Universität Wien
Fakultät für Informatik
Univ.-Prof. Wilfried Gansterer und Dr. Martin Schirneck

Mathematische Grundlagen der Informatik 1

SS 2023

Übungsblatt 2: Beweistechniken, Relationen und Abbildungen, Algebraische Strukturen

Literatur: Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Springer, Kapitel 1 - 5

Aufgabe 2-1 5P

a) Wir definieren auf der Menge S die Verknüpfung durch

$$a \odot b := a.$$

Überprüfen Sie, ob das Assoziativgesetz erfüllt ist.

b) Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und 1 das neutrale Element. Angenommen, die Gleichung $x * y * z = 1$ gilt in der Gruppe G. Folgt daraus, dass $y * z * x = 1$ ist?

Aufgabe 2-2 5P

Es sei $\mathbb{Z}^+ := \{1, 2, \ldots\}$. Welche der folgenden Mengen sind Gruppen? Geben Sie bei den Mengen, die keine Gruppen sind, mindestens eine Gruppeneigenschaft an, die verletzt ist. Zeigen Sie bei den Gruppen, dass alle Gruppeneigenschaften gelten.

(a) $(\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \oplus)$, wobei $\oplus$ die gewöhnliche Addition von ganzen Zahlen bezeichnet.

(b) $(\mathbb{Z}^+, \odot)$, wobei $\odot$ die gewöhnliche Multiplikation von ganzen Zahlen bezeichnet.

(c) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \otimes)$ mit $a \otimes b = a/b$, wobei $/$ die gewöhnliche Division von rationalen Zahlen bezeichnet und $\mathbb{Q} \setminus \{0\} := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$.

(d) $(\mathbb{Q}^+, \oplus)$, wobei $\oplus$ die gewöhnliche Multiplikation rationaler Zahlen bezeichnet und $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.

Aufgabe 2-3 5P

Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 3x + 2$

(b) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (2y, x + 1)$

Man berechne, falls möglich, die Umkehrabbildung von h.

Aufgabe 2-4 5P

Es sei $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und die Relationen R_1 und R_2 auf A seien gegeben durch $R_1 = \emptyset$,
$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 2), (2, 1), (4, 4)\}$.

(a) Untersuchen Sie R_1 und R_2 bzgl. der Eigenschaften reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv.

(b) Man konstruiere R_2^* als kleinste Äquivalenzrelation, die R_2 enthält.

Aufgabe 2-5 6P

Es sei R eine Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge X. Man zeige, dass dann für beliebige $x, y \in X$ entweder $[x] = [y]$ oder $[x] \cap [y] = \emptyset$ gilt.

Aufgabe 2-6 7P

Zeige die folgende Aussage mittels Induktion für jede ganze Zahl $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Aufgabe 2-7 8P

Zeigen Sie mittels Induktion, dass $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ durch 9 teilbar ist für alle ganzen Zahlen $n \geq 0$.