330.227 Betriebswirtschaftliche Optimierung

Thomas Dangl
thomas.dangl@tuwien.ac.at

Juni 2019

Kursvorbereitung

- Tutoren: Julian Stojaspal (julian.stojaspal@tuwien.ac.at), Irem Kiliç (irem.kilic@tuwien.ac.at)
- Wir werden im Kurs immer wieder das Programmpaket **R** benutzen.
- Bitte laden Sie das Paket von `http://www.r-project.org` und installieren Sie es auf Ihrem PC / Laptop.
- Bitte laden und lesen Sie die kurze Einführung in die Programmiersprache R `http://cran.r-project.org/doc/manuals/R-intro.pdf` und machen Sie sich anhand der darin enthaltenen Beispiele mit den Basics von R vertraut.
- An all jene, die MS-Windows und MS-Excel benutzen: Überlegen Sie, das Paket RExcel (mit der `load packages`-Funktion innerhalb der R-Konsole) zu installieren. Es integriert R perfekt mit MS-Excel.

Literatur

- Die Folien, die ich für die LVA verwende, finden Sie im TISS Informationssystem.
- Weitere Literatur zur Lehrveranstaltung:
  - Adolf Stepan und Edwin O. Fischer (2009) Betriebswirtschaftliche Optimierung, Oldenburg, 8. Auflage.
  - Wayne L. Winston (2003) Operations Research, Applications and Algorithms, Duxbury Press, 4th ed.
  - Daniel Léonard and Ngo van Long (1992) Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics, Cambridge University Press.
  - Mikulas Luptacik (2009) Mathematical Optimization and Economic Analysis, Springer.

  weiterführende Texte:
  - Rangarajan K. Sundaram (1996) A First Course in Optimization Theory, Cambridge University Press. McGrawHill,
  - Kenneth L. Judd (1998) Numerical Methods in Economics, MIT Press.
  - Mario J. Miranda and Paul L. Fackler (2002) Applied Computational Economics and Finance, MIT Press.

Unterrichtseinheiten, Tests

- Die **Unterrichtseinheiten** finden zu folgenden Terminen statt:

Fr. 01.03.2019	09:00-12:30	EI 9	Vorbesprechung + LVA
Di. 05.03.2019	12:00-13:30	HS 17	LVA
Fr. 08.03.2019	09:00-12:30	EI 9	LVA
Di. 12.03.2019	12:00-13:30	HS 17	LVA
Fr. 15.03.2019	09:00-12:30	EI 9	LVA
Fr. 29.03.2019	09:00-12:30	EI 9	LVA
Di. 04.06.2019	12:00-13:30	HS 17	LVA
Fr. 14.06.2019	09:00-11:00	EI 9	LVA
Di. 18.06.2019	12:00-13:30	HS 17	LVA

- **midterm-Test**: 22.03.2019, 14:00-16:00, FH HS1.
- **final-Test**: 21.06.2019, 17:00-19:00, FH HS1.
- Anfang des Wintersemesters 2019/20 gibt es einen **Ersatztest**.
- Für die **Tests** gibt es eine **separate Anmeldung**.
- Zu den Tests bitte einen **nicht programmierbaren** Taschenrechner mitbringen.

Beurteilungskriterien

- Beide Prüfungen tragen jeweils 30% zur Gesamtnote bei.
- Die Vorbereitung und Ausarbeitung von Beispielen trägt weitere 20% zur Note bei.
- Nicht-angekündigte Zwischentests zählen insgesamt 20%.
- Durch aktive Mitarbeit, z.B. Hinweis auf Fehler / Typos in den Unterlagen etc. können bis zu 10%-Punkte zusätzlich erzielt werden.
- Mindestens 50% sind notwendig, um die Lehrveranstaltung positiv abzuschließen.
- Wenn Sie am Ersatztest teilnehmen:
  - Haben Sie einen Test versäumt (mid-term oder final), wird dieser durch den Ersatztest ersetzt.
  - Nehmen Sie an allen drei Tests teil, dann wird das schlechteste der drei Ergebnisse gestrichen!
- Final und Ersatztest haben den gesamten Semesterstoff zum Inhalt.

Notenschlüssel

- Der Gesamtscore (berechnet anhand der Beschreibung auf vorhergehender Seite) führt folgendermaßen zu Ihrer Note:

$$
\begin{array}{rclrl}
 & & \text{score} & < 50\% & : 5 \\
50\% & \leq & \text{score} & < 62\% & : 4 \\
62\% & \leq & \text{score} & < 74\% & : 3 \\
74\% & \leq & \text{score} & < 86\% & : 2 \\
86\% & \leq & \text{score} & & : 1
\end{array}
$$

Agenda

1. Einleitung
2. Motivation
3. Statische Optimierung
   - Gleichheitsnebenbedingungen: Die Methode von Lagrange
   - Ungleichheitsnebenbedingungen: Die Methode von Kuhn-Tucker
   - Anwendung: Lineare Optimierung
4. Dynamische Optimierung
   - Das Bellman - Prinzip

Beispiel Gewinnoptimierung (1)

Gewinnoptimierung

Ein Unternehmen produziert das Gut A und setzt es auf dem Produktmarkt ab. Der Preis, den das Unternehmen beim Absatz von x_A Einheiten in der Betrachtungsperiode erzielen kann, ist durch die Preis-Absatz Relation $p = p(x_A)$ beschrieben. Die Kosten, die mit der Produktion von x_A Einheiten des Gutes A verbunden sind, betragen $K(x_A)$. Wie soll die Produktionsmenge gewählt werden, um das Unternehmensergebnis in der Betrachtungsperiode zu optimieren?

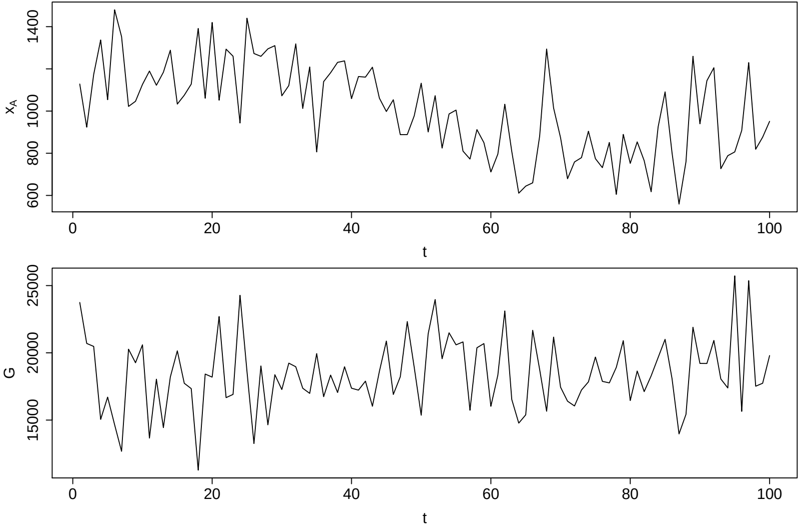
x_A	...	Produktionsmenge im Betrachtungszeitraum
$p(x_A)$	...	Preis, der auf dem Absatzmarkt erzielt werden kann
$K(x_A)$	...	Kosten, die mit der Produktion von x verbunden sind
$G(x_A)$	...	Periodengewinn $G = px - K$

Planungsziel:

$$G(x_A) \to_{x_A} \max$$

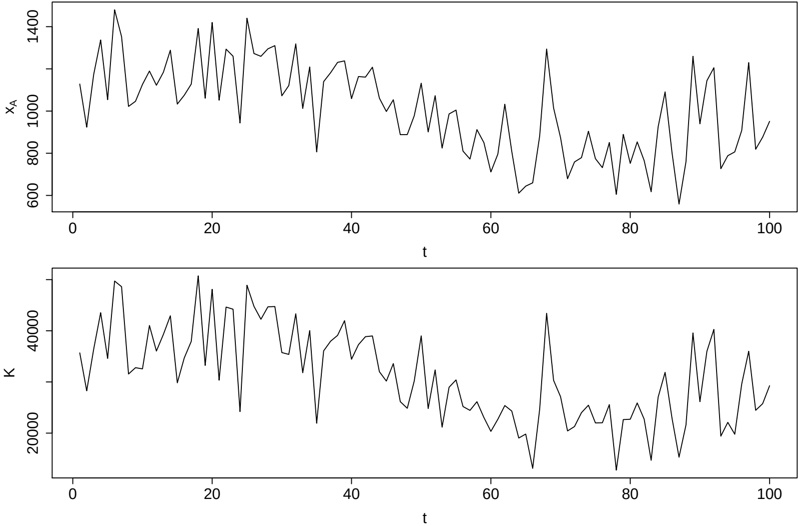
Beispiel Gewinnoptimierung (2)

- Das Unternehmen beobachtet die Kenngrößen x_A, p, K und G über 100 Perioden hinweg: Wie hängt G von x_A ab?



