Testvorbereitung: Exakte DGL

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 12.02.2007

1 Theoretische Grundlagen

Eine DGL der Form

$$f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + g(x,y)\,\mathrm{d}\,y = 0$$

ist dann eine exakte DGL, wenn gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\,f(x,y)}{y} = \frac{\mathrm{d}\,g(x,y)}{x}$$

Das ist die Integrabilitätsbedingung. Ist diese gegeben, kann man die Lösung der DGL aus folgender Formel errechnen:

$$(\int f(x,y)\,\mathrm{d}\,x)_y + c'(y) = g(x,y)$$

In der Folge integriert man dann nach y und hat einen Term $c(y) = \cdots + c$. Die allgemeine Lösung lautet:

$$\int f(x,y)\,\mathrm{d}\,x + [c(y) = \cdots + c]$$

2 Beispielangaben

2.1 Beispiel 1

Quelle: `http://www.risc.uni-linz.ac.at/people/wwindste/Teaching/LogikAlsArbeitssprache/SS04/Papers/0255913+0255621.pdf`, S.3.

$$(2x^3 + 3y)\,\mathrm{d}\,x + (3x + y - 1)\,\mathrm{d}\,y = 0$$

2.2 Beispiel 2

Quelle: `http://www.wurzelzieher.de/Exakte_Differentialgleichungen.aspx`, Beispiel 1.

$$4x^3y + (y^2 + x^4)y' = 0$$

2.3 Beispiel 3

Quelle: `http://www.wurzelzieher.de/Exakte_Differentialgleichungen.aspx`, Beispiel 2.

$$y' = \frac{x}{y}$$

2.4 Beispiel 4

Quelle: `http://www.wurzelzieher.de/Exakte_Differentialgleichungen.aspx`, Beispiel 3.

$$y + (x + \frac{2}{y})y' = 0$$

2.5 Beispiel 5

Quelle: Meyberg und Vachenauer, *Höhere Mathematik 2*, 4. Auflage, Springer, Berlin 2001, S. 30, Beispiel 1.a.

$$\frac{2x}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}y' = 0, \qquad y(1) = 1$$

2.6 Beispiel 6

Quelle: Meyberg und Vachenauer, *Höhere Mathematik 2*, 4. Auflage, Springer, Berlin 2001, S. 30, Beispiel 1.b; Übungsrunde 1, Beispiel 5.

$$\cos x \cdot \cos y - (\sin x \cdot \sin y + y^2)y' = 0$$

3 Lösungen

3.1 Beispiel 1

Quelle:

$$(2x^3 + 3y)\,\mathrm{d}\,x + (3x + y - 1)\,\mathrm{d}\,y = 0$$

Prüfen der Integrabilitätsbedingung:

$$\begin{aligned}
A = 2x^3 + 3y, &\qquad \frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}\,y} = 3 \\
B = 3x + y - 1, &\qquad \frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,x} = 3 \\
\frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}\,y} = \frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,x} &\qquad \surd
\end{aligned}$$

Berechnen nach der Formel in Einleitung:

$$\begin{gathered}
(\int (2x^3 + 3y)\,\mathrm{d}\,x)_y + c'(y) = 3x + y - 1 \\
\underbrace{(\frac{x^4}{2} + 3yx)_y}_{\blacklozenge} + c'(y))3y + y - 1 \\
3x + c'(y) = 3x + y - 1 \\
c'(y) = y - 1 \qquad | \int \\
c(y) = \frac{y^2}{2} - y + c
\end{gathered}$$

Allgemeine Lösung:

$$y = \underbrace{\frac{x^4}{2} + 3yx}_{\blacklozenge} + \mathbf{\frac{y^2}{2} - y + c}$$

3.2 Beispiel 2

$$4x^3y + (y^2 + x^4)y' = 0$$

Prüfen der Integrabilitätsbedingung:

$$A = 4x^3y, \qquad \frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}\,y} = 4x^3$$
$$B = y^2 + x^4, \qquad \frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,x} = 4x^3$$
$$\frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}\,y} = \frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,x} \qquad \surd$$

Berechnen nach der Formel in Einleitung:

$$(\int 4x^3y\,\mathrm{d}\,x)_y + c'(y) = y^2 + x^4$$
$$(\underbrace{x^4y}_{\blacklozenge})_y + c'(y) = y^2 + x^4$$
$$x^4 + c'(y) = y^2 + x^4$$
$$c'(y) = y^2 \qquad | \int$$
$$c(y) = \frac{y^3}{3} + c$$

Allgemeine Lösung:

$$\mathbf{y} = \underbrace{x^4y}_{\blacklozenge} + \frac{\mathbf{y^3}}{\mathbf{3}} + \mathbf{c}$$

3.3 Beispiel 3

$$y' = \frac{x}{y}$$

Umformen ($\cdot y$):

$$x + y'y = 0$$

Prüfen der Integrabilitätsbedingung:

$$\begin{aligned} A = x, \qquad & \frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}\,y} = 0 \\ B = y, \qquad & \frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,x} = 0 \\ \frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}\,y} = \frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,x} \qquad & \surd \end{aligned}$$

