MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2019
Blatt 1
30.04.2019

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik II“ — Lösungsvorschlag —

1. a) Die Relation

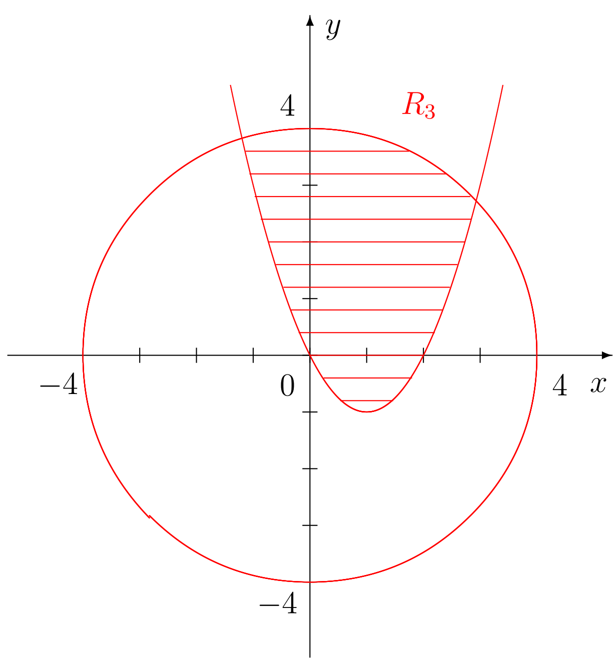
$$R_1 = \{(x,y) \in M \times N \mid x = y\} = \{(1,1),\, (2,2)\}$$

ist nicht Graph einer Funktion $f : M \to N$, da dem Element $x = 3 \in M$ kein Element $y \in N$ zugeordnet wird. Die Relation

$$R_2 = \left\{(x,y) \in M \times N \mid x^2 = y\right\} = \{(1,1),\, (2,4),\, (3,9)\}$$

ist hingegen Graph einer Funktion $f : M \to N$, denn zu jedem Element $x \in M$ gibt es genau ein $y \in N$ mit $(x,y) \in R_2$, nämlich $y = x^2$.

b) Für die Relation $R_3 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ergibt sich die folgende Skizze:



Es umfaßt nämlich die Relation

$$R_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq (x-1)^2 - 1 \,\wedge\, x^2 + y^2 \leq 16\right\}$$

genau diejenigen Punkte, die auf und oberhalb der nach oben geöffneten Normalparabel mit Scheitel $(1,-1)$ sowie auf der Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt $(0,0)$ und dem Radius 4 liegen.

2. Sei $f : M \to \mathbb{Q}$ eine Abbildung. Wir betrachten auf der nichtleeren Menge M die Relation
$$R = \{(x, y) \in M \times M \mid f(x) \leq f(y)\}.$$

   a) Wir untersuchen R auf Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie und Transitivität.

      - Für alle $x \in M$ gilt wegen $f(x) = f(x)$ insbesondere $f(x) \leq f(x)$, also $(x, x) \in R$; damit ist R reflexiv.
      - Etwa für $M = \{0, 1\}$ und $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$ gilt für $x = 0 \in M$ und $y = 1 \in M$ wegen $f(x) = 1 \leq 2 = f(y)$ zwar $(x, y) \in R$, wegen $f(y) = 2 > 1 = f(x)$ aber nicht $f(y) \leq f(x)$, also $(y, x) \notin R$; damit ist R (im allgemeinen) nicht symmetrisch.
      - Etwa für $M = \{0, 1\}$ und $f(0) = 3$ und $f(1) = 3$ gilt für $x = 0 \in M$ und $y = 1 \in M$ wegen $f(x) = 3 \leq 3 = f(y)$ sowie $f(y) = 3 \leq 3 = f(x)$ zwar $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$, aber $x = 0 \neq 1 = y$; damit ist R (im allgemeinen) nicht antisymmetrisch.
      - Für alle x, y, $z \in M$ mit $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$, also $f(x) \leq f(y)$ und $f(y) \leq f(z)$, folgt $f(x) \leq f(z)$, also $(x, z) \in R$; damit ist R transitiv.