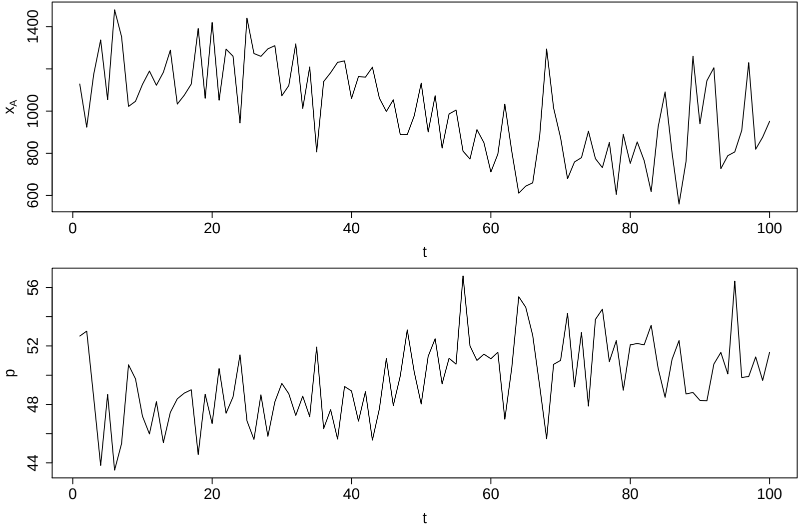
Beispiel Gewinnoptimierung (3)

- Kosten und Produktionsmenge zeigen einen positiven Zusammenhang



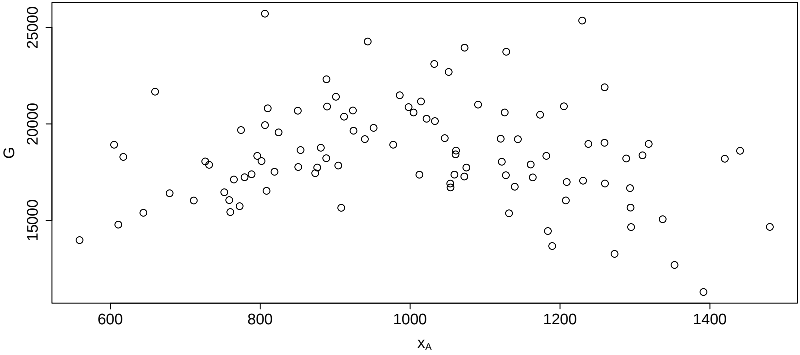
Beispiel Gewinnoptimierung (4)

- Der erzielbare Preis und die Produktionsmenge zeigen einen leicht negativen Zusammenhang:



Beispiel Gewinnoptimierung (5)

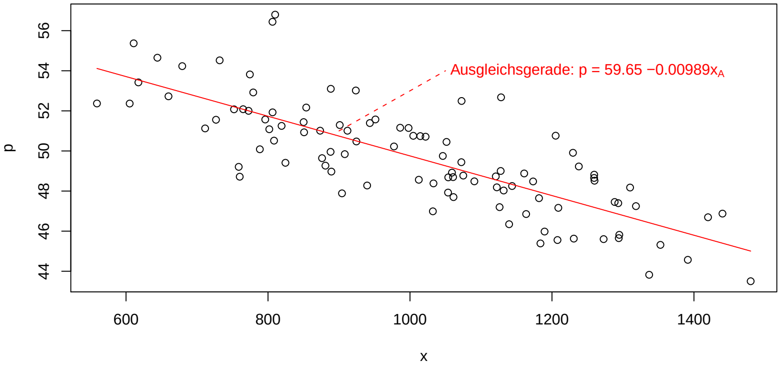
- Die richtige Darstellung der Daten gibt uns schon einen besseren Einblick. Ein Scatterplot:



Beispiel Gewinnoptimierung (6)

- Bevor wir die Optimierungsaufgabe lösen können, müssen wir die funktionalen Zusammenhänge zwischen p, K und x_A kennen.
- Wir nähern die Preis-Absatz-Relation durch eine lineare Gleichung an:

$$\hat{p} = a_p + b_p x_A$$



Beispiel Gewinnoptimierung (7)

- Einschub: Die Anpassung der Daten durch eine Ausgleichsgerade ist selbst wieder ein Optimierungsproblem!

Ausgleichsgerade (OLS-Gerade für *Ordinary Least Squares*)

Die beobachteten Produktionsmengen bezeichnen wir mit $x_{A,i}$, mit $i = 1, 2, \ldots, 100$. Und die dazugehörigen Beobachtungen für die Marktpreise mit p_i.
Eine lineare Anpassung der Daten ist gegeben durch die Werte $a, b \in \mathbb{R}$

$$\hat{p}_i = a + bx_{A,i}.$$

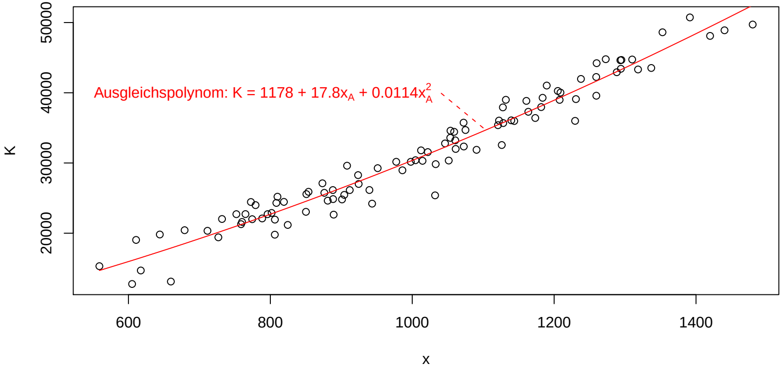
Die Ausgleichsgerade ist jene, welche die Summe der quadratischen Abweichungen minimiert. Optimierungsziel:

$$\sum_{i=1}^{100} (p_i - \hat{p}_i)^2 \rightarrow_{a,b} \min$$

Beispiel Gewinnoptimierung (8)

- Die Kostenfunktion $K(x_A)$ nähern wir durch quadratisches Polynom an

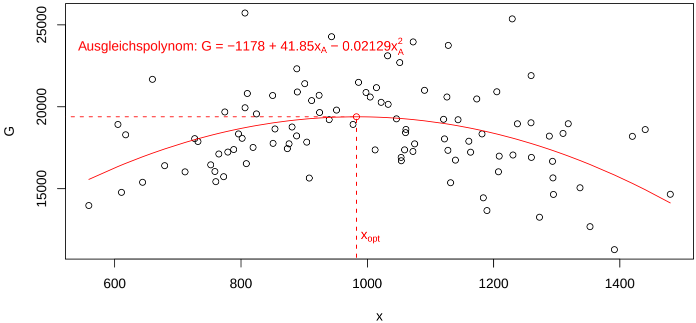
$$K = a_K + b_K x_A + c_K x_A^2$$



Beispiel Gewinnoptimierung (9)

- Wir sind nun in der Lage, ein einfaches Modell des Unternehmens aufzustellen:

$$
\begin{aligned}
E &\approx \hat{p}(x_A)x_A = (59.65 - 0.00989x_A)x_A \\
K &\approx \hat{K}(x_A) = 1178 + 17.8x_A + 0.0114x_A^2 \\
G = E - K &\approx \hat{p}(x_A)x_A - \hat{K}(x_A) \\
&= -1178 + 41.85x_A - 0.02129x_A^2
\end{aligned}
$$



Beispiel: Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren (1)

Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren

Der Produktionsprozess eines Unternehmens wird durch die Produktionsfunktion beschrieben, die den Einsatz der Produktionsfaktoren (Inputs) in Relation zur Produktionsmenge (Output) setzt.

$$x_A = f(r_1, r_2, \ldots, r_n)$$

mit

x_A	$\ldots$	Produktionsmenge im Betrachtungszeitraum
r_i	$\ldots$	Menge des Produktionsfaktors i, die in der Produktion zum Einsatz kommt

Die variablen Kosten, die bei der Produktion im Betrachtungszeitraum anfallen, sind gegeben durch

$$K_v(x_A) = \sum_{i=1}^{n} q_i r_i, \quad q_i \ldots \text{ Faktorpreis des Faktors } i.$$

Beispiel: Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren (2)

Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren (cont.)

Planungsziel a:

$$x_A \rightarrow_{(r_1,r_2,\ldots,r_n)} \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_A &= f(r_1, r_2, \ldots, r_n) \\ K_v(x_A) &= \bar{K} = \text{const.} \end{aligned}$$

Planungsziel b:

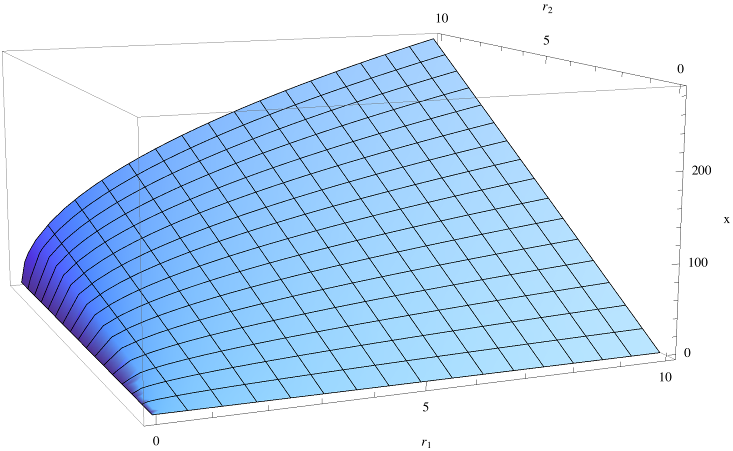
$$K_v(x_A) \rightarrow_{(r_1,r_2,\ldots,r_n)} \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} x_A &= f(r_1, r_2, \ldots, r_n) \\ x_A &= \text{const.} \end{aligned}$$

