1) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (mit Hilfe vollständiger Induktion) auf Monotonie und Beschränktheit und bestimme gegebenenfalls mit Hilfe der bekannten Rechenregeln für Grenzwerte den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$. Überlegen Sie sich auch, warum die Folge wohldefiniert ist für alle $n \geq 0$.

$$a_0 := 4, \quad a_{n+1} := \sqrt{6a_n - 9} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(8 Punkte)

Lösung: Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion: $a_n \geq 3,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$n=0$: $a_0 = 4 \geq 3$.

$n \to n+1$: $a_n \geq 3 \Rightarrow a_{n+1} \geq \sqrt{6.3-9} = \sqrt{9} = 3$.

Insbesondere ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wohldefiniert.

Nun zeigen wir, ebenfalls durch vollständige Induktion, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, d.h.

$$a_{n+1} \leq a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

$n=0$: $a_1 = \sqrt{15} \leq 4 = a_0$.

$n \to n+1$: $a_{n+1} \leq a_n \Longrightarrow 6a_{n+1} - 9 \leq 6a_n - 9 \Longrightarrow$

$$\sqrt{6a_{n+1}-9} \leq \sqrt{6a_n - 9} \Longrightarrow a_{n+2} \leq a_{n+1}.$$

Somit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt:

$$3 \leq a_n \leq 4,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

und somit konvergent.

Daher existiert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$, und es gilt:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6a_n - 9} = \sqrt{6 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n - 9} =$$

$$= \sqrt{6a-9} \Longrightarrow a^2 = 6a - 9 \Longrightarrow a^2 - 6a + 9 = 0$$

$$\Longrightarrow (a-3)^2 = 0 \Longrightarrow \underline{\underline{a = \lim_{n\to\infty} a_n = 3}}$$

2) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

Hinweis: Man erweitere mit $\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

(5 Punkte)

Lösung: Wir haben

$$0 \leq a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \sqrt{0} = 0.$$

Aus dem Sandwich-Theorem folgt nun, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

3) Man zeige die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\binom{2n}{n+1}x^{3n} \qquad \text{für } |x|^3 < \frac{3}{4}.$$

(7 Punkte)

Lösung: Wir wenden das Quotientenkriterium in Limesform an und berechnen $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ mit

$$a_n = 3^{-n}\binom{2n}{n+1}x^{3n} = \left(\frac{x^3}{3}\right)^n \cdot \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!}.$$

Es folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{|x|^3}{3}\right)^{n+1}\cdot\frac{(2n+2)!}{(n+2)!\,n!}}{\left(\frac{|x|^3}{3}\right)^{n}\cdot\frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!}} =$$

$$= \frac{|x|^3}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!\,(n+1)!\,(n-1)!}{(2n)!\,(n+2)!\,n!} =$$

$$= \frac{|x|^3}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+2)\cdot n} = \text{(Division von Zähler und Nenner durch } n^2\text{)}$$

$$= \frac{|x|^3}{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}{1+\frac{2}{n}} = \frac{|x|^3}{3}\cdot\frac{2\cdot 2}{1} =$$

$$= \frac{4|x|^3}{3}.$$

Also gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \iff \frac{4|x|^3}{3} < 1 \iff |x|^3 < \frac{3}{4}$$

Für diesen Bereich ist die Reihe somit absolut konvergent.