   b) Wir zeigen nun, daß R genau dann eine Ordnung auf M ist, wenn f injektiv ist. Da R gemäß a) bereits reflexiv und transitiv ist, bleibt noch zu zeigen, daß R genau dann antisymmetrisch ist, wenn f injektiv ist. Wir zeigen diese Beziehung über den Nachweis der beiden folgenden Implikationen:

      - Für „$\Longrightarrow$" sei die Relation R antisymmetrisch, und zum Nachweis der Injektivität von $f : M \to \mathbb{Q}$ seien $x, y \in M$ mit $f(x) = f(y)$. Damit gilt $f(x) \leq f(y)$, also $(x, y) \in R$, und $f(y) \leq f(x)$, also $(y, x) \in R$, woraus mit der Antisymmetrie von R schon $x = y$ folgt; damit ist f injektiv.
      - Für „$\Longleftarrow$" sei f injektiv, und zum Nachweis der Antisymmetrie von R seien $x, y \in M$ mit $(x, y) \in R$ und $(y, x) \in R$. Damit gilt $f(x) \leq f(y)$ und $f(y) \leq f(x)$, wegen der Antisymmetrie von $\leq$ auf der Menge $\mathbb{Q}$ also $f(x) = f(y)$, woraus mit der Injektivität von f schon $x = y$ folgt; damit ist R antisymmetrisch.

3. Auf der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen betrachten wir die beiden Relationen
$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x \cdot y \geq 0\}$$
und
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x \cdot y > 0 \vee x = y\}.$$
Zum einen gilt für die Relation R_1 für $x = -1 \in \mathbb{Q}$, $y = 0 \in \mathbb{Q}$ und $z = 1 \in \mathbb{Q}$ zwar
$$x \cdot y = (-1) \cdot 0 = 0 \geq 0, \qquad \text{also} \qquad (x, y) \in R_1,$$
und
$$y \cdot z = 0 \cdot 1 = 0 \geq 0, \qquad \text{also} \qquad (y, z) \in R_1,$$
wegen
$$x \cdot z = (-1) \cdot 1 = -1 < 0 \qquad \text{aber} \qquad (x, z) \notin R_1;$$

damit ist R_1 nicht transitiv, insbesondere also keine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}$. Zum anderen ergibt sich für die Relation R_2:

- Für alle $x \in \mathbb{Q}$ ist $x = x$, also $(x, x) \in R_2$; folglich ist R_2 reflexiv.
- Für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ mit $(x, y) \in R_2$ gilt $x = y \vee x \cdot y > 0$, woraus sich mit dem Kommutativgesetz der Multiplikation $y = x \vee y \cdot x > 0$, also $(y, x) \in R_2$, ergibt; folglich ist R_2 symmetrisch.
- Für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ mit $(x, y) \in R_2$ und $(y, z) \in R_2$ gilt

$$\begin{array}{lll} x = y \;\vee\; x \cdot y > 0 & \text{wegen} & (x, y) \in R_2 \\ y = z \;\vee\; y \cdot z > 0 & \text{wegen} & (y, z) \in R_2 \end{array}$$

  wodurch die folgende Fallunterscheidung motiviert wird:

  - Aus $x = y$ und $y = z$ folgt sofort $x = z$.
  - Aus $x = y$ und $y \cdot z > 0$ folgt sofort $x \cdot z > 0$.
  - Aus $x \cdot y > 0$ und $y = z$ folgt sofort $x \cdot z > 0$.
  - Aus $x \cdot y > 0$ und $y \cdot z > 0$ folgt $0 < (x \cdot y) \cdot (y \cdot z) = x \cdot y^2 \cdot z$, wegen $y^2 > 0$ also $x \cdot z > 0$.

