

$$v'_z = \frac{v_z \cdot \sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta v_x/c} \qquad v_z = \frac{v'_z \cdot \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta v'_x/c}$$

Auch hier erhält man für den Grenzfall $u, v \ll c$ das klassische Additionstheorem der Geschwindigkeiten zurück: Die Nenner und die Wurzelausdrücke sind dann praktisch gleich 1.

Diese Gleichungen bringen nun auch mathematisch zum Ausdruck, was als experimentelle Erfahrung ganz zu Beginn in die Überlegungen hineingesteckt wurde: Lichtblitze pflanzen sich in *jedem* Bezugssystem mit Lichtgeschwindigkeit fort. Setzt man z. B. in (12.24) $v_x = c$ im System S, dann erhält man im System S':

$$v'_x = \frac{c-u}{1-uc/c^2} = c.$$

Das heißt: Man kann einem Photon mit beliebiger Geschwindigkeit hinterherfahren – es enteilt stets mit Lichtgeschwindigkeit. Oder, man kann einem Photon so schnell entgegeneilen wie man will, es kommt stets mit Lichtgeschwindigkeit auf einen zu.

Ein anderes Beispiel: Angenommen man hat es geschafft, in einem mit $u = 0{,}9c$ bewegten Bezugssystem ein Teilchen auf $v'_x = 0{,}9c$ zu beschleunigen. Wie schnell ist es dann im Ruhsystem? Die einfache Addition ergäbe $1{,}8c$, also etwas Größeres als die Lichtgeschwindigkeit. Die richtige „Addition" nach Gl. (12.20) ergibt aber:

$$v_x = \frac{0{,}9c + 0{,}9c}{1 + 0{,}81} = 0{,}9945c,$$

also eine Geschwindigkeit $< c$.

12.9 Absolut und relativ: Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft

Es wurde eingangs schon erwähnt, daß auch der Begriff der Gleichzeitigkeit relativiert werden muß: Ereignisse, die für einen Beobachter gleichzeitig stattfinden, können für einen relativ zu ihm bewegten Kollegen nacheinander eintreten. Trotzdem gibt es keine Schwierigkeiten mit der Kausalität, wie man vielleicht vermuten könnte, denn diese Meinungsverschiedenheiten treten nur bei Ereignissen mit großem räumlichem Abstand auf, so daß das eine nie die Ursache des anderen sein kann.

In Fig. 12.11 sind zwei Ereignisse E_1 und E_2 eingezeichnet, die für den Beobachter A gleichzeitig, und zwar z. Zt. T stattfinden. Er belegt diese Behauptung damit, daß er zwei z. Zt. $T - \tau$ in entgegengesetzten Richtungen ausgesendete Lichtblitze, die diese Ereignisse dann auslösten, 2τ Sekunden später wieder empfängt.

A sagt:
1) der zeitliche Abstand der Ereignisse ist Null, sie finden gleichzeitig statt;
2) der räumliche Abstand der Ereignisse ist 2τ Lichtsekunden.

Der relativ zu A bewegte Beobachter B ist anderer Meinung. Es soll angenommen werden, daß er mit A z. Zt. T zusammentrifft; über diesen Zeitpunkt sind sich die beiden einig. B mußte aber bereits bei $T'_1 - \tau'$ einen Blitz aussenden, der mit dem entsprechenden Blitz von A gemeinsam bei E_1 reflektiert wurde, und empfängt die Antwort wieder bei $T'_1 + \tau'$. Ohne

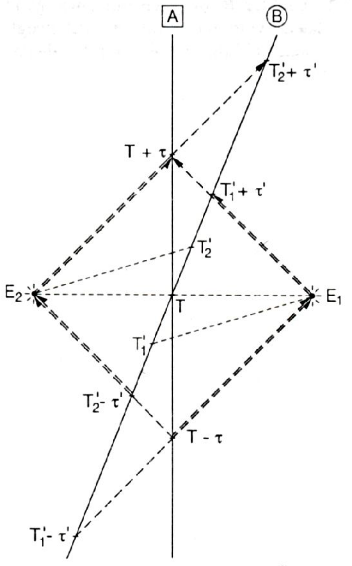

Fig. 12.11: Für einen ruhenden Beobachter A finden zwei Ereignisse E_1 und E_2 gleichzeitig zur Zeit T statt. Ein relativ zu ihm bewegter Kollege kommt jedoch zu dem Schluß, daß E_2 später als E_1 stattfindet ($T'_2 > T'_1$).