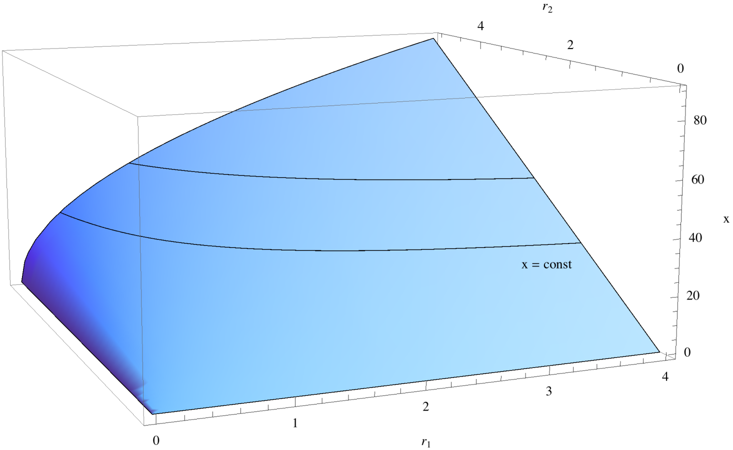
Beispiel: Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren (3)

- Beispiel einer Produktionsfunktion:



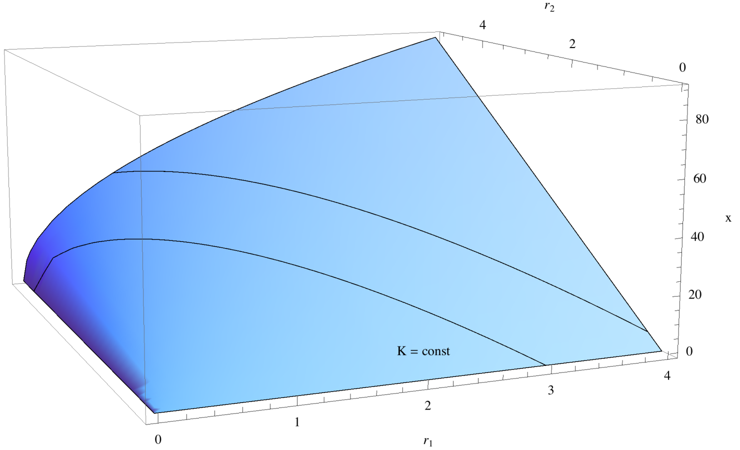
Beispiel: Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren (4)

- Isoquante: Derselbe Output kann mit unterschiedlichen Faktorkombinationen erzeugt werden.



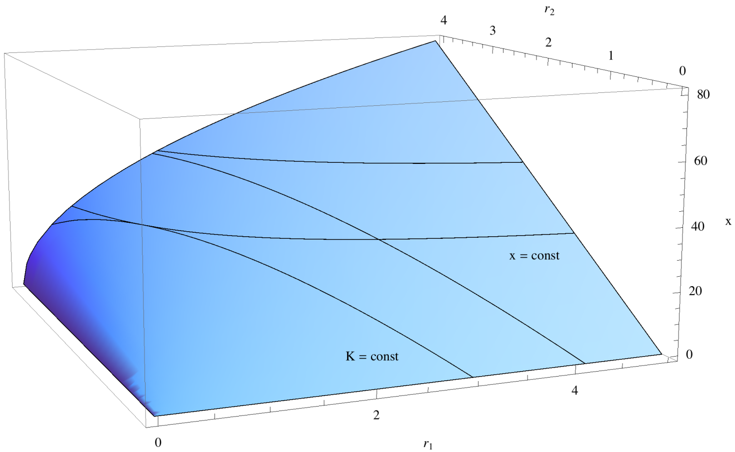
Beispiel: Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren (5)

- Isokostenlinie: Unterschiedliche Ausbringungsmengen verursachen dieselben variablen Kosten



Beispiel: Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren (6)

- Beispiel einer Produktionsfunktion (Minimalkosten-Kombination – Maximal-Ausbringungs-Kombination)



Beispiel: Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren (7)

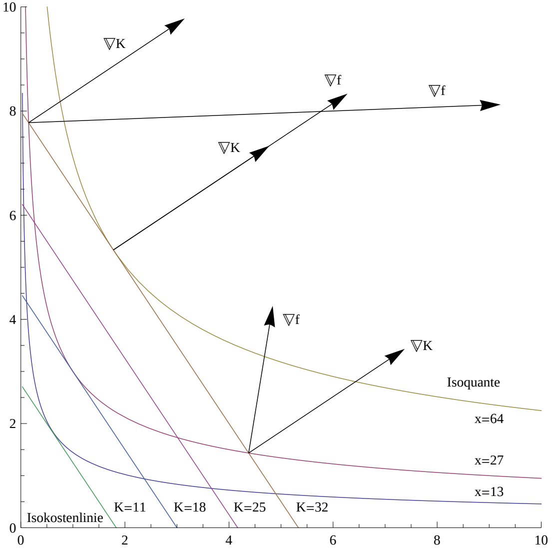
- Konkretes Beispiel, 2 Inputfaktoren, 1 Outputfaktor:

$$\begin{aligned} x = f(r_1, r_2) &= 9\sqrt{r_1}\, r_2 \\ q_1 &= 6 \text{ EUR / Einheit} \\ q_2 &= 4 \text{ EUR / Einheit} \end{aligned}$$

- Maximalausbringungskombination:
  - Maximiere die Ausbringungsmenge bei variablen Kosten von EUR 32,-.
- Minimalkostenkombination:
  - Minimiere die variablen Kosten bei einer Ausbringungsmenge von 27 Einheiten.
- Mit ∇f (Gradient von f) bezeichnen wir die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktion f, mit ∇K (Gradient von K_v) die Richtung des stärksten Anstiegs der Kostenfunktion, genaue Definition kommt später.

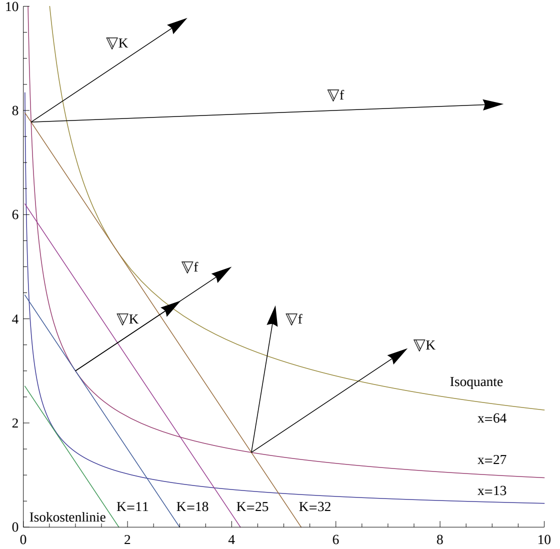
Beispiel: Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren (8)

- Maximalausbringungskombination bei $K_v = 32$.



Beispiel: Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren (9)

- Minimalkostenkombination bei $x = 27$.



Mean-Variance-Efficiency (1)

Mean-Variance-Efficiency

Ein Unternehmen überlegt, einen bestimmten Betrag für eine Zeitperiode in eine Reihe von Projekten P_i zu investieren, $i = 1, 2, \ldots, n$. Eine Investition von k EUR in Projekt i bringt am Ende der Zeitperiode eine Einzahlung in der Höhe von $(1 + r_i)k$.

Allerdings ist die Rendite r_i unsicher! Das Unternehmen ist aber in der Lage, den Erwartungswert und die Varianz / Kovarianz der Renditen zu bestimmen.

$$E(r_i) = \mu_i, \qquad \Sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(r_i, r_j).$$

Wie muss das Unternehmen die Projektinvestitionen gewichten, wenn es bei gegebener Ertragserwartung das geringstmögliche Gesamtrisiko (gemessen als Varianz der Einzahlungen) eingehen will?

Mean-Variance-Efficiency (2)

- Erinnere:
- Erwartungswerte addieren sich linear!
- Beispiel mit 2 Projekten: w_1 und w_2 sind die Gewichte der Projekte P_1 und P_2 mit $w_1 + w_2 = 1$

$$E(w_1 r_1 + w_2 r_2) = w_1 E(r_1) + w_2 E(r_2) = w_1 \mu_1 + w_2 \mu_2$$

- Die Varianz ist ein quadratisches Konzept!

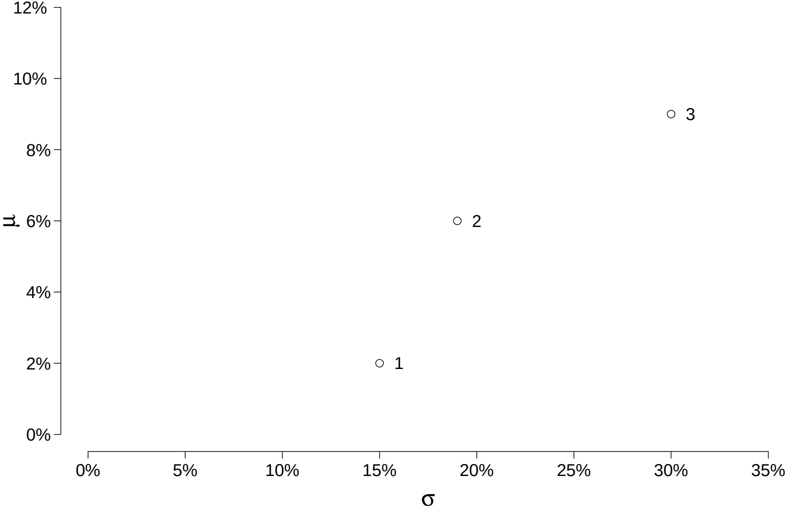
$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(w_1 r_1 + w_2 r_2) &= w_1^2 \mathrm{Var}(r_1) + 2 w_1 w_2 \mathrm{Cov}(r_1, r_2) + w_2^2 \mathrm{Var}(r_2) \\ &= w_1^2 \sigma_1^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{1,2} + w_2^2 \sigma_2^2 \end{aligned}$$

