49. Nach welcher Zeit t (in Stunden) erreichen die Betriebskosten $B(t) = 10,45t + 0,0016t^2 + 17200 \cdot (1 - e^{-0,0002t})$ eines Netzwerkrouters den Anschaffungspreis $A = 100.000,00\,€$? Ist die Lösung eindeutig bestimmt? (Anleitung: Man bilde die Funktion $f(t) = B(t) - A$, untersuche deren Monotonieverhalten und bestimme schließlich die gesuchte Nullstelle mit Hilfe des Newton-Verfahrens.)

also bilden wir zu erst $f(t) = B(t) - A$:

$$f(t) = 10,45t + 0,0016t^2 + 17200 \cdot (1 - e^{-0,0002t}) - 100000$$

Das Monotonieverhalten beschreibt uns, in welchen Bereichen eine Funktion monton wachsend $f'(x) > 0$ bzw. fallend $f'(x) < 0$ ist. Also leiten wir mal ab:

$$f(t) = 10,45t + 0,0016t^2 + 17200 \cdot (1 - e^{-0,0002t}) - 100000$$

$$f(t) = 10,45t + 0,0016t^2 + 17200 - 17200e^{-0,0002t} - 100000$$

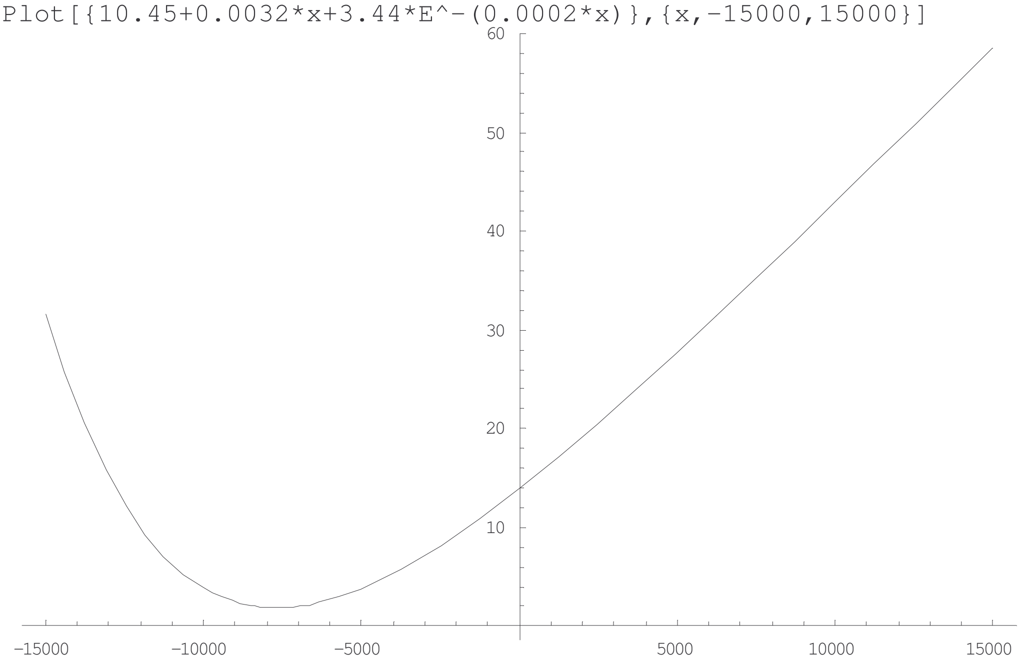
$$f(t) = 10,45t + 0,0016t^2 - 17200e^{-0,0002t} - 82800$$

