Runde 10, Beispiel 64

LVA 118.181, Übungsrunde 10, 19.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.01.2007

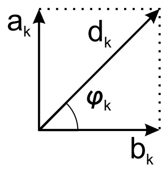
1 Angabe

Man berechne die Spektralkoeffzienten $c_k, 0 \leq k \leq N-1$ für die diskrete Rechteckfunktion $\vec{y} = (y_0, \ldots, y_{N-1})^T$, wobei $N = 2M$ als gerade vorausgestzt wird, mit

$$y_j = \begin{cases} 1, & 0 \leq j \leq \frac{N}{2} - 1 \\ 0, & \frac{N}{2} \leq j \leq N-1 \end{cases}$$

2 Theoretische Grundlagen: Spektraldarstellung der Fourier-Reihe

$$f(x) = s(x) = \frac{a_0}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cdot \sin(k \cdot x + \varphi_k)$$



mit der gemeinsamen Fourier-Amplitude

$$d_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} \; \forall \, b_k > 0$$

Die **komplexe Form der Fourier-Reihe** lautet:

$$f(x) = s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j \cdot k \cdot x}, \qquad T = 2 \cdot \pi$$

Mit dem **Spektrum** der Funktion $f(x)$ (komplexe Fourier-Koeffizienten bzw. **Spektralkoeffizienten** c_k)

$$c_k = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(x) \cdot e^{-j \cdot k \cdot x} \, \mathrm{d}\, x = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & \text{wenn } k = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (a_k - j \cdot b_k), & \text{wenn } k > 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (a_{-k} + j \cdot b_{-k}), & \text{wenn } k < 0 \end{cases}$$

Beziehungen:

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = k \cdot (c_k - c_{-k})$$

Zeitfunktion (Elektrotechnik): $x := \omega \cdot t$

- Bezugs- (Grund-) Kreisfrequenz: $\omega_0 = \frac{2\dot{\pi}}{T}$
- Kreisfrequenz: $\omega_k = k \cdot \omega_0$
- Periodemdauer: T
- (Linien-) Spektrum von $f(x)$: $2 \cdot \pi \cdot c_k$ bzw. $T \cdot c_k$
- Frequenzabstand zweier Spektrallinien: $\triangle\omega_0 = \frac{2\cdot\pi}{T}$

$$f(t) = s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\cdot k\cdot\omega_0\cdot t}$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot r^{-j\cdot k\cdot\omega_0\cdot t}\,\mathrm{d}\,t$$

3 Lösung des Beispiels

3.1 Lösungsvorschlag aus dem Forun

Einsetzen in die Formel:

$$c_k = \frac{1}{2M} \sum_{j=0}^{M-1} y_j \cdot e^{-\frac{\pi*i}{M}\cdot k\cdot j}$$

Alle y_j sind 1. Es gilt: $N = 2M$ und daher gilt: $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}} = e^{\frac{2\pi i}{2M}} = e^{\frac{\pi i}{M}}$

$$c_k = \frac{1}{2M} \sum_{j=0}^{M-1} 1 \cdot\ e^{-\frac{\pi*i}{M}\cdot k\cdot j}$$

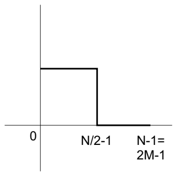
Die Summe kann man als geometrische Reihe anschreiben:

$$\frac{1}{2M} \cdot \frac{e^{-\frac{\pi ikM}{M}} - 1}{e^{-\frac{\pi ik}{M}} - 1} = \frac{1}{2M} \cdot \frac{e^{-\pi ikM} - 1}{e^{-\frac{\pi ik}{M}} - 1}$$

Weitere Vereinfachung:

$$c_k = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ -\frac{1}{M(e^{-\frac{\pi ik}{M}})-1} & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

3.2 Lösung aus der UE



$$c_k = \frac{1}{2M} \sum_{j=0}^{M-1} 1 \cdot e^{-kj\frac{\pi i}{M}}$$

$$q = e^{kj\frac{\pi i}{M}}, \qquad s_n = \sum_{l=0}^{n} a_0 \cdot q^l = \frac{1}{2M}(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}) =$$

$$\frac{1}{2M}(\frac{e^{-kj\pi i}-1}{e^{-kj\frac{\pi i}{M}}-1}) \qquad \text{Fortsetzung wie oben}$$

Runde 10, Beispiel 65

LVA 118.181, Übungsrunde 10, 19.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.01.2007

1 Angabe

Man zeige die folgenden Verschiebungsformeln einer diskreten periodischen Funktion $\vec{y} \in \mathbb{C}^N$:

- Verschiebung im Zeitbereich: $(y_{k+n})_k \overset{DFT}{\overbrace{\longrightarrow}} (w^{kn} c_k)_k$
- Verschiebung im Frequenzbereich: $(w^{kn} c_k)_k \overset{DFT}{\overbrace{\longrightarrow}} (c_{k-n})_k$

2 Lösung des Beispiels

2.1 Verschiebung im Zeitbereich

Zu zeigen ist: Verschiebung im Zeitbereich: $(y_{k+n})_k \overset{DFT}{\overbrace{\longrightarrow}} (w^{kn} c_k)_k$

$$\sum_{j=0}^{N-1} y_{y+n} e^{-\frac{2\pi i}{N} kj} \qquad \Rightarrow \text{Indexshift}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=n}^{N-1+n} y_j e^{-\frac{2\pi i}{N} k(j-n)} =$$

$$y_j e^{-\frac{2\pi i}{N} kj} e^{\frac{2\pi i}{N} kn} =$$

$$e^{\frac{2\pi i}{N} kn} \sum_{j=n}^{N-1+n} \underbrace{y_j e^{-\frac{2\pi i}{N} kj}}_{c_k} = \omega^{\mathbf{kn}} \mathbf{c_k}$$

2.2 Verschiebung im Frequenzbereich

Zu zeigen ist: Verschiebung im Frequenzbereich: $(w^{kn}c_k)_k \overset{DFT}{\overbrace{\longrightarrow}} (c_{k-n})_k$

$$\frac{\omega kn}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_k\omega^{-kj} \qquad \Rightarrow \text{Indexshift}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega kn}{N}\sum_{j=-n}^{N-1-n} y_{k-n}\omega^{-k(j+n)} =$$

$$\frac{\omega kn}{N}\sum_{j=-n}^{N-1-n} y_{k-n}\omega^{-kj)}\omega^{-kn)} =$$

$$\omega{-}kn\frac{\omega kn}{N}\sum_{j=-n}^{N-1-n} y_{k-n} = \frac{1}{N}c_{k-n}\omega^{-kj)}$$

Runde 10, Beispiel 66

LVA 118.181, Übungsrunde 10, 19.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.01.2007

1 Angabe

Gesucht ist das trigonometrische Polynom

$$f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$$

von minimalem Grad n, welches im Intervall $[0; 2\pi]$ an den 3 Stützstellen $t_j = \frac{2\pi}{3} j$, $j = 0, 1, 2$ die vorgegebenen Funktionswerte $y(t_j)$ annimmt:

$$y(0) = 0, \qquad y(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad y(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Wie lautet das trigonometrische Polynom in der Sinus-Cosinus-Form.

2 Trigonometrische Interprolation durch die DFT

Gegeben sind Werte $(y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}) = \vec{y}$.
Gesucht ist ein trigonometrisches Polynom von kleinstem Grad

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot e^{i \cdot k \cdot t},$$

sodass dieses an den Stützstellen $\frac{2\pi}{N} \cdot j$ genau die Werte y_j annimmt.
Falls N ungerade ist, so ist das trigonometrische Polynom eindeutig bestimmt und es gilt dann $N = 2n + 1$.
Einsetzen der Werte an den Stützstellen liefert N Gleichungen:

$$\mathbf{y_j = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot \omega^{k \cdot j}}, \qquad \mathbf{0 \leq j \leq 2n}, \omega = \mathbf{e^{\frac{2\pi i}{N}}}$$

$$y_j = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \cdot \omega^{(k-n) \cdot j} = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \cdot \omega^{kj} \cdot \omega^{-nj}$$

$$\Rightarrow \omega^{nj} \cdot y_j = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \cdot \omega^{kj}, \qquad 0 \leq j \leq 2n = N - 2$$

$$\Rightarrow (\omega^{nj} \cdot y_j)_{j \in \mathbb{Z}} = \mathrm{IDFT}(c_{k-n})$$

$$\Rightarrow c_{k-n} = \mathrm{IDFT}((\omega^{nj} \cdot y_j)_{j \in \mathbb{Z}})$$

Liefert schließlich $(c_0 . c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n, c_{n+1}, \ldots, c_{2n}) = \mathrm{DFT}(y_0, y_1, \ldots, y_{2n})$.

3 Lösung des Beispiels

In unserem Fall ist $N = 3$, also ungerade. Es sind daher $2n + 1$ Koeffizienten ($n = 1$) zu bestimmen mit $k = 0, 1$.
Wir müssen für die Anwendung der Formel

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)$$

berechnen:

- a_0,$k = 0$:

$$a_0 := c_0 + c_{-0} = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j \cos\frac{2\pi kj}{N} = 0$$

- a_1,$k = 1$:

$$a_1 := c_1 + c_{-1} = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j \cos\frac{2\pi kj}{N} = 0$$

- b_0,$k = 0$:

$$b_0 := i(c_0 - c_{-0}) = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j \sin\frac{2\pi kj}{N} = 1$$

- b_1,$k = 1$:

$$b_1 := i(c_1 - c_{-1}) = \frac{2}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j \sin\frac{2\pi kj}{N} = 0$$

Ergibt somit $\mathbf{f}(\mathbf{t}) = \sin(\mathbf{t})$.

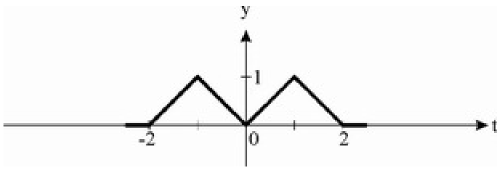
Runde 10, Beispiel 67

LVA 118.181, Übungsrunde 10, 19.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.01.2007

1 Angabe

Unter Berücksichtigung von Beispiel 63 berechne man die Fouriertransformierte für die nachfolgend skizzierte Zeitfunktion $y = f(t)$:



2 Lösung des Beispiels

$$f(t) = \begin{cases} |t|, & -1 \leq t \leq 1 \\ |2-t|, & 1 < t \leq 2, -2 \leq t \leq -1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wichtige Integrale sind:

$$\int (x \cdot \cos(cx)) \, \mathrm{d}\, x = \frac{\cos(cx)}{c^2} + \frac{x \cdot \sin(cx)}{c}$$

$$\int \cos(cx) \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{c} \cdot \sin cx$$

Berechnung von $F(\omega)$:

$$2[\int_0^1 t \cos(\omega t) \, \mathrm{d}\, t + [\int_1^2 (-t+2) \cos(\omega t) \, \mathrm{d}\, t] =$$

$$2[t \frac{\sin(\omega t)}{\omega}|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \, \mathrm{d}\, t + (-t+2) \frac{\sin(\omega t)}{\omega}|_1^2 + \int_1^2 \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \, \mathrm{d}\, t] =$$

$$2[2 \frac{\cos \omega}{\omega^2} - \frac{\cos(2\omega)}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\omega^2}]$$

Runde 10, Beispiel 68

LVA 118.181, Übungsrunde 10, 19.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.01.2007

1 Angabe

Unter der generellen Voraussetzung, dass $f(t)$ absolut integrierbar ist, zeige man folgende Rechenregeln für die Fourier-Transformation ($\mathcal{F}(\omega)$ bezeichne die Fourier-Transformierte von $f(t)$).
(a) Streckung: Für $c \neq 0$:

$$\mathcal{F}\{f(ct)\} = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}(\frac{\omega}{c})$$

(b) Differentiation im Zeitbereich: Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar und ist weiters $f'(t)$ Fourier-transformierbar, so gilt:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$$

2 Lösung des Beispiels

2.1 Streckung

Zu zeigen ist die Streckung: Für $c \neq 0$:

$$\mathcal{F}\{f(ct)\} = \frac{1}{|c|}\mathcal{F}(\frac{\omega}{c})$$

Ein reeller Faktor c dehnt oder staucht die Funktion:

$$\mathcal{F}\{f(ct)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(ct)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\,t \underbrace{=}_{\text{Subst. } \tau = ct, \frac{\mathrm{d}\,\tau}{\mathrm{d}\,t}, \mathrm{d}\,t = \frac{\mathrm{d}\,\tau}{c}} \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\frac{\omega\tau}{c}}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{c}F(\frac{\omega}{c})$$

Für beiebige reelle $c \neq 0$ gilt nun die in der Angabe angegebene Transformation.
Sonderfall: $c = -1$. Daraus folgt, dass $f(-t)$ zu $F(-\omega)$ transformiert wird.

2.2 Differentiation

Zu zeigen ist die Differentiation im Zeitbereich: Ist $f(t)$ stetig und stückweise differenzierbar und ist weiters $f'(t)$ Fourier-transformierbar, so gilt:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei stetig und stückweise stetig differenzierbar und f und die Ableitung f' seien absolut integrierbar. Dann gilt, dass $f'(t)$ zu $(i\omega)\hat{f}(\omega)$ transformiert wird.

Beweis: Mit partieller Integration erhält man

$$\int_a^b f'(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\,t = [f(t)e^{-i\omega t}|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)(-i\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\,t$$

Da $f(t)$ absolut integrierbar iat, gilt:

$$\lim_{a\to-\infty} f(t)e^{-i\omega t} = \lim_{b\to\infty} f(t)e^{-i\omega t} = 0$$

und daher

$$\mathcal{F}\{f'(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(i\omega)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\,t =$$
$$(i\omega)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}\,t = (i\omega)\mathcal{F}\{f(\omega)\}$$

Anwendung: $\mathcal{F}$-Transformation von Differentialgleichungen.

Runde 10, Beispiel 69

LVA 118.181, Übungsrunde 10, 19.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.01.2007

1 Angabe

Man löse mit Hilfe der Fourier-Transformation folgende Integralgleichung vom Fredholm-Typ für $x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|} x(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau = \frac{1}{1+t^2}$$

2 Lösung von Intgralgleichungen mit $\mathcal{F}$-Transformation

Die im Gegensatz zur $\mathcal{L}$-Transformation anmdere Form des Faltungsproduktes ermöglicht die Lösung von Integralen vom Fredholm-Typ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau - \lambda x(t) = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Wenn alle Funktionen absolut integrierbar sind, lautet die Gleichung für die zugehörigen Spektralfunktionen:

$$K(\omega)X(\omega) - \lambda X(\omega) = F(\omega)$$

Wenn $x(t)$ dem Umkehr und Eindeutigkeitssatz genügt, erhält man die Lösung $X(\omega)$ dieser Gleichung mit der inversen $\mathcal{F}$-Transformation als Lösung der Integralgleichung

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{K(\omega)-\lambda} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega$$

3 Lösung des Beispiels

Zunächst berechnen wir aus $k(t) = e^{-|t|}$

$$\mathcal{F}\{e^{-|t|} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

(Basierend auf der folgenden Formel $\mathcal{F}\{e^{-at}\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$).
$x(r)$ berechnen wir nun durch das Einsetzen in die Formel:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{\frac{2}{1+\omega^2}} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)(1-\omega^2)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega$$

ω^2 bedeutet, dass eine zweite Ableitung vorliegt ($f(t)$ muss zweimal differenzietbar sein) und es gilt daher fortgesetzt:

$$\frac{1}{2}f(r) - \frac{1}{2}f''(t)$$

Somit müssen wir die zweite Ableitung von $f(t)$ bilden:

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$
$$f(t)' = -\frac{2*t}{(1+t^2)^2}$$
$$f(t)'' = \frac{8t^2}{(1+t^2)^3} - \frac{2}{(1+t^2)^2}$$

Runde 10, Beispiel 70

LVA 118.181, Übungsrunde 10, 19.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.01.2007

1 Angabe

Unter Verwendung des Fourier-Integraltheorems und der in der Vorlesung hergeleiteten Transformierten des Rechteckimpulses zeige man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}\,\omega = \begin{cases} \pi, & \forall\,|x| < 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \forall\,|x| = 1 \\ 0, & \forall\,|x| > 1 \end{cases}$$

Was ergibt das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\,\omega$?

