1. Übungstest aus Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Gruppe A - 19. April 2016

Name: ____________________ Matrikelnummer: ______________

Aufgabe 1: a) Erklären Sie mathematisch präzise, was es bedeutet, dass eine Folge a_n gegen einen Grenzwert a konvergiert.

(2 Punkte)

b) Sei die Folge a_n gegeben durch $a_n = \frac{3 \sin n}{n^2}$. Zeigen Sie, dass a_n konvergiert

(1) mittels Sandwich-Theorem.
(2) indem Sie zu beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ angeben.

(6 Punkte)

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+5}}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(6 Punkte)

Aufgabe 3: Untersuchen Sie die Folge a_n auf Wohldefiniertheit, Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz und geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an:

$$a_0 = 5, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}.$$

(Hinweis: vollständige Induktion)

(6 Punkte)

Arbeitszeit 45 min

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
gesamt	

Lösungen und Punkteverteilung

Aufgabe 1: a) Eine Zahl a ist Grenzwert der Folge (a_n), wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ existiert, sodass für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$. (2 Punkte, bei kleinen Ungenauigkeiten 1P Abzug, wenn es völlig falsch ist 0P)

b) 1. Mit Sandwichtheorem: Da $|\sin n| < 1$ ist

$$a_n = \frac{3\sin n}{n^2} \geq \frac{-3}{n^2} = b_n \quad \text{(1P)}$$

$$a_n = \frac{3\sin n}{n^2} \leq \frac{3}{n^2} = c_n. \quad \text{(1P)}$$

Da $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$ folgt aus dem Sandwichsatz, dass auch $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (1P)
2. Es soll gelten, dass $|\frac{3\sin n}{n^2} - 0| < \varepsilon$ ab $n > N(\varepsilon)$. Da $|\frac{3\sin n}{n^2}| \leq \frac{3}{n^2}$, reicht es, ein $N(\varepsilon)$ zu finden, sodass $\frac{3}{n^2} < \varepsilon$ ab $n > N(\varepsilon)$. (1P)
Die Ungleichung $\frac{3}{n^2} < \varepsilon$ ist äquivalent zu $\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}} < n$, also $N(\varepsilon) = \lceil\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}}\rceil$. (2P)

Aufgabe 2: Konvergenz: Sei $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+5}}$. Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{n+5}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)+5}}$$

$$n+6 \geq n+5,$$

also $a_n \geq a_{n+1}$. (1P)
Weiters ist $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} = 0$. (1P)
Da $a_n \geq a_{n+1}$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, folgt mittels Leibnit-Kritierium, dass $\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+5}}$ konvergent ist. (1P)

absolute Konvergenz: Es gilt $\frac{1}{\sqrt{n+5}} \geq \frac{1}{n+5}$. (1P)
Also ist

$$\sum_{n\geq 0} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+5}}\right| \geq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+5} = \sum_{n\geq 5} \frac{1}{n}. \quad (1P)$$

Das ist die (verschobene) Harmonische Reihe und somit bekanntlich divergent. Mit dem Minorantenkriterium folgt nun, dass $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+5}}$ nicht absolut konvergent ist. (1P)

Aufgabe 3: Beschränktheit: Vermutung: $5 \geq a_\geq 3$.
Induktionsanfang: $5 \leq a_0 = 5 \geq 3$.
Induktionsschritt: $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \geq \sqrt{6+3} = 3$ und $a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3} \leq \sqrt{10+3} \leq 5$. (1P)

Aus $a_n \geq 3$ folgt, dass $2an_+3 \geq 0$, also ist die Folge auch wohldefiniert.(1P)
Monotonie: Wollen zeigen, dass

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \leq a_n.$$

Quadrieren, alles auf eine Seite bringen und faktorisieren liefert

$$0 \leq= a_n^2 - 2a_n - 3 = (a_n - 3)(a_n + 1).$$

Da $a_n \geq 3$ sind $(a_n - 3)$ und $(a_n + 1)$ positiv, also ist $a_{n+1} \leq a_n$. (2P)
Grenzwert: Da (a_n) beschränkt und monoton ist, folgt, dass $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ existiert. (1P)
Für den Limes muss gelten $a = \sqrt{(2a+3)}$, oder äquivalent $a^2 - 2a - 3 = 0$, also $a = 3$ oder $a = -1$. Letzter Lösung kann man aber ausschließen, da $a_n \geq 3$. Also ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$. (1P)