- Konkretes Beispiel:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 2\% \\ \mu_2 &= 6\% \\ \mu_3 &= 9\% \end{aligned} \quad , \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.0225 & 0.0114 & 0.0135 \\ 0.0114 & 0.0361 & 0.0228 \\ 0.0135 & 0.0228 & 0.0900 \end{pmatrix}$$

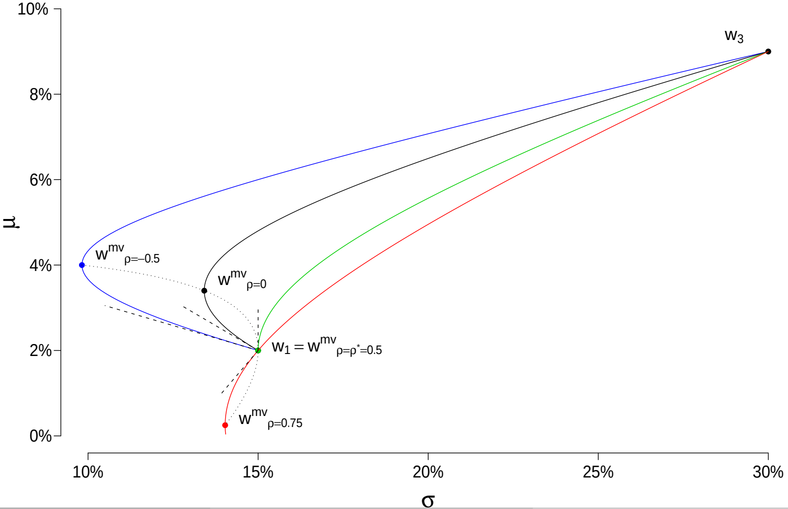
Mean-Variance-Efficiency (3)

- Ertrags- / Risikorelation der drei Projekte in der $\mu - \sigma$ - Darstellung:



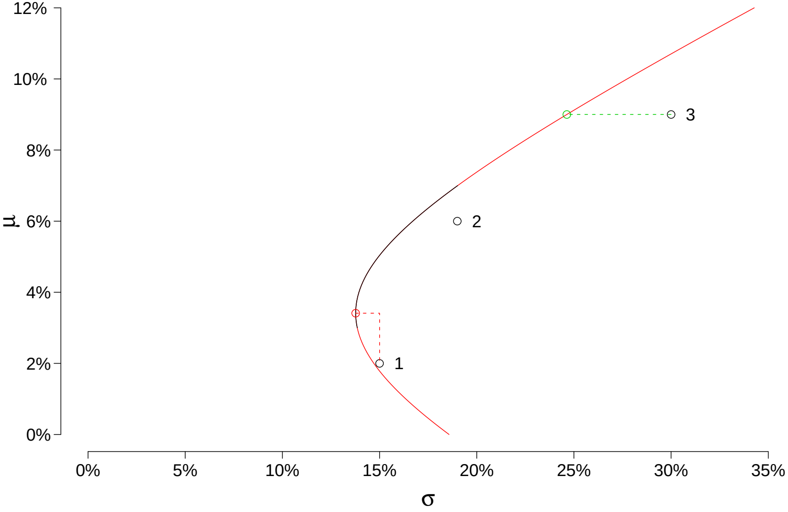
Mean-Variance-Efficiency (4)

- Je nach Korrelation kann die Bildung von Portfolien die Ertrags- / Risikorelation verbessern, hier Projekt 1 kombiniert mit Projekt 3:



Mean-Variance-Efficiency (5)

- Mean-Variance-Frontier: Minimales Risiko bei gegebener Rendite



Optimale Kapazitätsanpassung (1)

Optimale Kapazitätsanpassung

Ein Unternehmen produziert an der Kapazitätsgrenze von $x = 1$ Einheit / Zeiteinheit in einem unsicheren Marktumfeld. Der Abnahmepreis für die Erzeugung folgt einem stochastischen Prozess p_t mit

$$p_{t+\Delta t} = \begin{cases} p_t * u & \ldots \text{Wahrscheinlichkeit:} \quad \pi, \\ p_t * d & \ldots \text{Wahrscheinlichkeit:} \quad 1 - \pi, \end{cases}$$

mit $u > 1$ und $d = 1/u$. Die Stückkosten pro Zeiteinheit sind konstant gleich k. D.h., im Zeitintervall $[t, t + \Delta t)$ erwirtschaftet das Unternehmen einen Cashflow von $c_t = (p_t - k)x\Delta t$.

Das Unternehmen hat in jedem Zeitpunkt $t \leq T$ die Möglichkeit
(i) gegen Zahlung der Investitionskosten I die Kapazität auf $x = 5$ zu erhöhen,
(ii) die Produktion gegen die Zahlung des Betrages D dauerhaft einzustellen.

Optimale Kapazitätsanpassung (2)

Optimale Kapazitätsanpassung (cont.)

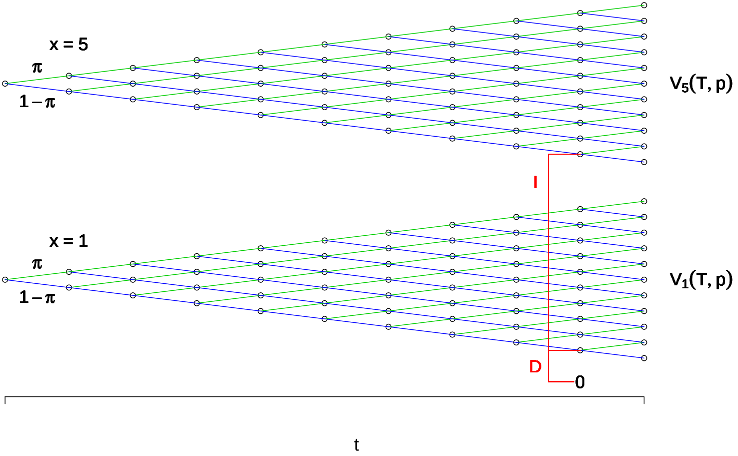
Optimierungsziel: In welchen Entscheidungsknoten soll das Unternehmen investieren, in welchen Entscheidungsknoten soll das Unternehmen die Produktion stilllegen, um den Erwartungswert der Summe der diskontierten Cashflows zu maximieren

$$V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{E(c_t)}{(1+r)^t} \rightarrow_{\text{Investitionsstrategie}} \max$$

- Bilden einen ”Baum” für den Preisprozess über die Zeit.
- Arbeiten mit Rückwärtsinduktion (Bellman-Prinzip).

Optimale Kapazitätsanpassung (3)

- Bewertung beider Kapazitäten auf dem Baum:



Optimierung ohne Nebenbedingungen (1)

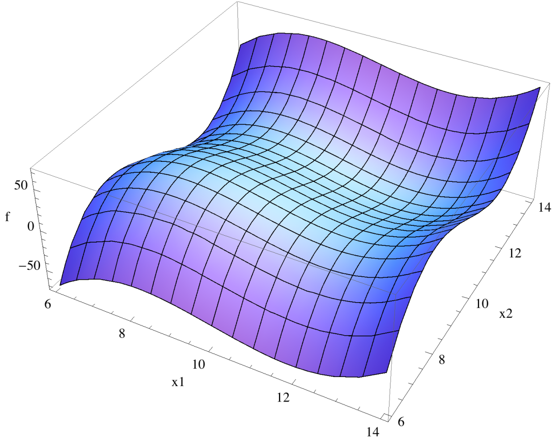
- Problemstellung: Wähle endlich viele Variablen mit dem Ziel, eine Zielfunktion zu maximieren (minimieren).
  - in manchen Fällen sind die Werte dieser Variablen unbeschränkt,
  - in anderen Fällen sind die Werte der Variablen durch Gleichheits- oder Ungleichheitsbedingungen beschränkt.
- Wir werden das Kernkonzept der Konkavität (Konvexität) definieren und es mit "angenehmen" Optimierungsproblemen assoziieren.

Annahme: Differenzierbarkeit

Wenn nicht anders definiert, sind alle Funktionen, die wir verwenden, C^2, d.h., sie sind zweimal stetig differenzierbar.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (2)

- Wähle Werte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)' \in \mathbb{R}^n$ mit dem Ziel, die reellwertige Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zu maximieren.
- Betrachte folgendes Beispiel
  $f(x_1, x_2) = 300 - (10 - x_1)^3 - 10x_1 - 2(10 - x_2)^3 - 20x_2$



Optimierung ohne Nebenbedingungen (3)

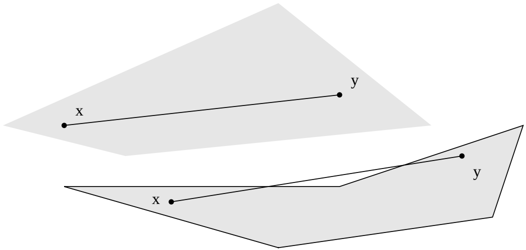
Def. Konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Betrachte eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn gilt

$$x, y \in D \Rightarrow [tx + (1-t)y] \in D, \quad \forall t \in [0, 1],$$

dann heißt D konvex.

- Beispiele:



Optimierung ohne Nebenbedingungen (4)

Def. Innerer Punkt

Ein Punkt $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt innerer Punkt der Menge D, wenn gilt $\exists r > 0$, sodass

$$\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } ||\tilde{x} - x|| < r \Rightarrow \tilde{x} \in D,$$

wobei ||.|| die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

- D.h., zu jedem inneren Punkt von D gibt es eine Umgebung, die selbst wieder vollständig in D enthalten ist.