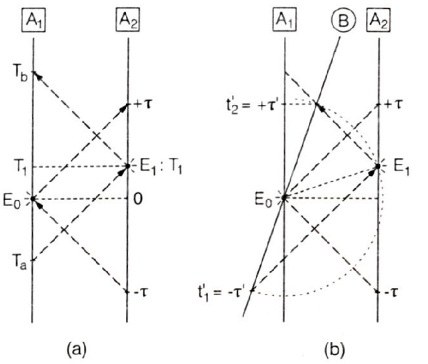

Fig. 12.12: (a) Zwei relativ zueinander ruhende Beobachter A_1 und A_2 kommen bei der Beurteilung der zeitlichen Reihenfolge von Ereignissen zum gleichen Ergebnis: Für beide findet E_1 später als E_0 statt.
(b) Ein Beobachter B, der sich mit einer ganz gewissen Geschwindigkeit auf A_2 zubewegt, kommt zu dem Schluß, daß E_0 und E_1 gleichzeitig stattfinden.

weitere Rechnung ist sofort zu sehen: Für ihn liegt T'_1 *vor* T und analog die Zeit T'_2 für das zweite Ereignis *später* als T. Für B findet E_2 eindeutig nach E_1 statt.

B sagt:

1) der zeitliche Abstand der Ereignisse ist $T'_2 - T'_1$; E_2 findet später als E_1 statt;
2) der räumliche Abstand der Ereignisse ist $2\tau'$ Lichtsekunden.

Beides kann man unter Zuhilfenahme von (12.20/12.21) mit dem räumlichen Abstand 2τ im Ruhsystem ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} T'_2 - T'_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left(k - \frac{1}{k}\right) \cdot 2\tau = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{2x}{c} \\ 2\tau' &= \frac{1}{2} \cdot \left(k + \frac{1}{k}\right) \cdot 2\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{2x}{c} \end{aligned}\right\} \quad (12.25)$$

Dabei ist $2x$ der von A gemessene räumliche Abstand der Ereignisse.

Aus Fig. 12.11 ist unmittelbar ersichtlich, daß ein dritter Beobachter, der sich relativ zu A in entgegengesetzter Richtung wie B bewegt, zu dem umgekehrten Schluß kommt: Ereignis E_2 findet für ihn vor E_1 statt.

Nun fragt man sich natürlich, wie weit diese Verquickung von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft getrieben werden kann. Ganz sicher können wir keinen Besuch aus der Zukunft bekommen, genausowenig wie aus der Vergangenheit. Immer handelt es sich um Aussagen von gegeneinander bewegten Beobachtern und um Ereignisse, die nicht am gleichen Ort stattfinden. Um dies noch etwas zu präzisieren, wurde Fig. 12.12 gezeichnet.

Einem Beobachter A_1 sei ein Ereignis E_0 so wichtig, daß er es zum Nullpunkt seiner Zeitskala macht (Fig. 12.12a). Ein weit entfernter, aber relativ zu ihm ruhender Kollege A_2 denkt genau wie er. Er legt seinen Zeitnullpunkt genau mitten zwischen Sendezeit $(-\tau)$ und Empfangszeit $(+\tau)$ eines Lichtblitzes, mit dem er E_0 auslösen könnte. Ein Ereignis E_1 in seiner Nähe, das für ihn zu späterer Zeit T_1 stattfindet, tut dies auch nach Meinung von A_1: Zeit $T_1 = (T_a + T_a)/2 > 0$. A_1 und A_2 haben keine Meinungsverschiedenheiten über die zeitliche Abfolge von Ereignissen.

