Universität Wien
Fakultät für Informatik
Univ.-Prof. Wilfried Gansterer und Dr. Martin Schirneck

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

SS 2023

Übungsblatt 7: Matrizen und Lineare Algebra III, Graphentheorie II

Literatur: Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 6 und 7

Aufgabe 7-1 6P

Gegeben ist der ungerichtete Graph G:

$$G(V,E)$$

$$\begin{aligned} V = & \quad \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\} \\ E = & \quad \{\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie mittels der Summe von Potenzen der Adjazenzmatrix, dass G nicht zusammenhängend ist.

Aufgabe 7-2 7P

Gegeben ist die folgende Adjazenzmatrix eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \{x_1, x_2, \dots, x_9\}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Versuchen Sie, ein überschneidungsfreies Bild von G zu zeichnen.

(b) Geben Sie alle Wege von x_1 nach x_2 an, die Länge höchstens 3 haben.

(c) Ist G zusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 7-3 7P

Gegeben sei die allgemeine 2×2-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Leiten Sie eine allgemeine Formel für die Determinate von A mit einer beliebigen Technik außer der Subtraktion von Haupt- und Nebenachse her. Beweisen Sie also insbesondere, dass die aufgestellte Formel korrekt ist.

Aufgabe 7-4 7P

Gegeben ist folgende Matrix:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D hat die Eigenwerte 0, 1, $(1 + i\sqrt{35})/2$ und $(1 - i\sqrt{35})/2$. Berechnen Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Eigenvektoren zum Eigenwert 1.

Aufgabe 7-5 7P

Bestimmung der Basistransformationsmatrix:

Es seien die Basen $B : b_1 = (1 \;\; 2)^T$ und $b_2 = (2 \;\; 1)^T$ und $A : a_1 = (2 \;\; 2)^T, a_2 = (1 \;\; 0)^T$ gegeben. Beschreiben Sie die Transformationsmatrix T von der Basis B in die Basis A.

Aufgabe 7-6 8P

Sei $K_4 = (V, E)$ der *vollständiger* Graph mit 4 Knoten und 6 Kanten und A_{K_4} die Adjazenzmatrix von K_4. Betrachten Sie die Matrix $A_{K_4}^3$ (d.h. die dritte Potenz von A_{K_4}). Dann ist der (i, j)-Eintrag von $A_{K_4}^3$ gleich der Anzahl der verschiedenen Kantenfolgen mit Startknoten i und Endknoten j, welche aus 3 Kanten bestehen.

Bestimmen Sie im Graph K_4 mit Hilfe von $A_{K_4}^3$ die Anzahl der Dreiecke (d.h., die Anzahl der Kreise mit der Länge 3).

Aufgabe 7-7 8P

Sei $G = (V, E)$ ein schlichter Graph und $K = \binom{V}{2}$ die zwei-elementigen Teilmengen von V. Der *Komplementgraph* $G^c = (V, K \setminus E)$ von G hat eine Kante zwischen allen Paaren von Knoten, die nicht in G mit einer Kante verbunden sind. Zeigen Sie die folgende Behauptung:

- Der Komplementgraph G^c ist zusammenhängend, falls G nicht zusammenhängend ist.