Universität Wien
Fakultät für Informatik
Univ.-Prof. Wilfried Gansterer und Dr. Martin Schirneck

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

SS 2023

Übungsblatt 3: Algebraische Strukturen II und Vektorräume I

Literatur: Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 4, 5

Aufgabe 3-1 5P

Es sei $(G, *)$ eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Kürzungsregeln:

(a) Für alle $x, p, q \in G$ gilt $x * p = x * q$ wenn und nur wenn $p = q$.

(b) Für alle $x, p, q \in G$ gilt $p * x = q * x$ wenn und nur wenn $p = q$.

Aufgabe 3-2 6P

Zeigen Sie, dass die Menge $V = \mathbb{R}^n$ gemeinsam mit der Vektoraddition

$$x \oplus y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

eine abelsche (d. h. kommutative) Gruppe bildet!

Aufgabe 3-3 8P

Man untersuche für welche $t \in \mathbb{R}$ die Vektoren
$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

Aufgabe 3-4 8P

Man prüfe, ob die Vektoren v_1, v_2, v_3 in $\mathbb{R}^4$ linear unabhängig sind, wenn:

(a) $v_1 = (1, 1, -1, 0)^T$, $v_2 = (0, -1, 1, -2)^T$ und $v_3 = (3, 1, -1, -4)^T$

(b) $v_1 = (1, 1, -1, 0)^T$, $v_2 = (0, -1, 1, -2)^T$ und $v_3 = (3, -1, -1, -4)^T$

Aufgabe 3-5 8P

Auf $F := \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ werden zwei Verknüpfungen definiert durch

$$(f \oplus g)(a) := f(a) + g(a) \text{ und } (f \odot g)(a) := f(a) \cdot g(a) \ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind gleich, genau dann wenn $\forall d \in \mathbb{R} : f(d) = g(d)$.
Ist $(F, \oplus, \odot)$ ein Ring?

Aufgabe 3-6 10P

Sei $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Sei ε ein Symbol, das kein Element von $\mathbb{R}$ repräsentiert. Wir betrachten die Menge $\mathbb{R}[\varepsilon] := \{a + b\varepsilon | a, b \in \mathbb{R}\}$, und definieren darauf die beiden Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ durch

$$(a + b\varepsilon) \oplus (a' + b'\varepsilon) := (a + a') + (b + b')\varepsilon,$$

$$(a + b\varepsilon) \odot (a' + b'\varepsilon) := (aa') + (ab' + a'b)\varepsilon.$$

Weisen Sie nach, dass $(\mathbb{R}[\varepsilon], \oplus, \odot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist.

Aufgabe 3-7 10P

Sind die folgenden Abbildungen linear? Untersuchen Sie, ob sie injektiv, surjektiv bzw. bijektiv sind!

(a)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$