Nun kann man aber einen Beobachter B finden, für den E_0 und E_1 gleichzeitig stattfinden. B möge zum Zeitpunkt 0 von E_0 mit A_1 zusammentreffen – nach seiner und nach der Uhr von A_1. Zur Konstruktion der Weltlinie von B im System von A_1 benutzt man die Lichtgerade des Blitzes $(T_a \rightarrow T_1)$, der E_1 auslöste und von ihm reflektiert wurde. Der Kreis um E_0 mit dem Radius $\overline{E_0E_1}$ schneidet diese Lichtgeraden in $-\tau'$ und $+\tau'$. Die Gerade $(-\tau', E_0, +\tau')$ ist die Weltlinie (Zeitachse) des gesuchten Beobachters B. Er hätte z. Zt. $t'_1 = -\tau'$ einen Blitz aussenden müssen, um E_1 auszulösen, und die Antwort bei $t'_2 = +\tau'$ wieder empfangen. Er behauptet klar, da $(t'_1 + t'_2)/2 = 0$ ist, daß E_0 und E_1 gleichzeitig stattfanden.

Die Konstruktion zeigt deutlich: Man kann solche bewegte Beobachter B für alle Ereignisse E_1 finden, die auf der Zeitachse von A_2 zwischen $-\tau$ und $+\tau$ liegen. Oder, da die Entfernung zwischen E_0 und A_2 willkürlich gewählt war, gilt dies für alle Ereignisse, die relativ zu E_0 im rechten oder linken Quadranten zwischen den von E_0 ausgehenden Lichtgeraden liegen.

Man nennt dieses Raumzeitgebiet daher die relative Vergangenheit/Gegenwart/Zukunft, weil verschieden schnell bewegte Beobachter über die Reihenfolge der Ereignisse uneins sind. Alle Ereignisse im oberen Quadranten gehören jedoch für alle Beobachter der (absoluten) Zukunft an, alle Ereignisse im unteren Quadranten sind absolute Vergangenheit – jeweils bezogen auf E_0. Im räumlich Zweidimensionalen (zwei Ortskoordinaten + eine Zeitkoordinate) sind diese Quadranten Teilbereiche eines „Doppelkegels": Fig. 12.13. Werden alle drei Ortskoordinaten berücksichtigt, hat man entsprechend einen vierdimensionalen Doppelkegel im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum.

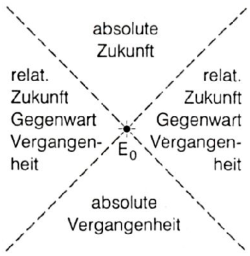

Fig. 12.13: Die von einem Raumzeitpunkt E_0 ausgehenden Lichtgeraden trennen die absolute Vergangenheit und die absolute Zukunft voneinander. Alle Beobachter, gleichgültig mit welchen Geschwindigkeiten sie sich bewegen, sind sich über die zeitliche Einordnung von Ereignissen in diesem Raumzeitgebiet relativ zu E_0 einig. Nicht so jedoch für Ereignisse in den Raumzeitbereichen rechts und links; je nach dem Bewegungszustand des Beobachters werden sie von diesem vor, gleichzeitig oder nach E_0 eingeordnet. Keines dieser Ereignisse kann Ursache oder Folge von E_0 sein, denn keines kann durch ein Signal mit E_0 verbunden werden.

12.10 Masse, Impuls, Energie

Allein aus dem experimentellen Faktum der für alle gleichförmig bewegten Bezugssysteme konstanten und gleichen Vakuumlichtgeschwindigkeit ergaben sich ganz neue, ungewohnte Vorstellungen für Raum und Zeit. Der Bondische k-Kalkül verschaffte uns auf sehr einfache Weise, praktisch ohne Mathematik und fast ausschließlich mit Bildern des zweidimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums einen Zugang zu diesem faszinierenden Gebiet der Relativistik. Einige Bemerkungen zu den dynamischen Größen Masse, Kraft, Impuls und Energie mögen diese knappe Darstellung abrunden. Auch hier wollen wir aber tiefgehende mathematische Abhandlungen vermeiden.

Bei der Betrachtung von Systemen mit kleiner translatorischer Relativgeschwindigkeit hatten wir zur Demonstration der Gleichwertigkeit von Inertialsystemen den Impuls- und Energiesatz der Mechanik herangezogen. Wenn man nun die prinzipielle Gleichwertigkeit aller Inertialsysteme fordert, auch wenn ihre Relativgeschwindigkeit nicht mehr klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist, dann wird man wieder die Gültigkeit dieser wichtigen Sätze erwarten (stellvertretend für alle anderen Gesetze der Mechanik und der Physik überhaupt).

