Analysis 2 (Müllner)
Schriftliche Prüfung am 15.7.2022

Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	20	20
2	20	20
3	20	8
4	20	20
5	20	20
Gesamt	100	88

Alle Rechenschritte sind anzugeben und alle Antworten sind genau zu begründen.
Arbeitszeit: 100 Minuten

Aufgabe 1: (20 Punkte) 20/20

Man bestimme mit Hilfe der Methode der Lagrangschen Multiplikatoren das lokale Extremum der Funktion $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ unter der Nebenbedingung $xyz = 108$, wobei nur positive Lösungen beachtet werden sollen.

$g(x) = xyz - 108 = 0$ ✓

$\mathcal{L}(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda \cdot (xyz - 108)$ ✓

$\mathcal{L}_x = y + 2z + \lambda yz \stackrel{!}{=} 0$ ✓ I

$\mathcal{L}_y = x + 2z + \lambda xz \stackrel{!}{=} 0$ ✓ II

$\mathcal{L}_z = 2x + 2y + \lambda xy \stackrel{!}{=} 0$ ✓ III

$\mathcal{L}_\lambda = xyz - 108 \stackrel{!}{=} 0$ ✓ IV

$\mathrm{I} \cdot x - \mathrm{III} \cdot z$ ✓ $= yx + 2zx - (2xz + 2yz)$

$= yx + 2zx - 2xz - 2yz = 0$ ✓

$\boxed{x = y}$

$y^2 + \cancel{2zy} - \cancel{2zy} - 2zy = 0$

$y^2 = 2zy \rightarrow y = 2z$ $\quad y \neq 0$

$z = \frac{y}{2}$

$\mathrm{I} \cdot x - \mathrm{II} \cdot y = 2zx - 2zy = 0$

$\cancel{2z}x = \cancel{2z}y$ ✓ $\quad z \neq 0$ ✓ (wieso?)

$x = y$

$y^2 z - 108 = 0 \rightarrow y^2 z = 108 \qquad z = \frac{108}{y^2}$

$\to 4z^3 = 108$

$z^3 = 27$

$\boxed{\begin{aligned} z &= 3 \\ y &= 6 \\ x &= 6 \end{aligned}}$ nur positive

$P(6,6,3)$

$y + 2z^2 + \lambda yz = 0$

$6 + 2\,3 + \lambda 18 =$

$18\lambda = -12$

$\lambda = -\frac{12}{18}$

Hesse-Matrix H

nicht gefragt!

$\mathcal{L}_{xy} = 1 + \lambda z$ $\quad \mathcal{L}_{yx} = 1 + \lambda z$ $\quad \mathcal{L}_{zx} = 2 + \lambda y$

$\mathcal{L}_{xz} = 2 + \lambda y$ $\quad \mathcal{L}_{yz} = 2 + \lambda z$ $\quad \mathcal{L}_{zy} = 2 + \lambda x$

$\mathcal{L}_{xx} = 0$ $\quad \mathcal{L}_{yy} = 0$ $\quad \mathcal{L}_{zz} = 0$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1+\lambda z & 2+\lambda y \\ 1+\lambda z & 0 & 2+\lambda x \\ 2+\lambda y & 2+\lambda x & 0 \end{pmatrix}$$

$h_1 = 2 + \lambda y$ $\quad \ominus$

$h_2 = (1+\lambda z)(2+\lambda x)$

$h_3 = 0 + \underline{(1+\lambda z)(2+\lambda x)(2+\lambda y)} + \underline{(2+\lambda y)(1+\lambda z)(2+\lambda x)}$

$2 *$

$h_2 = \left(1 + \left(-\frac{12}{18}\cdot 3\right)\right)\left(2 + \left(-\frac{12}{18}\cdot 6\right)\right)$

$-1 \qquad (2-4) \quad -2 = \oplus$

$h_3 = (-1 \cdot -2 \cdot -2)\, 2 = \ominus$

$P(6,6,3) \to$ negativ definit $\to$ Hochpunkt (Extrem)

