14. Man bestimme die lineare und die quadratische Approximation der Funktion $f(x,y)=x^2(y-1)+xe^{y^2}$ im Entwicklungspunkt (1,0).

$$f(x,y)=x^2(y-1)+xe^{y^2}=x^2y-x^2+xe^{y^2}=1^2\cdot 0-1^2+1\cdot e^{0^2}=-1+1=0$$
$$f_x=2x\cdot y-2x+1\cdot e^{y^2}=2\cdot 1\cdot 0-2\cdot 1+1\cdot e^{0^2}=-2+1=-1$$
$$f_y=x^2\cdot 1+x\cdot e^{y^2}\cdot 2y=1^2\cdot 1+1\cdot e^{y^0}\cdot 2\cdot 0=1+0=1$$
$$f_{xx}=2y-2=2\cdot 0-2=-2$$
$$f_{yx}=f_{xy}=2x+1\cdot e^{y^2}\cdot 2y=2\cdot 1+1\cdot e^{0^2}\cdot 2\cdot 0=2+0=2$$
$$f_{yy}=x\cdot\left(e^{y^2}\cdot 2y\cdot 2y+e^{y^2}\cdot 2\right)=1\cdot\left(e^{0^2}\cdot 2\cdot 0\cdot 2\cdot 0+e^{0^2}\cdot 2\right)=1\cdot 2=2$$
$$h=x-x_0=x-1$$
$$k=y-y_0=y$$

$$F(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\cdot h+f_y(x_0,y_0)\cdot k+\frac{1}{2!}\left(f_{xx}\cdot h^2+2\cdot f_{xy}\cdot h\cdot k+f_{yy}\cdot k^2\right)+\ldots$$

lineare Approximation (Ebene) + quadratische Approximation (Ellipsoid, Paraboloid)

$$f(x+y)=0+(-1)\cdot(x-1)+1\cdot y+\frac{1}{2!}\left((-2)\cdot(x-1)^2+2\cdot 2\cdot(x-1)\cdot y+2\cdot y^2\right)$$
$$f(x+y)=-x+1+y+\frac{1}{2}\left((-2)\cdot\left(x^2-2x+1\right)+4y\cdot(x-1)+2y^2\right)$$
$$f(x+y)=-x+1+y+\frac{1}{2}\left(-2x^2+4x-2+4xy-4y+2y^2\right)$$
$$f(x+y)=-x+1+y+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(-x^2+2x-1+2xy-2y+y^2\right)$$
$$f(x+y)=-x+1+y-x^2+2x-1+2xy-2y+y^2=-x^2+x+2xy-y+y^2$$

linearer Anteil: $f=-x+1+y$

quadratischer Anteil: $f=-x^2+2x-1+2xy-2y+y^2$