Unendliche Reihen

Def. (Unendliche) Reihe:

(formale) unendliche Summe $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k}_{\text{Folgenglieder der Reihe}}$

Folge $(s_n)_{n\geq 0}$: Folge der Partialsummen der Reihe:

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Grenzwert von $(s_n)_n$ $\underset{s}{\uparrow}$ is: Grenzwert (= Summe) der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

$(s_n)_n$ konvergent $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent

Bsp.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to +\infty$$

Harmonische Reihe: $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}} + \dots$$

$$\sum \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \infty$$

Geometrische Reihe: $\sum_{q \geq 0} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

$$(S_n)_n \to ?$$

I: $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

II: $q \cdot S_n = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$

I − II: $(1-q) \cdot S_n = 1 - q^{n+1}$

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1$$

$q = 1$: $S_n = n+1$

$$S_n = \frac{1 - \overset{\nearrow 0}{q^{n+1}}}{1-q} \to \frac{1}{1-q} \quad \Big| \quad |q| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$q^n \to 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1$$

$|q| \geq 1 \Rightarrow$ divergent

Satz:

falls Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent

$\Downarrow$

Folge $(a_n)_n$ der Reihenglieder ist Nullfolge:

$a_n \to 0$

Anmerkung: • falls Folgenglieder a_n NICHT gegen 0 konvergieren

$\Downarrow$

Reihe <u>divergent</u>

• falls Folgenglieder $a_n \to 0$ konvergieren:
KEIN BEWEIS, daß Reihe konvergent!

Beweis: Reihe konv.:

$$S_n \xrightarrow{n \to \infty} S \text{ Grenzwert}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$\underline{a_n} = \underset{\substack{\downarrow \\ S}}{S_n} - \underset{\substack{\downarrow \\ S}}{S_{n-1}} \to S - S = 0$$

$\Rightarrow \quad a_n \to 0$

Konvergenzkriterien für Reihen

Satz: Cauchykriterium

Reihe $\sum_{k\geq 0} a_k$ konvergent

$\Updownarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon, \quad \forall n \geq m \geq N(\varepsilon)$$

Def.:

Reihe $\sum_{k\geq 0} a_k$ alternierend, falls Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind

Bsp.: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + - \ldots$

Satz: Konvergenzkriterium von Leibniz:

alternierende Reihe $\sum_{k\geq 0} (-1)^k \cdot a_k$, $a_k \geq 0$, für die Folge $(a_n)_n$ eine <u>monoton fallende Nullfolge</u> bildet, ist <u>konvergent</u>

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{2k+1} \qquad a_k = \frac{1}{2k+1}$$

$(a_k)_k$ ... mon. fallende Nullfolge

$\Downarrow$

konvergent

(li: $\frac{\pi}{4}$)

Beweis: $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + - \ldots$

~~s_{2n}: $a_0 - a_1 + a_2$~~

$$s_{2n}: a_0 - \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} - \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} - \ldots - \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow s_{2n} \leq a_0$, $(s_{2n})_n$ ... mon. fallend

$$S_{2n+1}: \underbrace{(a_0 - a_1)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_2 - a_3)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(a_{2n} - a_{2n+1})}_{\geq 0}$$

$(S_{2n+1})_n \dots \nearrow$ mon. wachsend

$$0 \leq S_{2n+1}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \leq & S_{2n+1} & \leq & S_{2n} & \leq & a_0 \\ & & \downarrow \text{mon. wachsend} & & \downarrow \text{mon. fall. GW} & & \\ & & t & & s & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} a_{2n+1} & = & S_{2n} & - & S_{2n+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & s & & t \end{array}$$

$$0 = s - t \Rightarrow s = t$$

$\Rightarrow S_n \to s = t$ konv.

Def.: • $\sum_{k\geq 0} a_k$ absolut konvergent,

falls $\sum_{k\geq 0} |a_k|$ konvergent

• falls $\sum_{k\geq 0} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konv.

$\Downarrow$

bedingt konvergent

Satz: $\sum_{k\geq 0} a_k$ absolut konvergent

$\Downarrow$

$\sum_{k\geq 0} a_k$ konvergent

Beweis Cauchy - Krit.

divergent

Bsp.: $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + -$

$\sum_{k\geq 1} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + -$

$\Downarrow$

konvergent

bedingt konv.

Satz: Majorantenkriterium

Vor.: $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$ Reihen,

$|a_k| \le b_k$ für fast alle n

Falls $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert

konvergente Majorante von $\sum_k a_k$

$\Downarrow$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert (sogar absolut)

Beweis: Cauchy-Kriterium

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \to S$

$\Downarrow$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} b_k\right| < \varepsilon, \quad \forall m, n \ge N(\varepsilon)$$

Reihe a_k:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \le \sum_{k=m}^{n} \underbrace{|a_k|}_{\le b_k} \le \sum_{k=m}^{n} b_k < \varepsilon$$

$\Longrightarrow$ $\sum a_k$ konv.

Satz: Minorantenkriterium

Vor.: $\sum_k a_k$, $\sum_k b_k$ zwei Reihe,

$$0 \le b_k \le a_k$$

falls $\sum_k b_k$ divergent

$$\Downarrow$$

$\sum_k a_k$ divergent

divergente Minorante von $\sum_k a_k$

Satz: Wurzelkriterium

- falls es eine Zahl q gibt, sodaß

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1, \text{ für fast alle } n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ist absolut konvergent}$$

- falls aber

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1, \text{ für unend. viele } n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ ist divergent}$$

Satz: Wurzelkriterium, Limesform

- $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

- $\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent