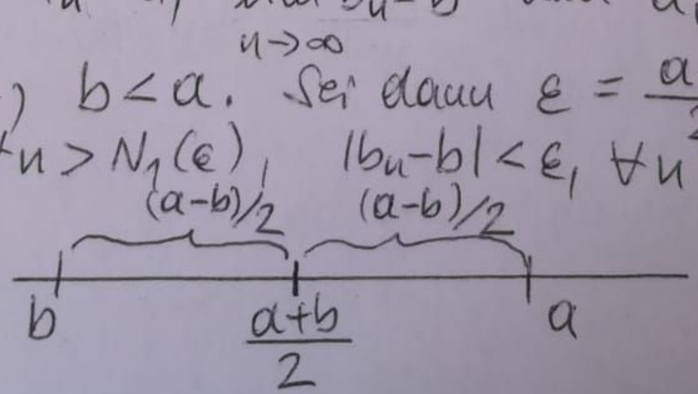
1. UE Analysis f. INF und WINF

$\boxed{4}$ $a_n = (-1)^n + \cos\frac{n\pi}{2}$, $n \geq 0$, hat die Periode 4 (d.h. $a_{n+4} = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$), da $(-1)^n$ die Periode 2 hat, $\cos x$ die Periode 2π und $\frac{(n+4)\pi}{2} = \frac{n\pi}{2} + 2\pi$.
Wir berechnen also $a_0 = 1 + \cos 0 = 1+1 = 2$, $a_1 = -1 + \cos\frac{\pi}{2} = -1+0 = -1$, $a_2 = 1 + \cos\pi = 1+(-1) = 0$, $a_3 = -1 + \cos\frac{3\pi}{2} = -1+0 = -1$ und haben dann:
$a_{4k} = 2$, $a_{4k+1} = -1$, $a_{4k+2} = 0$, $a_{4k+3} = -1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Also gibt es die 3 Häufungspunkte $-1, 0, 2$.

$\boxed{9}$ $|a_n - 0| = |a_n| = \frac{|\sin n + \cos n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{|\sin n| + |\cos n|}{\sqrt{n}} \leq$
$\leq \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \frac{2}{\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \frac{4}{\varepsilon^2} < n$, also ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $N(\varepsilon) = \frac{4}{\varepsilon^2}$ kann gewählt werden.

$\boxed{16}$ Nach Voraussetzung gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)$, so dass: $|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall n > N_1(\varepsilon)$ und $|b_n - b| < \varepsilon$, $\forall n > N_2(\varepsilon)$.
Wir haben nun: $|c_n - c| = |3a_n - b_n - (3a-b)| \leq$
$\leq |3(a_n - a)| + |b - b_n| = 3 \cdot |a_n - a| + |b_n - b| <$
$3 \cdot \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, falls $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{6}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Also kann $N(\varepsilon) = \max\left(N_1\left(\frac{\varepsilon}{6}\right), N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ gewählt werden.

$\boxed{19}$ Sei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und $a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Angenommen, $b < a$. Sei dann $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ und $|a_n - a| < \varepsilon$, $\forall n > N_1(\varepsilon)$, $|b_n - b| < \varepsilon$, $\forall n > N_2(\varepsilon)$



Wir haben dann: $b_n < \frac{a+b}{2}$, $\forall n > N_2(\varepsilon)$, und $\frac{a+b}{2} < a_n$, $\forall n > N_1(\varepsilon)$. Also ist

$$b_n < \frac{a+b}{2} < a_n, \quad \forall n > \max(N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)). \quad \lightning$$

Somit muss $a \leq b$ gelten.

$\boxed{53}$ Induktionsanfang: $n=0$: $a_0 = 0 = 1-1 = 1-\frac{1}{0!}$

$n=1$: $a_1 = a_0 + \frac{0}{1!} = 0+0 = 0 = 1-\frac{1}{1!}$

Induktionsschluss $n \to n+1$: $a_{n+1} = a_n + \frac{n}{(n+1)!} =$

$$= 1 - \frac{1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{n+1}{(n+1)!} + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

Wegen $0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$, und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$, also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

$\boxed{57}$ $a_n = \frac{n^3+1}{n-1} > \frac{n^3}{n} = n^2$, $\forall n \geq 2$, und für $A > 0$ gilt $n^2 > A \iff n > \sqrt{A}$, also kann $N(A) = \sqrt{A}$ gewählt werden.

Somit ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Nachtrag zu $\boxed{19}$: „$a \leq b$" lässt sich nicht durch „$a < b$" ersetzen. Gegenbeispiel:

$a_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$a_n < b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

aber $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.