Def. Randpunkt

Ein Punkt $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt Randpunkt der Menge D, wenn x kein innerer Punkt der Menge D ist.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (5)

- Illustration: Innerer Punkt und Randpunkt

Optimierung ohne Nebenbedingungen (6)

Def. Offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$

Die Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ wenn gilt
$\forall x \in D \quad \exists r > 0$, sodass

$$\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|\tilde{x} - x\| < r \Rightarrow \tilde{x} \in D,$$

wobei $\|.\|$ die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

- D.h., jedes $x \in D$ ist ein innerer Punkt.

Def. Konvexe Hülle

Sei $G = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ eine Menge von Punkten im $\mathbb{R}^n$, dann nennt man

$$HG = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \text{ mit } \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1\}$$

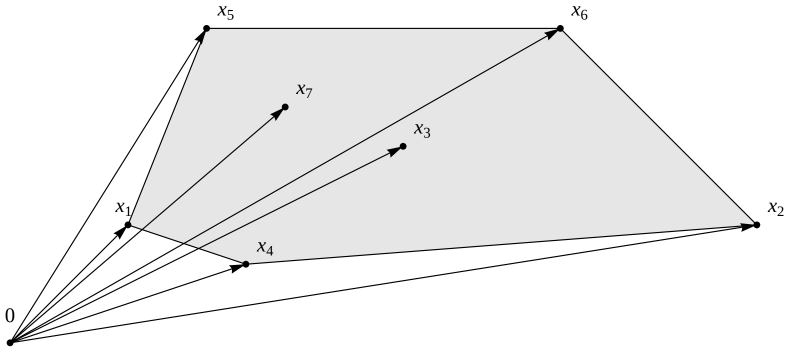
die konvexe Hülle von G.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (7)

Konvexe Kombination

Einen Punkt x aus der konvexen Hülle der x_i nennt man auch eine konvexe Kombination der x_i.

- Illustration: Konvexe Hülle



Optimierung ohne Nebenbedingungen (8)

Annahme: Definitionsbereiche von Zielfunktionen

Wenn nicht anders erwähnt, betrachten wir nur Zielfunktionen, deren Definitionsbereich eine konvexe und offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

Def: Isoquante

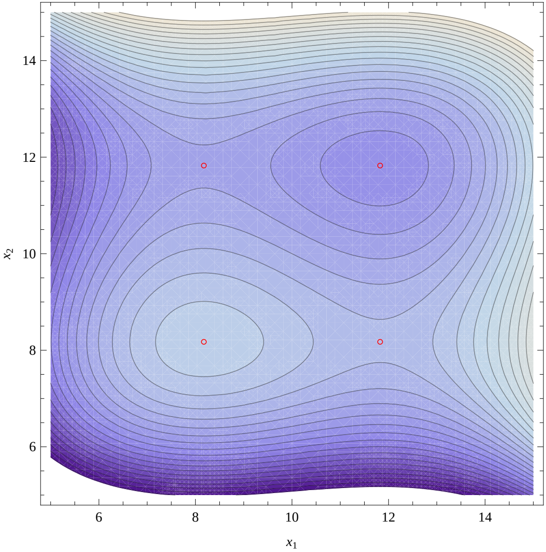
Die Isoquante einer reellwertigen Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zu einem Level $\bar{y}$ ist definiert als

$$\text{Isoquante}_{\bar{y}} = \{x \in D | f(x) = \bar{y}\}.$$

- Isoquanten zu bestimmten Levels können auch leer sein ($\{\}$). Isoquanten müssen nicht zusammenhängend sein.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (9)

- Isoquanten zur oben definierten Funktion:



Optimierung ohne Nebenbedingungen (10)

Def: Optimierung ohne Nebenbedingung – Globales Maximum

Betrachte die Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Finde $x^* \in D$, sodass

$$x^* \in \text{argmax}_{x \in D} f(x)$$

I.e., $f(x^*) \geq f(x), \forall x \in D$. Dann ist x^* ein globales Maximum.

- Aber manchmal ist ein Maximum nur ein Maximalwert in einer bestimmten Umgebung, d.h., die Maximum-Eigenschaften gelten nur lokal. Siehe Beispiel oben.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (11)

Def: Lokales Maximum

x^* heißt lokales Maximum, wenn $\exists r > 0$, sodass

$$f(x^*) \geq f(x) \quad \forall x \in D \text{ mit } \|x - x^*\| < r$$

Def: Gradient

Der Gradient einer reellwertigen Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine vektorwertige Funktion $f_x : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \nabla f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Optimierung ohne Nebenbedingungen (12)

- Wertet man den Gradienten der Funktion f an einem bestimmten Punkt $\bar{x}$ aus, so zeigt dieser Gradientenvektor $f_x(\bar{x})$ die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion f in Punkt $\bar{x}$ an.
- Weiters definiert $f_x(\bar{x})$ die Tangentialebene an f im Punkt $\bar{x}$.
- Der Gradient ist immer orthogonal zur Isoquante.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (13)

- Die Hesse'sche Matrix ist jene Matrix, welche die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f enthält.

Def. Hesse'sche Matrix

Die Hesse Matrix f_{xx} ist die symmetrische $n \times n$ Matrix erzeugt durch

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{H}f := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Achtung: Die Hesse'sche Matrix ist eine matrix-wertige Funktion.
- Unsere Annahmen garantieren, dass f_{xx} auf dem gesamten Definitionsbereich D der Funktion f existiert.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (14)

- Um eine Funktion an einem beliebig gewählten Punkt $\bar{x}$ zu linearisieren, d.h., um die Funktion durch ihre Tangentialebene zu approximieren, verwenden wir Taylor's Theorem.

Taylor-Reihen Entwicklung erster Ordnung

Betrachte $\bar{x}, x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, dann können wir schreiben

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})' f_x(\bar{x}) + R_1(\bar{x}, x)$$

mit

$$R_1(\bar{x}, x) = \frac{1}{2}(x - \bar{x})' f_{xx}(x_t)(x - \bar{x}).$$

mit $x_t = t\bar{x} + (1 - t)x$ für ein $t \in [0, 1]$. Weiters gilt,

$$\lim_{x \to \bar{x}} \left(\frac{R_1(\bar{x}, x)}{||x - \bar{x}||} \right) = 0.$$

wobei ||.|| die Euklidische Norm bezeichnet. D.h., $R_1(\bar{x}, x) = o(||x - \bar{x}||)$.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (15)

Linearisierung oder lineare Approximation

Wir approximieren die Funktion f an einem beliebig gewählten Punkt $\bar{x}$, indem wir Terme der Ordnung $o(\|x - \tilde{x}\|)$ ignorieren

$$f(x) \approx \hat{f}(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})' f_x(\bar{x})$$

- In unserem Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 300 - (10 - x_1)^3 - 10x_1 - 2(10 - x_2)^3 - 20x_2 \\ \hat{f}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= f\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}\right]' \begin{pmatrix} -10 + 3(10 - \bar{x}_1)^2 \\ -20 + 6(10 - \bar{x}_2)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Siehe die **R** Implementierung `Taylor.R` für eine Illustration.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (16)

Notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung

Angenommen x^* ist ein Maximum von f, d.h., $f(x^*) \geq f(x)\ \forall x \in D$, dann folgt daraus

$$f_x(x^*) = 0.$$

- D.h., an einem Maximum müssen alle partiellen Ableitungen von f gleich 0 sein. In anderen Worten: Die Tangentialebene an f im Punkt x^* muss waagrecht sein.
- Angenommen, x^* ist ein Maximum, aber $f_x(x^*) \neq 0$. Dann lässt sich in einer Umgebung von x^* ein Wert $\tilde{x}$ finden, sodass $f(\tilde{x}) > f(x^*)$.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (17)

- Um die Krümmung einer Funktion zu erfassen, verwenden wir eine Taylor-Approximation 2. Ordnung

Taylor-Reihen Entwicklung zweiter Ordnung

Betrachte $\bar{x}, x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, dann können wir schreiben

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})' f_x(\bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})' f_{xx}(\bar{x})(x - \bar{x}) + R_2(\bar{x}, x)$$

mit

$$\lim_{x \to \bar{x}} \left(\frac{R_2(\bar{x}, x)}{\|x - \bar{x}\|^2} \right) = 0.$$

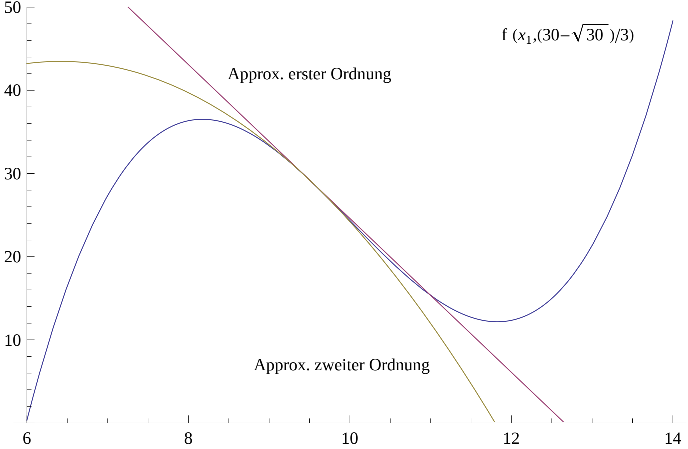
d.h., $R_2(\bar{x}, x) = o(\|x - \bar{x}\|^2)$.

