330.227 Betriebswirtschaftliche Optimierung
ao.Univ.Prof. Mag. DDr. Thomas Dangl

Vorname: ....

Nachname: ....

Matrikelnummer: ....

Studienkennzahl: ....

Aufgabe 1 (25 Punkte):

Firma A produziert 5 Stück eines Produkts pro Zeiteinheit in einem unsicheren Marktumfeld. Die Stückkosten k sind konstant bei EUR 178/Stück. Wir betrachten drei Zeitpunkte $t = 0$, $t = 1$, $t = 2 = T$. Zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ kann produziert werden und zum Marktpreis verkauft werden. Zum Endzeitpunkt T muss die Produktion stillgelegt werden, was Kosten von EUR 121 verursacht. Die Preisentwicklung sieht folgendermaßen aus:

$$p_0 = 200\,/\text{Stück}, \qquad p_1 = \begin{cases} p_{1,u} = 220\,/\text{Stück} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 2/3 \\ p_{1,d} = 160\,/\text{Stück} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1/3 \end{cases}$$

Die Diskontrate ist 10% pro Zeiteinheit. Die Produktion kann jederzeit stillgelegt werden, was die Kosten von EUR 121 entsprechend früher anfallen lässt.

Es ist das Ziel der Firma, den diskontierten Gesamt-Cashflow zu maximieren.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Wenn die Firma zum Zeitpunkt $t = 0$ produziert, erwirtschaftet sie einen Cashflow von EUR 110.

b) Wenn die Firma zum Zeitpunkt $t = 1$ bei einem Preis von 160 produziert und verkauft, dann erzielt sie einen Cashflow von EUR -90.

c) Wenn das Unternehmen entscheidet in $t = 0$ und $t = 1$ zu produzieren, beträgt der Wert V_0 EUR 110.

d) Die optimale Strategie ist es, im Zeitpunkt $t = 0$ zu produzieren und im Zeitpunkt $t = 1$ stillzulegen, wenn der Preis auf EUR 160 / Stück sinkt, aber weiter zu produzieren, wenn der Preis auf EUR 220 / Stück steigt. Der maximale Wert ist V_0 = EUR 133.939.

e) Würde gelten $p_{1,d}$ = 178/Stück, dann wäre es optimal, in $t = 1$ die Produktion in jedem Fall laufen zu lassen.

f) Der Erwartungswert für den Preis bei $t = 1$ ist EUR 200 / Stück.

Aufgabe 2 (25 Punkte):

Firma Z ist ein metallverarbeitender Betrieb. In der Vorweihnachtszeit stanzt das Unternehmen Christbäume und Sterne aus Kupferblech, emailliert sie bunt und verkauft sie als Christbaumschmuck.

Die Stanzmaschine lässt sich in drei unterschiedlichen Einstellungen betreiben.

A: Aus einer Blechplatte werden 2 Christbäume gestanzt, es können 3600 Platten pro Stunde gestanzt werden. Pro Platte wird ein Deckungsbeitrag von EUR 0.2 erzielt.

B: Aus einer Blechplatte werden 5 Sterne gestanzt, es können 3600 Platten pro Stunde gestanzt werden. Pro Platte wird ein Deckungsbeitrag von EUR 0.15 erzielt.

C: Aus einer Blechplatte werden ein Christbaum und 4 Sterne gestanzt. In dieser Einstellung können 3200 Platten pro Stunde gestanzt werden. Pro Platte wird ein Deckungsbeitrag von EUR 0.25 erzielt.

Pro Tag kann maximal 8 Stunden gearbeitet werden. Die maximale Anzahl an Christbäumen, die pro Tag abgesetzt werden kann, ist 19200.

Wieviele Stunden pro Tag soll die Maschine in den Einstellungen A, B und C betrieben werden, wenn der Gesamtdeckungsbeitrag maximiert werden soll.

Das primale Problem wird mit Hilfe der Funktion `lp` in R implementiert (Reihenfolge der Variablen: x_A, x_B, x_C bezeichnen die Anzahl der Stunden, die die Maschine in den Einstellungen A, B und C arbeitet. Reihenfolge der Nebenbedingungen: "Zeit", "Anzahl der Christbäume") und die Lösung in der Variablen `solPrimal` gespeichert. Mit dem Befehl `solPrimal$duals` erhält man als Ausgabe

```
[1] 540.00000 0.08125 -405.00000 0.00000 0.00000
```

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Im primalen Problem sind die Koeffizienten der Zielfunktion: 720, 540, 800

b) Der optimale Zielfunktionswert ist gleich 5880.

c) Die optimale Lösung ist es, die Maschine 2 Stunden/Tag mit Einstellung 2 und 6 Stunden/Tag mit Einstellung 3 zu betreiben.

d) Eine zusätzliche Arbeitsstunde/Tag würde den maximal erzielbaren Deckungsbeitrag um EUR 540/Tag steigern.

e) Im dualen Problem sind die Koeffizienten der Zielfunktion: 8, 19200.

f) Die Nebenbedingungen im dualen System lauten

$$\begin{array}{lcrcl} \lambda_1 & + & 7200\lambda_2 & \geq & 720 \\ \lambda_1 & & & \geq & 540 \\ \lambda_1 & + & 3200\lambda_2 & \geq & 800 \end{array}$$

Aufgabe 3 (25 Punkte):

Portfoliotheorie: Betrachte die drei Projekte 1, 2 und 3 deren Renditen folgende Eigenschaften haben:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.20 \\ 0.25 \\ 0.50 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.0036 & 0.0030 & 0.0020 \\ 0.0030 & 0.0100 & 0.0050 \\ 0.0020 & 0.0050 & 0.0100 \end{pmatrix},$$

mit

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 375 & -100 & -25 \\ -100 & 160 & -60 \\ -25 & -60 & 135 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Das globale Minimum-Varianz-Porfolio hat die Gewichte

$$w^{\text{gmv}} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 0 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

b) Die erwartete Rendite des globalen Minimum-Varianz Portfolios ist 25%.

c) Die Varianz des globalen Minimum-Varianz Portfolios ist 1/300.

d) Zerlegt man das Projekt 1 in

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 0 \\ 1/6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/6 \\ 0 \\ -1/6 \end{pmatrix},$$

dann sind die beiden Komponenten der Zerlegung unkorreliert.

e) Die Rendite des Portfolios

$$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

hat eine Standardabweichung von 6.96%

f) Der Erwartungswert der Rendite des Portfolios

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

ist 26.6667%.

Aufgabe 4 (25 Punkte):

Dynamische Programmierung: Ein Unternehmen kann zu den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$ produzieren und die erzeugten Einheiten zu $t = 3$ um einen Preis von EUR 24.2/Stück absetzen. Zu $t = 1$ und $t = 2$ muss jeweils entschieden werden, entweder 0, 100, 1000 oder 2000 Stück zu produzieren, die Kosten dafür betragen 0, 5000, 30000 bzw. 42000 EUR.

Die Diskontrate ist 10%, es fallen keine Lagerkosten an, zu Beginn ist das Lager leer.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Die Wertefunktion zu $t = 3$ in Abhängigkeit von der Gesamtproduktionsmenge s ist $V_3(s_3) = 24.2s_3$.

b) Wenn zu $t = 2$ der Lagerstand s_2 gleich 100 ist, dann ist es optimal, 2000 Stück zu produzieren und $V_2(100) = 4200$.

c) Es ist nicht optimal, zu $t = 1$ zu produzieren. D.h., in der ersten Periode ist die optimale Produktionsentscheidung $a_1 = 0$.

d) Die Wertefunktion zu $t = 1$ ist $V_1(0) = 1818.18$ EUR.

e) Zu $t = 2$ ist es immer optimal die Maximalmenge von 2000 Stück zu produzieren.

f) Würde man die Produktionskapazität mit 1000 Stück pro Zeiteinheit beschränken, dann würde die Firma überhaupt nicht produzieren.