1.1 Theoretische Grundlagen: Absolute Integrierbarkeit, Fourier-Integraltheorem

Eine Funktion $f(t)$ heisst **absolut integrierbar**, wenn sie in jedem endlichen Intervall stückweise stetig ist und wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}\,t < \infty$$

Satz: Falls eine Funktion $f(t)$ absolut integrierbar ist, dann existiert die $\mathcal{F}$-transformierte $F(\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$; $F(\omega)$ ist stetig und beschränkt.
Satz: **Fourier-Integraltheorem**: Ist die Funktion $f(t)$ absolut integrierbar und ist $f(t)$ auf jedem endlichen Intervall stückweise stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\frac{f(t)^{+} f(t)^{-}}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega$$

Falls $f(t)$ stetig ist gilt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(-\omega)\}$$

2 Lösung des Beispiels

2.1 Als der UE-Stunde Kuba

Wir betrachten den Rechteckimpuls:

$$\sqcap := \begin{cases} 1, & |t| \le 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Wir berechnen nun die Spektralfunktion:

$$\mathcal{F}\{\sqcap(t)\} = \int_{-1}^{1} e^{-\omega t} \,\mathrm{d}\, t = -\frac{1}{i\omega}(e^{-i\omega} - e^{i\omega}) =$$

$$\frac{1}{\omega}(\cos(\omega) - i\sin(\omega) - \cos(\omega) - i\sin(\omega)) = \begin{cases} 2\frac{\sin\omega}{\omega}, & t \neq 0 \\ 2, & t = 0 \end{cases}$$

Was ergibt das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} \,\mathrm{d}\,\omega$?

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\omega}{\omega} e^{i\omega t} \,\mathrm{d}\,\omega = \cdots = \frac{1}{pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} \cos(\omega t) \,\mathrm{d}\,\omega$$

Es gilt:

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{\sin(a+b) - sin(a-b)}{2}$$

Und somit kann man das Ergebnis weiter vereinfachen:

$$\frac{1}{pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(t+1)}{\omega} \,\mathrm{d}\,\omega + \frac{1}{pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(1-t)}{\omega} \,\mathrm{d}\,\omega$$

Mit einfacher Endrechnung (nicht ausgeführt).

2.2 Aus der UE-Stunde Panholzer

Substituiere $\omega = -v$: :: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(-v)}{-v} e^{-i(-v)x} \,\mathrm{d}(-v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin v}{v} e^{ivx} \,\mathrm{d}\, v$ ($\blacklozenge$)
Aus der Übung ist bekannt:

$$\mathcal{F}\{\sqcap(t)\} = 2\frac{\sin\omega}{\omega}$$

Wobei

$$\sqcap(t) = \begin{cases} 1, & \forall\, |x| \leq 1 \\ 0, & \forall\, |x| > 1 \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\frac{\sin\omega}{\omega}\} = \frac{1}{2} \sqcap (t)$$

Man betrachte das Fourier-Integraltheorem:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{f(t)\} e^{i\omega x} \,\mathrm{d}\,\omega = \frac{f(t^{+}) + f(t^{-})}{2}$$

Damit können wir ($\blacklozenge$) weiter umformen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin v}{v} e^{ivx} \,\mathrm{d}\, v = 2\pi \frac{\frac{1}{2} \sqcap (t^{+}) + \frac{1}{2} \sqcap (t^{-})}{2} = \frac{\pi}{2}(\sqcap(t^{+}) + \sqcap(t^{-}))$$

Da $\sqcap(t) = 1$ für $|t| \leq 1$ und $\sqcap(t) = 0$ für $|t| > 0$ ist, kann man sich leicht davon überzeugen, daß das der gesuchten Funktion entspricht:

- $t \in (-1, 1) : \frac{\pi}{2}(\sqcap(t^+) + \sqcap(t^-)) = \frac{\pi}{2}(1+1) = \pi$
- $t \in \{-1; 1\} : \frac{\pi}{2}(\sqcap(t^+) + \sqcap(t^-)) = \frac{\pi}{2}(0+1) = \frac{\pi}{2}$
- $t \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) : \frac{\pi}{2}(\sqcap(t^+) + \sqcap(t^-)) = \frac{\pi}{2}(0+0) = \frac{\pi}{2}$