Wir denken wieder an einen einfachen, zentralen, elastischen Stoß z. B. in x-Richtung zwischen zwei Körpern. Sowohl im System S als auch im System S' soll der Impulserhaltungssatz gelten. Also

$$\begin{aligned} \text{in } S: \quad & (p_1 + p_2)_{vor} = (p_1 + p_2)_{nach} \\ \text{in } S': \quad & (p'_1 + p'_2)_{vor} = (p'_1 + p'_2)_{nach} \end{aligned} \tag{12.26}$$

oder, wenn man wie gewohnt $p = m \cdot v$ schreibt, und mit v die Geschwindigkeiten *vor* dem Stoß und mit w die Geschwindigkeiten *nach* dem Stoß bezeichnet:

$$\begin{aligned} \text{in } S: \quad & m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2 \\ \text{in } S': \quad & m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 w'_1 + m_2 w'_2 \end{aligned} \tag{12.27}$$

Jetzt müßte man mit Hilfe der Transformationsformeln (12.17) für die Geschwindigkeiten die gestrichenen durch die ungestrichenen Größen ersetzen und rücktransformieren. Das ist leider eine längliche, lästige und trickreiche Prozedur, die wir hier nicht durchführen, sondern nur das Ergebnis angeben wollen. Die Gleichwertigkeit der Inertialsysteme fordert, daß die im Impulssatz auftretenden Massen m_1 und m_2 der beiden Körper nicht mehr als Konstanten angesehen werden können, sondern geschwindigkeitsabhängig sind:

$$\boxed{\textit{Masse:}\quad m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}};\qquad m_0\text{: Ruhmasse.}} \tag{12.28}$$

In der Definitionsgleichung des Impulses hat man auch die Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse zu berücksichtigen:

$$\boxed{\textit{Impuls:}\quad p = m(v)\cdot v.} \tag{12.29}$$

Wieder taucht hier der bekannte Faktor $\sqrt{1-\beta^2}$ mit $\beta = v/c$ auf. Je größer die Geschwindigkeit, um so größer wird die Masse des Körpers. Die Abhängigkeit der Körpermasse von der Geschwindigkeit ist in Fig. 12.14 gezeichnet. Man erkennt: Bis etwa $v \approx 0{,}4c$ bleibt die Massenzunahme unter 10%, um dann aber mit wachsender Geschwindigkeit schnell anzusteigen. Die Geschwindigkeit $v = c$ ist wie eine Mauer, die nicht überwunden werden kann; die Masse geht mit $v \to c$ gegen unendlich; sie wird für $v > c$ imaginär.

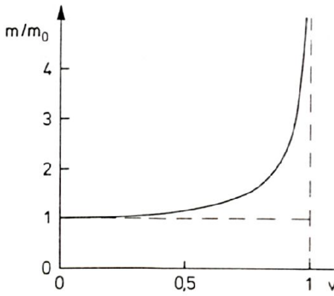

Fig. 12.14: Abhängigkeit der Masse eines Körpers von seiner Geschwindigkeit. m_0 ist die sogenannte Ruhmasse. Bei $v = c$ wird die Masse ∞. Die Lichtgeschwindigkeit ist wie eine Mauer, die von keinem massebehafteten Körpers erreicht werden kann.

In der klassischen Mechanik hatte man die kinetische Energie E_k eines Körpers durch Berechnung der Beschleunigungsarbeit W_B aus dem Arbeitsintegral erhalten, indem man $p = mv$ oder $v = p/m$ mit m als konstantem Faktor einsetzte.

$$\begin{aligned} W_B &= \int F\,\mathrm{d}s = \int \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\cdot \mathrm{d}s = \int v\,\mathrm{d}p \\ &= \frac{1}{m}\int_0^p p\,\mathrm{d}p \overset{\text{oder}}{=} m\int_0^v v\,\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{12.30}$$