$$f'(t) = 10,45 + 2 \cdot 0,0016t - 17200e^{-0,0002t} \cdot (-0,0002)$$

$$f'(t) = 10,45 + 0,0032t + 3,44e^{-0,0002t}$$

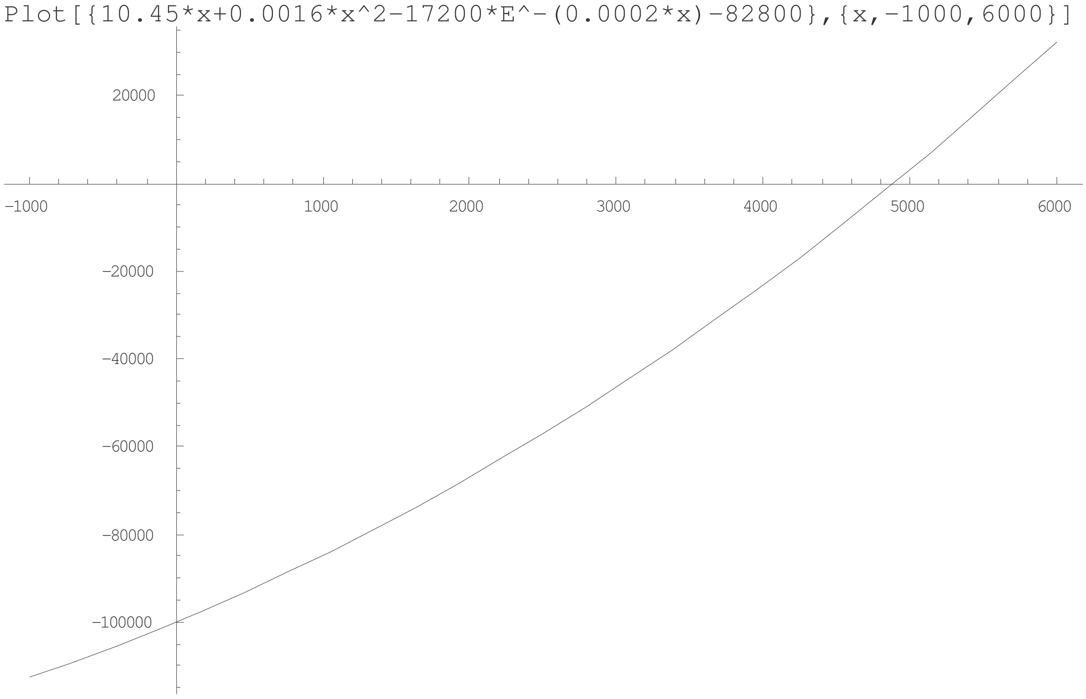
$f'(t)$ wird immer größer 0 sein, also ist die Funktion monoton wachsend, wie man auch in der Grafik sieht:

```
Plot[{10.45+0.0032*x+3.44*E^-(0.0002*x)},{x,-15000,15000}]
```



und hier unsere eigentliche Funktion: $f(t) = 10,45t + 0,0016t^2 - 17200e^{-0,0002t} - 82800$

```
Plot[{10.45*x+0.0016*x^2-17200*E^-(0.0002*x)-82800},{x,-1000,6000}]
```



Newtonsche Näherungsverfahren:
sei $f(x)$ zweimal stetig differenzierbar, $f'(x) \neq 0$, dann ist

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = x - f(x)\frac{1}{f'(x)} = x$, also $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ für n = 0, 1, 2, …

also lautet die Formel des Newtonschen Näherungsverfahrens:

$t_{n+1} = t_n - \frac{10,45t_n + 0,0016t_n^{\ 2} - 17200e^{-0,0002t_n} - 82800}{10,45 + 0,0032t_n + 3,44e^{-0,0002t_n}}$, Startwert: $t_0 = 0$

t_0	0	4500
t_1	7199,42405	4894,99243
t_2	5121,22394	4886,65958
t_3	4889,54586	4886,65585
t_4	4886,65629	4886,65585
t_5	4886,65585	4886,65585
t_6	4886,65585	4886,65585
t_7	4886,65585	4886,65585
t_8	4886,65585	4886,65585
t_9	4886,65585	4886,65585
t_{10}	4886,65585	4886,65585

Also haben wir unsere gesuchte Nullstelle bei $t = 4886,65585$ gefunden. Das ist auch die einzige Nullstelle, weil die Funktion monoton wachsend ist.