Runde 8, Beispiel 53

LVA 118.181, Übungsrunde 8, 15.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.12.2006

1 Angabe

Man bestimme die Fourier-Reihe folgender 2π-periodischer Funktion $f(t)$:

$$f(t) = t^2, \qquad 0 \leq t < 2\pi, \qquad 2\pi - \text{periodisch fortgesetzt}$$

2 Theoretische Grundlagen: Fourier-Reihen (2π-Periode)

$f(x)$ sei eine Funktion mit der Periode 2π und durch eine Reihe darstellbar, dann kann man transformieren zu der Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x, \end{aligned}$$

Die komplexe Darstellung:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x}$$

für die Koeffizienten $\in \mathbb{C}$, (erhält man mit der Euler-Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2}, c_{-k} = \frac{(a_k + ib_k)}{2}$$
$$a_0 = 2c_0, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$$

3 Lösung des Beispiels

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2 \,\mathrm{d}\, t = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2 \cos(nt) \,\mathrm{d}\, t =$$

$$a = t^2, a' = 2t;\; b' = \cos(nt), b = \frac{\sin(nt)}{n}, \qquad \int ab' = ab - \int ba'$$

$$= \frac{1}{\pi}(\underbrace{t^2 \frac{\sin(nt)}{n}|_0^{2\pi}}_{=0} - 2\int t \frac{\sin(nt)}{n} \,\mathrm{d}\, t) =$$

$$\frac{1}{\pi n}(-2\int_0^{2\pi} t \sin(nt) \,\mathrm{d}\, t) =$$

$$c = t, c' = 1;\; d' = \sin(nt), d = -\frac{\cos(nt)}{n}, \qquad \int cd' = cd - \int c'd$$

$$\frac{1}{\pi n}(2t\frac{\cos(n)}{n}|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} \cos(nt) \,\mathrm{d}\, t) =$$

$$\frac{1}{\pi n}(2t\frac{\cos(nt)}{n}|_0^{2\pi} - \underbrace{2\frac{\sin(nt)}{n}|_0^{2\pi}}_{=0}) =$$

$$\frac{1}{\pi n^2}(4\pi \underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1}) = \frac{4}{n^2}$$

b_n nur verkürzt dargstellt, analog wie oben zu rechnen:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(nt) \,\mathrm{d}\, t =$$

$$\frac{1}{\pi n}(-t^2 \cos(nt)|_0^{2\pi} + 2\int t\cos(nt) \,\mathrm{d}\, t) =$$

$$\frac{1}{\pi n^2}(-t^2 n \cos(nt)|_0^{2\pi} + 2t\sin(nt)|_0^{2\pi} - 2\cos(nt)|_0^{2\pi}) = -\frac{4\pi}{n}$$

$$c_n = \frac{4}{n^2}(1 - i \cdot n)$$

$$\mathbf{S_F(t) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{n^2}\cos(nt) - \frac{4\pi}{n}\sin(nt)}$$