Prüfungsbeispiel 16

2) Die Produktion einer Abteilung wird von zwei Kontrolleuren mit den Anteilen 30% bzw. 70% sortiert. Dabei ist für den ersten bzw. zweiten Kontrolleur die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Fehlentscheidung zu treffen, gleich 0.03 bzw. 0.05.

a) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewähltes Teil richtig einsortiert wurde.

$$P(A_1) = 0.30 \qquad P(C|A_1) = 0.97$$
$$P(A_2) = 0.70 \qquad P(C|A_2) = 0.95$$

Damit erhalten wir nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit zunächst.

$$P(C) = \sum_{i=1}^{2} P(C|A_i) \cdot P(A_i)$$
$$P(C) = 0.97 \cdot 0.30 + 0.95 \cdot 0.70$$
$$\underline{\underline{P(C) = 0{,}956}}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das zufällige Ereignis C (Teil richtig einsortiert) beträgt damit 95,6%.

b) Es wird beim Versand ein fehlsortiertes Teil gefunden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde es vom ersten Kontrolleur sortiert? Mit welcher Wahrscheinlichkeit vom zweiten?

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(A_1|B)$ gilt nach dem <u>Satz von Bayes</u> :
Ereignis B (Teil falsch sortiert)

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)}$$

$$P(A_1|B) = \frac{0.03 \cdot 0.30}{0.03 \cdot 0.30 + 0.05 \cdot 0.70} = \frac{0.009}{0.044} = 0{,}205$$
$$\underline{\underline{P(A_1|B) = 0.205}}$$

$$P(A_2|B) = \frac{P(B|A_2) \cdot P(A_2)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)}$$

$$P(A_2|B) = \frac{0.05 \cdot 0.70}{0.03 \cdot 0.30 + 0.05 \cdot 0.70} = \frac{0.035}{0.044} = 0{,}795$$
$$\underline{\underline{P(A_2|B) = 0.795}}$$