Berechnen nach der Formel in Einleitung:

$$\begin{aligned} (\int x\,\mathrm{d}\,x)_y + c'(y) = y \\ (\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\blacklozenge})_y + c'(y) = y \\ c'(y) = y \qquad \mid \int \\ c(y) = \frac{y^2}{2} + c \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\mathbf{y} = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\blacklozenge} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{2}} + \mathbf{c}$$

3.4 Beispiel 4

$$y + (x + \frac{2}{y})y' = 0$$

Prüfen der Integrabilitätsbedingung:

$$A = y, \qquad \frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}\,y} = 1$$
$$B = x + \frac{2}{y}, \qquad \frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,x} = 1$$
$$\frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}\,y} = \frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,x} \qquad \surd$$

Berechnen nach der Formel in Einleitung:

$$(\int y\,\mathrm{d}\,x)_y + c'(y) = x + \frac{2}{y}$$
$$(\underbrace{xy}_{\blacklozenge})_y + c'(y) = x + \frac{2}{y}$$
$$x + c'(y) = x + \frac{2}{y}$$
$$c'(y) = \frac{2}{y} \qquad | \int$$
$$c(y) = 2\ln y + c$$

Allgemeine Lösung:

$$\mathbf{y} = \underbrace{xy}_{\blacklozenge} + \mathbf{2}\ln\mathbf{y} + \mathbf{c}$$

3.5 Beispiel 5

$$\frac{2x}{y^3} + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} y' = 0, \qquad y(1) = 1$$

Prüfen der Integrabilitätsbedingung:

$$A = \frac{2x}{y^3}, \qquad \frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}\,y} = -\frac{6x}{y^4}$$

$$B = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}, \qquad \frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,x} = (\frac{y^2}{y^4} - \frac{3x^2}{y^4})_x = -\frac{6x}{y^4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,A}{\mathrm{d}\,y} = \frac{\mathrm{d}\,B}{\mathrm{d}\,x} \qquad \surd$$

Berechnen nach der Formel in Einleitung:

$$(\int \frac{2x}{y^3}\,\mathrm{d}\,x)_y + c'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

$$(\underbrace{\frac{x^2}{y^3}}_{\blacklozenge})_y + c'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$

$$-\frac{3x^2}{y^4} + c'(y) = \frac{y^2}{y^4} - \frac{3x^2}{y^4}$$

$$c'(y) = \frac{1}{y^2} \qquad | \int$$

$$c(y) = -\frac{1}{y} + c$$

Allgemeine Lösung:

$$\mathbf{y} = \underbrace{\frac{x^2}{y^3}}_{\blacklozenge} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}} + \mathbf{c}$$

Spezielle Lösung für Anfangsbedingung $y(1) = 1$:

$$1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = 1$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\frac{x^2}{y^3}}_{\blacklozenge} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}} + \mathbf{1}$$

3.6 Beispiel 6

$$\cos x \cdot \cos y - (\sin x \cdot \sin y + y^2)y' = 0$$

Prüfen der Integrabilitätsbedingung:

$$\cos x \cdot \cos y - (\sin \cdot \sin y + y^2) \cdot y' = 0$$
$$A(x,y) = \cos x \cdot \cos y \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \cos x \cdot (-\sin y)$$
$$B(x,y) = (-1) \cdot (\sin x \cdot \sin y + y^2) \qquad \frac{\partial B}{\partial x} = \cos x \cdot (-\sin y)$$
$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \qquad \Rightarrow \qquad \text{exakte DGL liegt vor}$$

Bestimmung einer Stammfunktion ($U_x = A$, $U_y = B$):

1.

$$U_x(x,y) = \int A(x,y)\,dx + c(y) = \int \cos x \cdot \cos y\,dx + c(y) = \sin x \cdot \cos y + c(y)$$

2.

$$U_y(x,y) = (\int A(x,y)\,dx)_y + c'(y) = B(x,y)$$
$$(\sin x \cdot \cos y)_y + c'(y) = -\sin x \cdot \sin y + y^2$$
$$-\sin x \cdot \sin y + c'(y) = -\sin x \cdot \sin y + y^2$$
$$c'(y) = y^2$$

3.

$$c(y)' = y^2 \mid \int \qquad \Rightarrow \qquad c(y) = \frac{y^3}{3} + c$$

Allgemeine Lösung somit:

$$\mathbf{U(x,y) = \sin x \cdot \cos y + c(y) = \sin x \cdot \cos y + \frac{y^3}{3} + c}$$

Lösung des AWPs:

$$y(0) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \sin 0 \cdot$$
$$cos 1 + \frac{1}{3} + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{1}{3}$$
$$\mathbf{\sin x \cdot \cos y + \frac{y^3}{3} - \frac{1}{3}}$$