- Die Approximation einer Funktion f in einem (lokalen) Maximum durch eine Taylor-Reihen Entwicklung zweiter Ordnung ergibt

$$f(x) = f(x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)' f_{xx}(x^*)(x - x^*) + o(\|x - x^*\|^2)$$

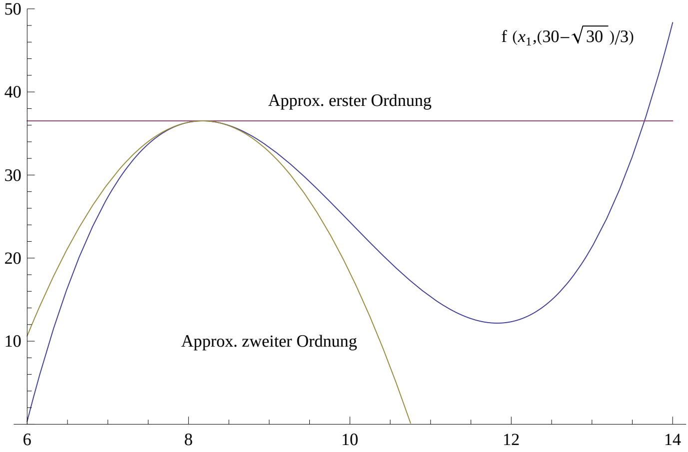
Optimierung ohne Nebenbedingungen (18)

- Ein Schnitt durch die oben definierte Funktion $f(x_1, x_2)$ bei $x_2 = (30 - \sqrt{30})/3$ + Approximationen erster und zweiter Ordnung bei $x_1 = 9.5$.



Optimierung ohne Nebenbedingungen (19)

- Ein Schnitt durch die oben definierte Funktion $f(x_1, x_2)$ bei $x_2 = (30 - \sqrt{30})/3$ + Approximationen erster und zweiter Ordnung bei $x_1 = (30 - \sqrt{30})/3$.



Optimierung ohne Nebenbedingungen (20)

- `Taylor.R` bietet eine 3D-Illustration der Taylor-Approximation für das Beispiel unter der Anwendung des Packages `rgl`.

Def. Definitheit

Betrachte eine symmetrische Matrix A mit der Eigenschaft

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x'Ax \leq 0,$$

dann nennt man A negativ-semidefinit.
Wenn

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \Rightarrow x'Ax < 0$$

dann heißt A negativ-definit.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (21)

Th: Notwendige Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung

Wenn $f(x)$ in x^* ein (lokales) Maximum annimmt, dann folgt daraus: f_{xx} ist *negativ-semidefinit* in x^*.

- Angenommen, es existiert ein x, sodass $x' f_{xx}(\bar{x})x > 0$. Dann kann man zeigen, dass es in einer Umgebung von x^* ein $\tilde{x}$ geben muss, sodass $f(\tilde{x}) > f(x^*)$.
- Warum reicht es nicht, dass gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n?$$

- Betrachte das folgende Beispiel

$$f(x_1, x_2) = -(x_1^2) + a x_1 x_2 - (x_2^2)$$

für unterschiedliche Werte von $a \geq 0$.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (22)

- Der Gradient von f ist

$$f_x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_1 + ax_2 \\ -2x_2 + ax_1 \end{pmatrix}.$$

- Unabhängig von a erfüllt der Punkt $x = (0, 0)'$ die Bedingung 1. Ordnung für ein Maximum.
- Die Hesse'sche Matrix von f ist gegeben durch

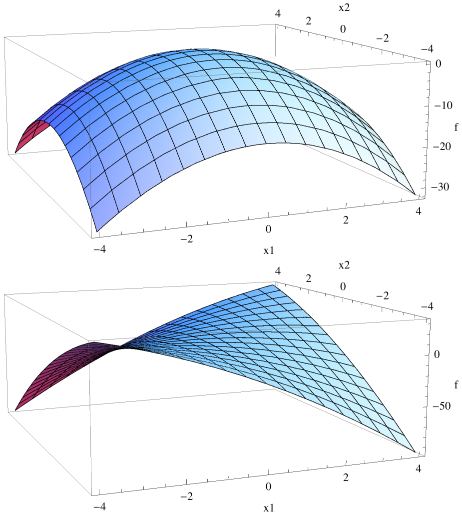
$$f_{xx}(x) = \begin{pmatrix} -2 & a \\ a & -2 \end{pmatrix},$$

d.h., die zweiten partiellen Ableitungen sind beide negativ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -2 < 0$$

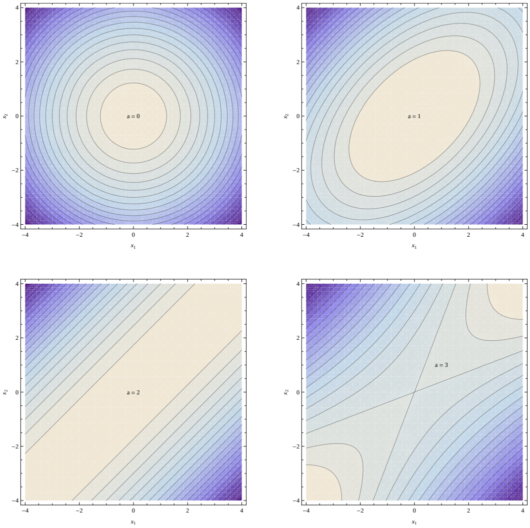
Optimierung ohne Nebenbedingungen (23)

- Aber, je nach Wahl von a ist der Punkt $(0, 0)'$ ein Maximum oder ein Sattelpunkt.



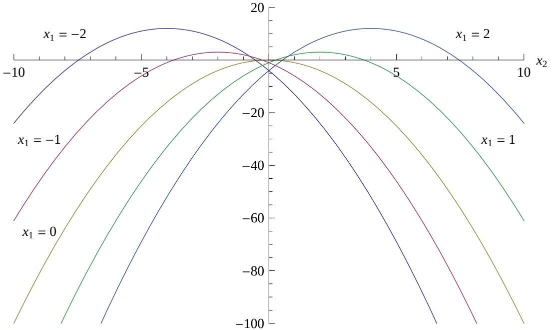
Optimierung ohne Nebenbedingungen (24)

- Die Isoquanten für unterschiedliche Werte von a



Optimierung ohne Nebenbedingungen (25)

- Das Skript `SaddlePoint.R` zeigt das Beispiel als 3D-Grafik.
- Schnitte entlang der Achsen sind aber immer negativ gekrümmt, hier Schnitte parallel zur x_2-Achse für $a = 4$.



Optimierung ohne Nebenbedingungen (26)

- Wie prüft man nun die Definitheit einer Matrix?

Def: Minor

Sei A eine $(n \times n)$ Matrix, dann ist der r-te *Minor* B_r die Determinante jener Matrix, die man erhält, wenn man die letzten $n - r$ Reihen und die letzten $n - r$ Spalten von A löscht.

Th: Definitheit

Eine $(n \times n)$ symmetrische Matrix A ist negativ-definit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A negativ sind.
A ist negativ-semidefinit genau dann, wenn alle Eigenwerte von A nicht-positiv sind.

- A ist reellwertig und symmetrisch. Der Spektralsatz für selbstadjungierte lineare Abbildungen garantiert, dass alle Eigenwerte reellwertig sind.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (27)

- Die Matrix A ist negativ-definit, wenn ihre Minoren im Vorzeichen alternieren, beginnend mit einem negativen Vorzeichen. Oder, anders formuliert, wenn
$$(-1)^r B_r > 0.$$
- Achtung: Semi-Definitheit kann nicht mit Hilfe der Minoren geprüft werden.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (28)

- Nun das Ganze für Minima:
- Die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung für ein (lokales) Minimum bei einem Wert x^* ist identisch mit der notwendigen Optimalitätsbedingung erster Ordnung für ein (lokales) Maximum.
- Die notwendige Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung für ein (lokales) Minimum verlangt, dass die quadratische Form $y' f_{xx} y \geq 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$.

Def. Definitheit (cont.)

Betrachte eine symmetrische Matrix A mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x' A x \geq 0$$

dann heißt A positiv-semidefinit.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (29)

Def. Definitheit (cont.)

Wenn

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \Rightarrow x'Ax > 0$$

dann heißt A positiv-definit.

- Prüfung der Definitheit einer Matrix:

Th: Definitheit (cont.)

Eine $(n \times n)$ symmetrische Matrix A ist positiv-definit genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix positiv sind.
Sie ist positiv-semidefinit genau dann, wenn alle Eigenwerte nicht-negativ sind.

- Eine Matrix A ist positiv-definit genau dann, wenn alle Minoren der Matrix positiv sind.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (30)

Th: Notwendige Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung (cont.)

$f(x)$ erreicht ein (lokales) Minimum bei x^*, dann folgt daraus f_{xx} ist *positiv-semidefinit* bei x^*.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (31)

- Hinreichende Bedingungen für ein (lokales) Maximum (Minimum) sind etwas strenger als es die notwendigen Bedingungen sind. Denn Semi-Definitheit der Hesse'schen Matrix reicht nicht aus, um daraus eindeutig auf einen Extremwert schließen zu können.

Th: Hinreichende Bedingung

Wenn gilt $f_x(x^*) = 0$ und $f_{xx}(x^*)$ ist negativ-definit, dann erreicht $f(x)$ in x^* ein lokales Maximum.

- Anmerkung: Wie schon im Beispiel über den Sattelpunkt erwähnt, reicht es für ein Maximum von f in x^* nicht, dass die zweite partielle Ableitung von f bezüglich jeder Variable negativ ist, d.h., $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
- Es gibt mitunter Richtungen, wo f positive Krümmung hat!

Optimierung ohne Nebenbedingungen (32)

- Für ein (lokales) Minimum lautet die hinreichende Bedingung dann analog.

Th: Hinreichende Bedingung (cont.)

Wenn gilt $f_x(x^*) = 0$ und $f_{xx}(x^*)$ ist positiv definit, dann erreicht $f(x)$ in x^* ein lokales Minimum.