Die kinetische Energie schrieb sich damit

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}. \tag{12.31}$$

Jetzt kann m nicht mehr als geschwindigkeitsunabhängig angesehen werden. Das Ergebnis (12.31) verliert dadurch seine Gültigkeit; das Arbeitsintegral muß mit $p = m(v)\cdot v$ neu ausgewertet werden.
Mit

$$p = \frac{m_0\cdot v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad\text{und}\quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v} = \frac{m_0}{\left[1-v^2/c^2\right]^{3/2}} \tag{12.32}$$

kann man p durch v substituieren und erhält

$$E_k = \int v\,dp = m_0 \cdot \int\limits_0^v \frac{v\,dv}{\left[1-(v/c)^2\right]^{3/2}} = m_0c^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - 1\right] \quad (12.33)$$

oder

kinetische Energie:	$E_k = mc^2 - m_0c^2$	
Gesamtenergie:	$E_{ges} = mc^2$	(12.34)
Ruhenergie:	$E_0 = m_0c^2$	
(Einstein-Beziehung)		

Diese Gleichungen konstatieren, daß – verbunden durch den Faktor c^2 – Masse und Energie gleichwertige physikalische Größen sind; Masse ist also eine Erscheinungsform der Energie, wenn man „Energie" als den übergeordneten Begriff akzeptiert. Ruht ein Körper in einem Bezugssystem, dann ist mit $m = m_0$ seine kinetische Energie $E_k = 0$. Wird er beschleunigt, dann vergrößert sich seine Energie von m_0c^2, seiner Ruhenergie, um die kinetische Energie E_k auf die Energie mc^2. Der zahlenmäßig riesige Faktor c^2 hat zur Folge, daß man die mit der Energiezufuhr verbundene Massenänderung üblicherweise nicht bemerkt: Die Zufuhr von 1 Joule Energie ist nämlich einer Massenänderung von ca. 10^{-17} kg äquivalent.

Die neue Schreibweise (12.37) der kinetischen Energie muß natürlich für $v \ll c$ in die gewohnte Form (12.35) übergehen, wenn sie eine sinnvolle Verallgemeinerung darstellen soll. In diesem Fall kann man die Wurzel entwickeln

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \ldots$$

und nach dem zweiten Glied abbrechen. Man kann dann schreiben

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots - 1\right] \approx \frac{1}{2}m_0v^2. \quad (12.35)$$

Der Zusammenhang zwischen Impuls und Energie ist im relativistischen Fall nicht mehr so einfach wie im klassischen (12.35). Mit der Definitionsgleichung $E_k = E_{ges} - E_0$ der kinetischen Energie kann man für *Energiedifferenzen* einfach schreiben

$$dE_{ges} = dE_k = v \cdot dp. \quad (12.36)$$

Diesmal ersetzt man nun v durch p. Mit

$$p = mv = \frac{E_{ges}}{c^2} \cdot v \quad \text{oder} \quad v = \frac{pc^2}{E_{ges}} \quad (12.37)$$

hat man nämlich

$$E_{ges}\,dE_{ges} = c^2 \cdot p\,dp, \quad (12.38)$$

oder integriert

$$\int_{E_0}^{E_{ges}} E_{ges}\,\mathrm{d}E_{ges} = c^2 \cdot \int_0^p p\,\mathrm{d}p, \tag{12.39}$$

$$E_{ges}^2 - E_0^2 = p^2c^2 \tag{12.40}$$

Man hat also für die

$$\boxed{\textit{Gesamtenergie} \qquad E_{ges} = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2}} \tag{12.41}$$

und für die

$$\boxed{\textit{kinetische Energie} \qquad E_k = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2} - E_0.} \tag{12.42}$$

Diese beiden Gleichungen gehen natürlich für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ in die bekannten Beziehungen über:

$$E_k \approx \frac{p^2}{2m_0} \quad \text{und} \quad E_{ges} \approx E_0 + \frac{p^2}{2m_0}.$$

