Universität Wien
Fakultät für Informatik
Univ.-Prof. Wilfried Gansterer und Dr. Martin Schirneck

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

WS 2023

Übungsblatt 6: Matrizen und Lineare Algebra II und III und Graphentheorie I

Literatur: Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 8, 9

Aufgabe 6-1 5P

Sei $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ eine 8-elementige Menge. Wir betrachten den ungerichteten Graph $G = (V, E)$, wobei

$$E = \{\{a, d\}, \{a, e\}, \{b, d\}, \{c, f\}, \{c, g\}, \{d, e\}, \{f, h\}, \{g, h\}\}.$$

(a) Stellen Sie für den Graph G die Adjazenzmatrix auf.

(b) Zeichnen Sie eine graphische Darstellung von G.

Aufgabe 6-2 7P

Beweisen Sie folgende Aussage über Graphen:
Jeder Baum mit mindestens zwei Knoten hat ein Blatt, d.h. einen Knoten vom Grad 1.

Aufgabe 6-3 7P

Gegeben ist folgende 2×2-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass A genau dann über dem Körper $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist wenn $\alpha \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Tipp: Berechne das charakteristische Polynom als Funktion von α.

Aufgabe 6-4 8P

Für welche Werte von a ist die Matrix J singulär (nicht invertierbar)?

$$J = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ a & a & 4 \\ a & a & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6-5 8P

Wir definieren die Relation $\sim$ auf der Menge der Knoten eines ungerichteten Graphen $G = (V, E) : v \sim w$, wenn es eine Kantenfolge gibt, die von v zu w führt.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Was sind die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation? Welche Äquivalenzklassen hat der Graph aus der Aufgabe 6-1?

Aufgabe 6-6 10P

Seien b, c, e reelle Zahlen und E die folgende Matrix:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie folgende Aufgaben:

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix E und leiten Sie daraus die Eigenwerte von E ab.

(b) Setzen Sie $b = 9$, $c = -1$ und $e = 1909$. Welche Eigenwerte hat E in diesem Fall?

(c) Unter welchen Bedingungen an b, c, e hat E komplexe Eigenwerte?

(d) Setzen Sie $b = 16$, $c = -1$, $e = 1909$. Was ist der Eigenvektor zum Eigenwert $-4i$?

Aufgabe 6-7 10P

Sei $T = (V, E)$ ein Wurzelbaum mit einer Wurzel $v \in V$. Die *Höhe* eines Baumes ist die größte Distanz zwischen der Wurzel und einem Blatt des Baumes plus Eins.

Ein *vollständiger* Trinärbaum ist ein Wurzelbaum mit mindestens vier Knoten, in dem

(a) jeder Knoten, der kein Blatt ist, genau drei unmittelbare Nachfolger hat,

(b) alle Pfade von der Wurzel zu Blättern die gleiche Länge haben.

Zeigen Sie, dass ein vollständiger Trinärbaum der Höhe h, 3^{h-1} Blätter hat.

Hinweis: Vollständige Induktion ist für diese Aufgabe ein guter Ansatz.