- Anmerkung: Auch hier ist es nicht ausreichend, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} > 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Denn es kann mitunter Richtungen geben, welche nicht parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen, wo die Krümmung von f negativ ist!

Optimierung ohne Nebenbedingungen (33)

- Wir wollen nun ein paar globale Resultate für konkave und konvexe Funktionen ableiten.
- Zuerst drei verschiedene Definitionen von Konkavität.

Def. a: Konkavität

f C^2 definiert auf einer konvexen Menge D ist konkav genau dann, wenn f_{xx} negativ-semidefinit auf ganz D ist.

Def. b: Konkavität

f C^1 definiert auf einer konvexen Menge D ist konkav genau dann, wenn

$$f(\tilde{x}) - f(\bar{x}) \leq (\tilde{x} - \bar{x})' f_x(\bar{x}), \quad \forall \tilde{x}, \bar{x} \in D.$$

Optimierung ohne Nebenbedingungen (34)

Def. c: Konkavität

f, definiert auf einer konvexen Menge D, ist konkav genau dann, wenn

$$f(t\,\bar{x} + (1-t)\tilde{x}) \geq t f(\bar{x}) + (1-t) f(\tilde{x}),$$

$\forall 0 \leq t \leq 1$, und $\forall \tilde{x}, \bar{x} \in D$.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (35)

- Mit Hilfe des Konzepts der Konkavität können wir globale, hinreichende Bedingungen für ein Maximum formulieren.

Th. Hinreichende Optimalitätsbedingung für konkave Funktionen

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) eine konkave Funktion, dann nimmt sie in $x^* \in D$ ein globales Maximum an, genau dann, wenn $f_x(x^*) = 0$.

- Das Konzept der Konvexität (nun von Funktionen im Gegensatz zur Konvexität von Mengen, die wir schon kennen) hilft uns, hinreichende Bedingungen für globale Minima zu formulieren.
- Daher zuerst analog zur Definition der Konkavität hier drei Definitionen von Konvexität.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (36)

Def. a: Konvexität

f C^2 definiert auf einer konvexen Menge D ist konvex genau dann, wenn f_{xx} positiv-semidefinit auf ganz D ist.

Def. b: Konvexität

f C^1 definiert auf einer konvexen Menge D ist konvex genau dann, wenn

$$f(\tilde{x}) - f(\bar{x}) \geq (\tilde{x} - \bar{x})' f_x(\bar{x}), \quad \forall \tilde{x}, \bar{x} \in D.$$

Def. c: Konvexität

f definiert auf einer konvexen Menge D ist konvex genau dann, wenn

$$f(t\,\bar{x} + (1-t)\tilde{x}) \leq t f(\bar{x}) + (1-t) f(\tilde{x}),$$

$\forall 0 \leq t \leq 1$, und $\forall \tilde{x}, \bar{x} \in D$.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (37)

- Nun können wir hinreichende Bedingungen für ein globales Minimum formulieren

Th. Hinreichende Optimalitätsbedingung für konvexe Funktionen

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) eine konvexe Funktion, dann nimmt sie in $x^* \in D$ ein globales Minimum an, genau dann, wenn $f_x(x^*) = 0$.

- Wie findet man einen Extremwert numerisch? Eine Möglichkeit: Das Newton-Verfahren.
- Es sei x^* ein lokales Maximum und f_{xx} ist negativ-definit in einer Umgebung von x^*.
- Wähle eine Startlösung x_0 in der Umgebung von x^* und betrachte eine Taylor-Approximation zweiter Ordnung von f in x_0. Der Gradient dieser Approximation ist dann gegeben durch

$$\hat{f}_x(x) = f_x(x_0) + f_{xx}(x_0)(x - x_0).$$

Optimierung ohne Nebenbedingungen (38)

- Eine Verbesserung der Startlösung wird nun errechnet, indem man den Gradienten der Approximation gleich Null setzt: $\hat{f}_x = 0$.
- Wir erhalten folgende Iterationsformel

$$x_{i+1} = x_i - (f_{xx}(x_i))^{-1} f_x(x_i)$$

- Achtung: Es gibt Fälle, wo das Newton-Verfahren nicht konvergiert!
- Siehe `simpleNewton.R` für eine **R** Implementierung, siehe auch die Hilfeseiten für die Funktion `nlm`.
- Achtung: Das Newton-Verfahren sucht nach Punkten mit $f_x = 0$, d.h., es unterscheidet nicht zwischen Maxima, Minima und Sattelpunkten.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (39)

- Abschließend noch ein Beispiel:

Bsp: Versorgung zweier Märkte

Ein Unternehmen versorgt zwei voneinander separierte Märkte mit den folgenden Preis-Absatz-Relationen

$$\begin{aligned} p_1 &= 200 - 2x_1, \\ p_2 &= 100 - x_2. \end{aligned}$$

Die Kostenfunktion des Unternehmens ist

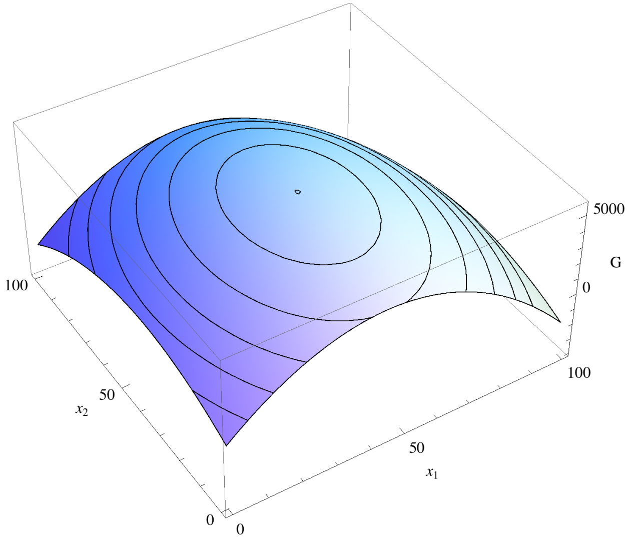
$$K(x_1, x_2) = 20(x_1 + x_2).$$

Wie soll das Unternehmen optimal die Preise in den beiden Märkten setzen, um den Gewinn zu maximieren

$$G(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - K(x_1, x_2) \to_{x_1, x_2} \max?$$

Optimierung ohne Nebenbedingungen (40)

- Graphische Darstellung der Gewinnfunktion:



Optimierung ohne Nebenbedingungen (41)

- Einsetzen in die Preis-Absatz Relationen ergibt

$$G(x_1, x_2) = (200 - 2x_1)x_1 + (100 - x_2)x_2 - 20(x_1 + x_2).$$

- Daraus folgt der Gradient

$$\nabla G = \begin{pmatrix} -4x_1 + 180 \\ -2x_2 + 80 \end{pmatrix}$$

und die Hesse'sche Matrix

$$G_{xx} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Als Kandidat für ein Extremum finden wir

$$\nabla G = 0, \qquad x^* = \begin{pmatrix} 45 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Optimierung ohne Nebenbedingungen (42)

- Die Matrix G_{xx} ist negativ-definit (unabhängig von x), denn die beiden Minoren sind

$$B_1 = -4 < 0, \quad B_2 = \left| \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right| = 8 > 0.$$

- Daher ist die Gewinnfunktion konkav.
- Der ermittelte Kandidat ist daher ein globales Maximum!
- Die optimalen Preise in den beiden Märkten sind dann

$$\begin{aligned} p_1 &= 110 \\ p_2 &= 60. \end{aligned}$$

Optimierung ohne Nebenbedingungen (43)

- Beispiel (63), Seite 120, Hollnsteiner und Kopel, Übungsbuch zur Betriebswirtschaftlichen Optimierung, 2.Aufl., München/Wien (Oldenbourg) 1999.
- Der Unternehmer Mike Donalds hat mit der Produktion seines Gutes eine Monopolstellung.
  - Produktion zu konstanten Grenzkosten $c =$ EUR 20/Einheit
- Der Unternehmer Mick Donalds hat beim Vertrieb dieses Gutes eine Monopolstellung.
  - Lineare Preis-Absatz-Relation: $p = 60 - \frac{x}{100}$ EUR/Einheit

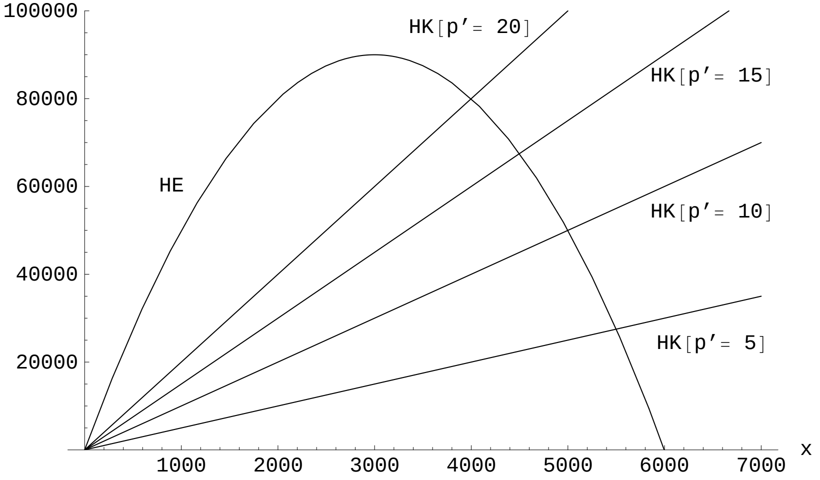
Optimierung ohne Nebenbedingungen (44)