Die Energie-Impuls-Abhängigkeiten sind in Fig. 12.15 dargestellt. Auf der Ordinate ist die Gesamtenergie E_{ges}, auf der Abszisse ist im wesentlichen der Impuls p aufgetragen. Bei $p = 0$ – der Körper ruht – verbleibt nur die Ruhenergie $E_0 = m_0c^2$. Zu dieser addiert sich bei kleinen Impulsen einfach die kinetische Energie: gestrichelte Parabel (klassische Mechanik). Die wirkliche $E_{ges}(p)$-Abhängigkeit (12.41) ist jedoch eine Hyperbel, die sich – mit m_0c^2 beginnend – bei hohen Impulsen asymptotisch der Ursprungsgeraden $E_{ges} = pc$ nähert. Diese Ursprungsgerade gilt exakt für Teilchen mit der Ruhmasse null, also z. B. für Photonen. Dies wird in der Quantenoptik noch einmal aufgegriffen werden.

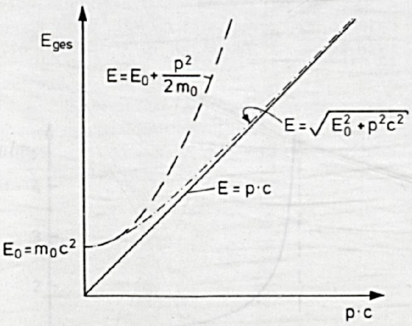

Fig. 12.15: Zusammenhang von Energie und Impuls für bewegte Körper. Im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten addiert sich zur Ruhenergie m_0c^2 einfach die kinetische Energie $p^2/2m$ (Parabel); für relativistische Teilchen mit einer Ruhmasse ergibt sich eine Hyperbel (Wurzelfunktion); für „Teilchen" mit verschwindender Ruhmasse, z. B. Photonen, die sich nur mit Lichtgeschwindigkeit bewegen können, gilt die Ursprungsgerade.

Natürlich stünde nun die Behandlung der Frage an, was mit Energie und Impuls passiert, wenn man von einem Bezugssystem in ein anderes überwechselt, das sich mit der Geschwindigkeit u relativ zum ersten bewegt. Das ist eine Rechenaufgabe zur Anwendung der Lorentz-Transformationen, die wir hier nicht durchführen wollen. Wir stellen nur fest: Energie und Impuls sind in der Relativistik genauso innig verwoben wie Raum und Zeit. In der Tat ergeben sich die Energie-Impuls-Transformationen einfach aus den Lorentz-Transformationen durch die Substitution $(p_x, p_y, p_z) \longleftrightarrow (x, y, z)$ und $t \longleftrightarrow E/c^2$. Sie seien hier der Vollständigkeit halber angegeben:

Energie-Impuls-Transformationen:

$$p'_x = \frac{p_x - \beta E/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad p_x = \frac{p'_x + \beta E/c}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$E' = \frac{E - u \cdot p_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad E = \frac{E' + u \cdot p'_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{12.43}$$

$$p'_y = p_y; \qquad p'_z = p_z$$

$$\beta = u/c$$

12.11 Zusammenfassung

Zeitdilatation	$\Delta t = \gamma \Delta t'$	$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = u/c$, u: Geschwindigkeit von S' relativ zu S
Längenkontraktion	$L = \frac{1}{\gamma} \cdot L'$	Bewegung parallel zur Maßstabsausdehnung.
Lorentz-Transformationen	$x' = \gamma(x - ut)$ $t' = \gamma(t - ux/c^2)$ $y' = y, \quad z' = z$	Bewegung $\parallel x, x'$, u: Geschwindigkeit von S' relativ zu S
Transformation von Geschwindigkeiten	$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - uv_x/c^2}$ $v'_y = \frac{1}{\gamma}\frac{v_y}{1 - uv_x/c^2}$ $v'_z = \frac{1}{\gamma}\frac{v_z}{1 - uv_x/c^2}$	$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ in S, $= (v'_x, v'_y, v'_z)$ in S'.
Masse	$m(v) = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$	m_0: Ruhmasse
Impuls	$p = m(v) \cdot v$	
Gesamtenergie	$E_{ges} = mc^2 = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2}$, $(mc^2)^2 = (m_0c^2)^2 + p^2c^2$	
kinetische Energie	$E_k = mc^2 - m_0c^2$	$E_0 = m_0c^2$: Ruhenergie.