  Damit gilt stets $x = z \vee x \cdot z > 0$, also $(x, z) \in R_2$; folglich ist R_2 transitiv.

Damit ist R_2 eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Q}$. Für die Äquivalenzklasse $\overline{x}$ mit $x \in \mathbb{Q}$ betrachten wir folgende Fälle:

- Für $x \in \mathbb{Q}^+$ ergibt sich wegen

$$y \in \overline{x} \iff (x, y) \in R \iff \big(x = y \quad \text{oder} \quad x \cdot y > 0\big) \underset{x>0}{\iff} y > 0$$

  die Äquivalenzklasse $\mathbb{Q}^+$.
- Für $x = 0$ ergibt sich wegen

$$y \in \overline{x} \iff (x, y) \in R \iff \big(x = y \quad \text{oder} \quad x \cdot y > 0\big) \underset{x=0}{\iff} y = 0$$

  die Äquivalenzklasse $\{0\}$.
- Für $x \in \mathbb{Q}^-$ ergibt sich wegen

$$y \in \overline{x} \iff (x, y) \in R \iff \big(x = y \quad \text{oder} \quad x \cdot y > 0\big) \underset{x<0}{\iff} y < 0$$

  die Äquivalenzklasse $\mathbb{Q}^-$.

4. Sei M eine nichtleere Menge sowie R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen auf M.

   a) Für alle $x, y, z \in M$ gilt:

      - Wegen der Reflexivität von R_1 und R_2 gilt $(x, x) \in R_1$ und $(x, x) \in R_2$, damit auch $(x, x) \in R_1 \cap R_2$; folglich ist $R_1 \cap R_2$ reflexiv.

- Sei $(x, y) \in R_1 \cap R_2$, also $(x, y) \in R_1$ und $(x, y) \in R_2$. Wegen der Symmetrie von R_1 und R_2 gilt auch $(y, x) \in R_1$ und $(y, x) \in R_2$, und damit $(y, x) \in R_1 \cap R_2$; folglich ist $R_1 \cap R_2$ symmetrisch.
- Seien $(x, y) \in R_1 \cap R_2$ sowie $(y, z) \in R_1 \cap R_2$, also $(x, y) \in R_1$ und $(x, y) \in R_2$ sowie $(y, z) \in R_1$ und $(y, z) \in R_2$. Wegen der Transitivität von R_1 und R_2 gilt auch $(x, z) \in R_1$ und $(x, z) \in R_2$, und damit $(x, z) \in R_1 \cap R_2$; folglich ist $R_1 \cap R_2$ transitiv.

Insgesamt ist auch $R_1 \cap R_2$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge M.

b) Wir betrachten zunächst die Menge $M = \{1, 2, 3\}$ mit den beiden Relationen

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ und
- $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$;

da R_1 und R_2 jeweils reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, stellen sie Äquivalenzrelationen auf der Menge M dar. Bei der Vereinigung

$$R_1 \cup R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$$

ist jedoch wegen $(1, 2) \in R_1 \cup R_2$ und $(2, 3) \in R_1 \cup R_2$ mit $(1, 3) \notin R_1 \cup R_2$ die Transitivität verletzt; folglich ist $R_1 \cup R_2$ keine Äquivalenzrelation auf der Menge M.

Wir betrachten nun die Menge $M = \{1, 2\}$ mit den beiden Relationen

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ und
- $R_2 = \{(1, 1), (2, 2)\}$;

da R_1 und R_2 jeweils reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, stellen sie Äquivalenzrelationen auf der Menge M dar. Beim Komplement

$$R_1 \setminus R_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

ist jedoch wegen $(1, 1) \notin R_1 \setminus R_2$ die Reflexivität verletzt; folglich ist $R_1 \setminus R_2$ keine Äquivalenzrelation auf der Menge M.