Aufgabe 2: (20 Punkte) 20/20

(a) (16 Punkte) Gegeben seien die beiden Funktionen

$$F(x,y) = 2x^5 \sin(y) \text{ und } f = \begin{pmatrix} 10x^4 \sin(y) \\ 2x^5 \cos(y) \end{pmatrix}.$$

Beantworten Sie dazu die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen (bitte ankreuzen: es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein):

- Die Funktion $F(x,y)$ ist ein ☒ Skalarfeld ☐ Vektorfeld ✓
- Die Funktion $f(x,y)$ ist ein ☐ Skalarfeld ☒ Vektorfeld ✓
- Ist $f(x,y)$ ein Gradientenfeld? ☒ ja ☐ nein ✓
- Sei c eine Kurve in der Ebene. Dann ist das Kurvenintegral $\int_c f(x,y)d(x,y)$ ☐ wegabhängig ☒ wegunabhängig ✓
- Sind die Integrabilitätsbedingungen für die Funktion $f(x,y)$ erfüllt? ☒ ja ☐ nein ✓
- Wie viele Integrabilitätsbedingungen sind für ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zu überprüfen? ☐ 4 ☒ 6 ☐ 8 ☐ 16 ✓
- Zu jeder (diff.baren) Funktion F gibt es ein Vektorfeld f mit $gradF = f$. ☒ ja ☐ nein ✓
- Zu jedem Vektorfeld f gibt es eine Funktion F mit $gradF = f$. ☐ ja ☒ nein ✓

(b) (4 Punkte) Geben Sie eine stetig differenzierbare Funktion g an, für die es **eine** Funktion G gibt mit $gradG = g$.
Geben Sie eine stetig differenzierbare Funktion h an, für die es **keine** Funktion H gibt mit $gradH = h$.

Integrs-Bed.: $\frac{\delta}{\delta y} f_1 = 10x^4 \cos(y)$ ✓

$\frac{\delta}{\delta x} f_2 = 10x^4 \cdot \cos(y)$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ d \end{pmatrix}$

$3 + 2 + 1 = 6$

b) $g = \begin{pmatrix} 10x^4 \cdot \sin y \\ 2x^5 \cdot \cos y \end{pmatrix}$ ✓ $\exists \; grad\, G = g$

$h = \begin{pmatrix} 100x^4 \cdot \sin y \\ x^5 \cdot \cos y \end{pmatrix}$ $\nexists \; grad\, H = h$ ✓

8

Aufgabe 3: (20 Punkte) 8/20

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 3e^{2x} + 4.$$

Wie lautet die Lösung der Anfangswertaufgabe $y(0) = 8, y'(0) = 7$?
(Hinweis: die Aufgabe kann **entweder** mit der Ansatzmethode **oder** mittels Laplace-Transformation gelöst werden.)

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$, $s > \alpha \in \mathbb{R}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$, $s > 0$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, $s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $n \geq 0$

$\mathcal{L}\{f^n\} = s^n F(s) - s^{n-1} f'(s_0) - s^{n-2} f''(s_0)$

$\mathcal{L}\{y''\} - 2 \cdot \mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = 3\mathcal{L}\{e^{2x}\} + \mathcal{L}\{4\}$

$\rightarrow s^2 F - s f(s_0) - f'(s_0) - 2 \cdot (s \cdot F - f(s_0)) + F = \frac{3}{s-2} + \frac{4}{s}$ ✓

AWA

$s^2 F - s \cdot 8 - 7 - 2sF + 2 \cdot 8 + F = \frac{3}{s-2} + \frac{4}{s}$ (✓)

$s^2 F - 2sF + F = \frac{3}{s-2} + \frac{4}{s} + s \cdot 8 + 7 - 16$

$F(s^2 - 2s + 1) = \text{—"—} \Rightarrow F = \dfrac{\frac{3}{s-2} + \frac{4}{s} + s \cdot 8 + 7 - 16}{s^2 - 2s + 1}$ ✓

$\overset{"}{=} (s-1)^2$

$F = \dfrac{\frac{3}{s-2} + \frac{4}{s} + 8s + 9}{s^2 - 2s + 1}$ ✓ Poly-Div

i guess ?

