Universität Wien
Fakultät für Informatik
Univ.-Prof. Wilfried Gansterer und Dr. Martin Schirneck

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

SS 2023

Übungsblatt 5: Matrizen und Lineare Algebra

Literatur: Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 7, 8

Aufgabe 5-1 5P

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Berechne A^2, die Determinante von A und den Rang von A.

Aufgabe 5-2 6P

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 6r - 2s + 2t + 4w &= 16 \\ 12r - 8s + 6t + 10w &= 26 \\ 3r - 13s + 9t + 3w &= -19 \\ -6r + 4s + t - 18w &= -34 \end{aligned}$$

(a) Ermitteln Sie die Matrix A sowie den Ergebnisvektor b, damit $Ax = b$ dieses Gleichungssystem repräsentiert.

(b) Lösen Sie dieses System mittels Gauß'schem Eliminationsverfahren.

(c) Welchen Rang hat die Matrix bzw. die erweiterte Matrix dieses Systems? Welche Dimension hat der Lösungsraum?

Aufgabe 5-3 6P

Gegeben sei folgende lineare Abbildung:

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot x_1 + x_2 \\ x_2 + 4 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie den Kern dieser Abbildung.

(b) Welche Dimension hat $Ker(H)$ (die Matrix H definiert die lineare Abbildung h) ? Können Sie daraus direkt auf den Rang von H schließen?

Aufgabe 5-4 7P

Finden Sie das Polynom mit Grad 2 so dass sein Graph die Punkte (1,6), (2,3), (3,2) beinhaltet. (Hinweis: Verwenden Sie Gauß'sches Eliminationsverfahren wenn erforderlich.)

Aufgabe 5-5 **7P**

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -5 \\ -3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die lineare Abbildung an, die durch die Matrix C definiert ist?

(b) Wie lauten die einzelnen Gleichungen der Gleichungssysteme $Ax = e$ bzw. $Bx = f$? Welche Dimensionen haben die Vektoren e bzw. f?

(c) Bestimmen Sie den Rang der drei Matrizen.

Aufgabe 5-6 **7P**

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Ermitteln Sie U^{-1}.

(b) Gibt es irgendeine quadratische Matrix die invertierbar ist und die Determinante gleich Null hat? Welche Eigenschaft müssen die Spalten- bzw. Zeilenvektoren einer Matrix erfüllen, damit die Determinante einer Matrix gleich Null ist.

Aufgabe 5-7 **8P**

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix in Abhängigkeit von t:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 2t & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5-8 **10P**

Die Fibonacci-Zahlen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ sind durch folgende Rekursion definiert:

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Lösen Sie folgende Aufgaben:

(a) Berechnen Sie die ersten 15 Fibonacci-Zahlen.

(b) Finden Sie eine Matrix A, sodass gilt

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix}$$

(c) Finden Sie für jedes $n \geq 2$ eine Matrix B_n, die folgende Gleichung erfüllt:

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = B_n \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Hinweis: Folgende Definition ist hilfreich. Sei C eine $n \times n$ Matrix. Wir definieren C^k als die k-te Potenz von C, d. h. C^k ist rekursiv definiert als $C^1 = C$ und $C^k = C \cdot C^{k-1}$. Zum Beispiel, $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$.

(d) Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass die Matrix B_n aus Punkt 3 tatsächlich Gleichung (1) erfüllt.