Universität Wien
Fakultät für Informatik
Univ.-Prof. Wilfried Gansterer und Dr. Martin Schirneck

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

SS 2023

Übungsblatt 4: Vektorräume

Literatur: Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 6

Aufgabe 4-1 5P

Führe die Polynomdivision für die beiden Polynome $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 9x - 3$ und $g(x) = 2x + 1$ aus. Dh dividiere $f(x)$ durch $g(x)$.

Aufgabe 4-2 6P

Es seien H und K zwei Unterräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Wir definieren $H + K$ wie folgt:

$H + K = \{w | w = u + v, u \in H, v \in K\}$.

Man beweise, dass $H + K$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 4-3 6P

Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\{u_1, u_2\}$ und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung definiert als:

$f(u_1) = -3u_1 + 2u_2$

$f(u_2) = 5u_1 - u_2$

Man berechne $f(x_1u_1 + x_2u_2)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4-4 8P

Betrachten Sie die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ (d.h., die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ über dem Körper $\mathbb{R}$). Geben Sie eine Basis $B = \{b_1, b_2\}$ von $\mathbb{R}^2$ und eine Basis $B' = \{b'_1, b'_2\}$ von $\mathbb{C}$ an. Geben Sie einen Isomorphismus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ zwischen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ an, für den gilt: $f(b_1) = b'_1$ und $f(b_2) = b'_2$. Beweisen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4-5 9P

Gegeben sind die folgenden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bildet die Menge u, v, w eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Sei $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 10 \end{pmatrix}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^3$. Für welche Werte von a und $b \in \mathbb{R}$ kann x als Linearkombination von u, v und w dargestellt werden?

c) Stellen sie den Vektor $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von u, v und w dar.

Aufgabe 4-6 9P

Die Vektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_i \in \mathbb{R}^3$ seien linear unabhängig.

(a) Ist $\{3v_1, 3v_2, 3v_3\}$ linear unabhängig?

(b) Ist $\{v_1, 2v_2, 3v_3\}$ linear unabhängig?

(c) Können wir etwas über $\{av_1, bv_2, cv_3\}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ bzgl. linear unabhängig sagen?

Aufgabe 4-7 10P

Sei $f : X \to Y$ eine lineare Abbildung von zwei K-Vektorräumen X und Y. Man zeige: ist f injektiv, so ist das Bild einer linear unabhängigen Teilmenge $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ von X auch linear unabhängig.