Aufgabe 4: (20 Punkte) 20/20

Gegeben ist die periodische Rechtecksimpulsfunktion $f(t)$ gemäß

$$f(t)=\begin{cases}2, & -1\le t\le 1\\ 0, & -2<t<-1 \text{ bzw. } 1<t<2\end{cases}$$

sowie $f(t+4)=f(t)$. Machen Sie zuerst eine Skizze der Funktion f. $T=4$ ✓ $f=\frac{1}{4}$

Berechnen Sie die Fourierreihe $\hat{f}(t)$ in Sinus-Cosinus-Form.

b) An welchen Stellen stimmen die Werte von $f(t)$ und $\hat{f}(t)$ überein, und wo nicht? $\omega=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$f(t)$ gerade → nur cos-komponente ✓ $a_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(t)\cdot\cos(n\omega t)\,dt$ ✓

$$a_n \to \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int_{-2}^{-1}0\cdot\cos(n\omega t)\,dt}_{C_1=0}+\int_{-1}^{1}2\cos(n\omega t)\,dt+\underbrace{\int_{1}^{2}0\cdot\cos(n\omega t)\,dt}_{C_2=0}\right) ✓$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}2\cos(n\omega t)\,dt=\frac{1}{n\omega}\cdot\left[\sin(n\omega t)\right]_{-1}^{1} ✓ =\frac{1}{n\omega}\cdot\underbrace{\left(\underbrace{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}_{1,0,1,0}-\underbrace{\sin\left(-n\frac{\pi}{2}\right)}_{-1,0,-1,0}\right)}_{2,0,\ldots}$$

$$=\frac{2\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}} ✓$$

$$a_0=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}8\cos(0)\,dt=\left[t\right]_{-1}^{1}=2 ✓$$

$$\hat{f}(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos(n\omega t)=1+\sum_{n=1}^{N}\frac{2\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n\frac{\pi}{2}}\cdot\cos\left(n\frac{\pi}{2}t\right) ✓$$

b) nach Gibbs ca. 9% überschwingen bei Unstetigkeitsstellen (stimmt hier nicht überein)

überall anders ~~u~~ stimmt überein

also am Punkte $x=-1,1$ ist $f(t)\neq\hat{f}(t)$, sonst $f(t)=\hat{f}(t)$ ✓

Aufgabe 5: (20 Punkte) 20/20

(a) (10 Punkte) Worin besteht der Nachteil des gewöhnlichen Gauß'schen Eliminationsverfahrens? Welche Möglichkeit der Verbesserung gibt es?

(b) (10 Punkte) Wie funktioniert das Gesamtschrittverfahren von Jacobi? Illustrieren Sie dieses Verfahren anhand eines selbst gewählten 2×2 Gleichungssystems, indem Sie die ersten beiden Schritt des Verfahrens durchführen.

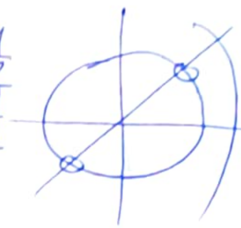
sehr

a) lange Laufzeit, ~~nicht möglich als Iterationsverfahren abzubilden~~

→ mehr als nur eine Variable in einem Schritt behandeln ?

Verbesserung: (ein Iterationsverfahren zu benutzen, mittels Fixpunktsatz)

b)
$$\begin{pmatrix} x^2 + y^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_n = \sqrt{1 - y_{n-1}^2} \\ y_n = x_{n-1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x_0 = \frac{1}{2} \\ y_0 = \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



$$x_1 = \sqrt{1 - (\tfrac{1}{2})^2} = 0{,}866$$
$$y_1 = \frac{1}{2}$$
$$x_2 =$$
$$y_2 =$$

GS:
$$2 \cdot x + 1 = y$$
$$5x = y \rightarrow x = \frac{y}{5}$$

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 1$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{y_{n-1}}{5}$$
$$y_n = 2x_{n-1} + 1$$

$$x_1 = \frac{1}{5} \qquad x_2 = \frac{3}{5}$$
$$y_1 = 3 \qquad y_2 = 1{,}4 \quad \ldots$$

Bei einem Schritt werden alle $\vec{x}$ Werte des vorherigen Schrittes benutzt. (nicht die schon berechneten)