30. Gesucht ist die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differenzengleichungen

a) $x_{n+2} - 5x_{n+1} - 6x_n = 0 \Rightarrow x_n = c_1 \cdot 6^n + c_2 \cdot (-1)^n$

b) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 12x_n = 0 \Rightarrow x_n = \left(\sqrt{12}\right)^n \cdot \left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \pm c_2 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right)$

c) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6{,}25x_n = 0 \Rightarrow x_n = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^n$

$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0, n = 0, 1\ 2, \ldots, b \neq 0$ (H)

Sind $x_n^{(1)}$ und $x_n^{(2)}$ Lösungen der homogenen Differenzengleichung (H), so ist auch $x_n = c_1 x_n^{(1)} + c_2 x_n^{(2)}$ mit $c_1, c_2 \in R$ eine Lösung von (H). Gilt ferner $\begin{vmatrix} x_0^{(1)} & x_0^{(2)} \\ x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$, so ist x_n die allgemeine Lösung von (H).

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Lösung: ${}_1\lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ und $x_n^{(1)} = \lambda_1^n$, $x_n^{(2)} = \lambda_2^n$ sind Lösungen von (H)

$$x_n = \begin{cases} c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n & \lambda_1, \lambda_2 \text{ reell}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ r^n \cdot (c_1 \cdot \cos(n \cdot \varphi) + c_2 \cdot \sin(n \cdot \varphi)) & {}_1\lambda_2 = r \cdot (\cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi) \text{ konj. komplex} \\ (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot \lambda_1^n & \lambda_1 = \lambda_2, \text{reell} \end{cases}$$

a) $x_{n+2} - 5x_{n+1} - 6x_n = 0$

$${}_1\lambda_2 = \frac{+5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25 + 24}}{2} = \frac{+5 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{+5 \pm 7}{2}$$

$\lambda_1 = \frac{12}{2} = 6$ und $\lambda_2 = \frac{-2}{2} = -1$, beide sind reell und es gilt (Fall 1): $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$

$x_n = c_1 \cdot \lambda_1^n + c_2 \cdot \lambda_2^n \Rightarrow x_n = c_1 \cdot 6^n + c_2 \cdot (-1)^n$

b) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 12x_n = 0$

$${}_1\lambda_2 = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{+6 \pm \sqrt{36 - 48}}{2} = \frac{+6 \pm \sqrt{-12}}{2} = 3 \pm \sqrt{-3}$$

$\lambda_1 = 3 + \sqrt{-3} = 3 + i\sqrt{3}$ und $\lambda_2 = 3 - \sqrt{-3} = 3 - i\sqrt{3}$, das sind konjugiert komplexe Lösungen und es gilt (Fall 2): $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow {}_1\lambda_2 = r \cdot (\cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi)$

die allgemeine Lösung: $x_n = r^n \cdot (c_1 \cdot \cos(n \cdot \varphi) + c_2 \cdot \sin(n \cdot \varphi))$, $c_1, c_2 \in R$

kurzer Exkurs: Darstellung von komplexen Zahlen (die Zeichnung spar ich mir)
kartesiche Kooridinaten (a,b): $z = a + bi$
Polarkoordinaten [r, φ]: $z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \underbrace{\arg}_{\text{Argument}}(z) = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} \cdot (\pm\pi) \leftarrow \text{je nach Quadrant; } a \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ oder } -\frac{\pi}{2} \leftarrow a = 0, b > 0 \text{ oder } b < 0 \\ \text{unbestimmt} \leftarrow a = 0, b = 0 \end{cases}$$

so auf unser Beispiel angewendet: ich muss die beiden Lösungen
$\lambda_1 = 3 + \sqrt{-3} = 3 + i\sqrt{3}$ und $\lambda_2 = 3 - \sqrt{-3} = 3 - i\sqrt{3}$ in komplexer Form darstellen:
${}_1\lambda_2 = 3 \pm i \cdot \sqrt{3} = a \pm i \cdot b$

$$r = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$$

$$\varphi = \arctan\frac{\pm b}{a} = \arctan\frac{\pm\sqrt{3}}{3} = \pm\frac{\pi}{6}$$

nun drücken wir unsere 2 Lösungen in komplexer Form aus:

$${}_1\lambda_2 = r \cdot (\cos\varphi \pm i \cdot \sin\varphi) = \sqrt{12} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} \pm i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

nun setzten wir in unsere allgemeine Lösung ein:

$$x_n = r^n \cdot (c_1 \cdot \cos(n \cdot \varphi) + c_2 \cdot \sin(n \cdot \varphi)) = \left(\sqrt{12}\right)^n \cdot \left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) \pm c_2 \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right),\ c_1, c_2 \in R$$

c) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6{,}25x_n = 0$

$${}_1\lambda_2 = \frac{+5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6{,}25}}{2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25-25}}{2} = \frac{+5 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{5}{2}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{5}{2}$, das sind 2 gleiche, reelle Lösungen und es gilt (Fall 3): $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$

$$x_n = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot \lambda_1^n = (c_1 + c_2 \cdot n) \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^n$$