- a) Wie setzt der Produzent Mike Donalds den Zwischenhandelspreis p' optimal (= gewinnoptimal), wenn beide ihr Monopol ausüben wollen (nicht integrierte Struktur-ni)? Deckungsbeiträge für Produzent und Händler? Konsumentenrente?
- Deckungsbeitrag des Händlers HDB^{ni}:
  - Erlös: HE$^{ni} = px = (60 - \frac{x}{100})x$,
  - Kosten: HK$^{ni} = p'x$,

$$\Rightarrow \text{HDB}^{ni} = \text{HE}^{ni} - \text{HK}^{ni} = (60 - p')x - \frac{x^2}{100} \quad (1)$$

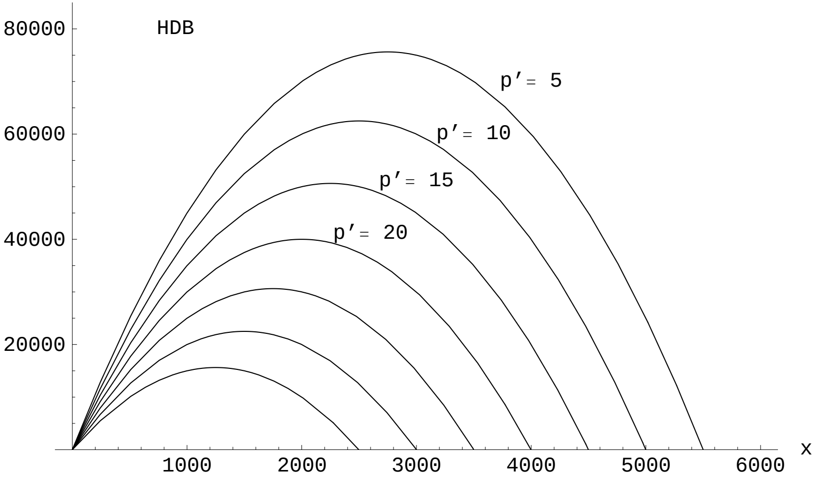
Optimierung ohne Nebenbedingungen (45)

- Erlös- und Kostenfunktion des Händlers (Mick Donalds):



Optimierung ohne Nebenbedingungen (46)

- Deckungsbeitrag des Händlers für verschiedene p':



Optimierung ohne Nebenbedingungen (47)

- Optimale Wahl der Absatzmenge (durch Setzung des entsprechenden Endverbraucherpreises) durch den Händler:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\mathrm{HDB}^{ni}(x, p') &= 0 \\ \Rightarrow \quad x &= 3\,000 - 50p' \end{aligned}$$

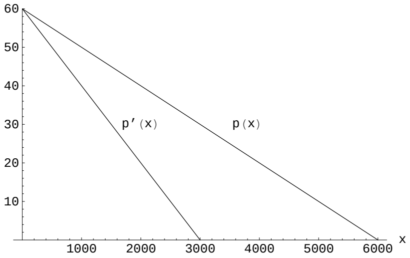
- Produzent ‘sieht’ folgende lineare Preis-Absatz-Relation

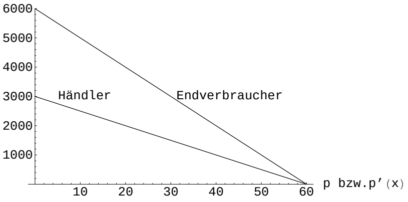
$$p' = 60 - \frac{x}{50} \tag{2}$$

- ⇒ durch die Ausübung des Handelsmonopols durch den Händler zeigt der (optimale Zwischenhandels-) Preis eine höhere Sensitivität gegenüber Änderungen im Absatz als das auf dem Endverbrauchermarkt der Fall ist (und umgekehrt: Die Absatzmenge ist sensitiver gegenüber Preisänderungen.).

Optimierung ohne Nebenbedingungen (48)

- Preis-Absatz-Relationen auf dem Endverbrauchermarkt und im Zwischenhandel (als Funktion der Absatzmenge bzw. des Preises)





Optimierung ohne Nebenbedingungen (49)

- Deckungsbeitrag des Produzenten PDB^{ni}:
  - Erlös: PE$^{ni} = p' x = (60 - \frac{x}{50})x$,
  - Kosten: PK$^{ni} = cx = 20x$,

$$\Rightarrow \text{PDB}^{ni} = \text{PE}^{ni} - \text{PK}^{ni} = 40x - \frac{x^2}{50} \tag{3}$$

- Optimale Wahl der Absatzmenge (durch Setzung des entsprechenden Zwischenhandelspreises) durch den Produzenten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\text{PDB}^{ni}(x) &= 0 \\ \Rightarrow \quad x &= 1\,000 \\ p' &= \text{EUR } 40/\text{Einheit} \end{aligned} \tag{4}$$

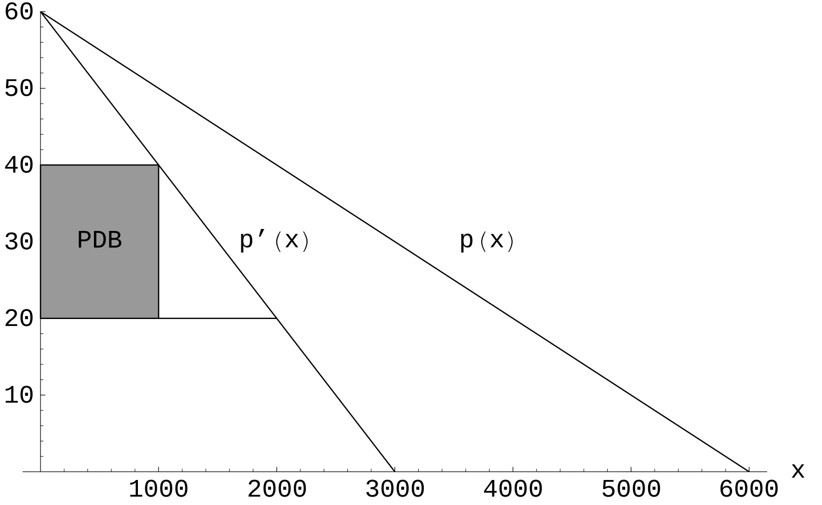
Optimierung ohne Nebenbedingungen (50)

- Einsetzen von $x = 1\,000$ in die Preis-Absatz-Relation des Endverbrauchermarktes

$$\begin{aligned} p &= 60 - \frac{x}{100} \\ \Rightarrow \quad p &= \text{EUR } 50/\text{Einheit} \end{aligned} \tag{5}$$

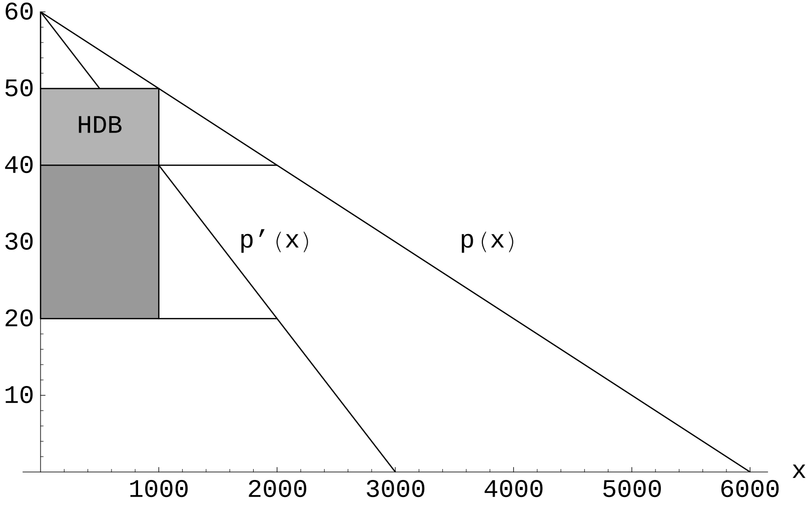
Optimierung ohne Nebenbedingungen (51)

- Produzent maximiert seinen Deckungsbeitrag PDB^{ni} unter Antizipation des Verhaltens des Händlers, Illustration:



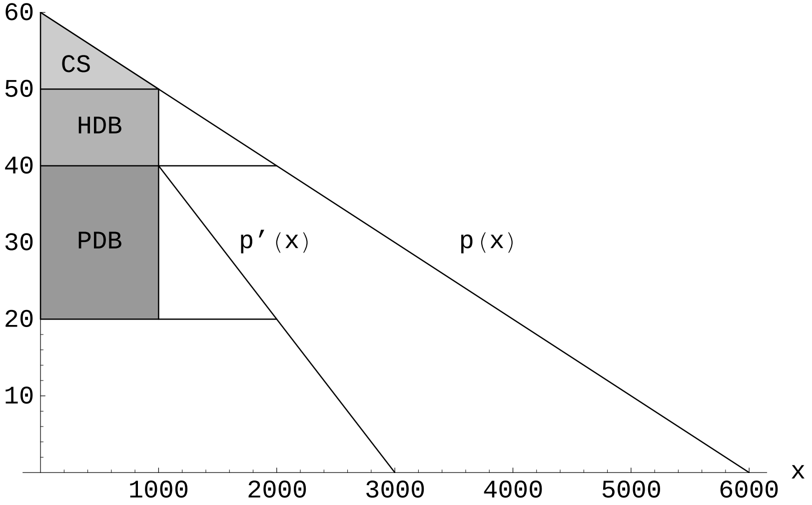
Optimierung ohne Nebenbedingungen (52)

- Händler maximiert seinen Deckungsbeitrag HDB^{ni} unter Vorgabe des Zwischenhandelspreises p', Illustration:



Optimierung ohne Nebenbedingungen (53)

- Konsumentenrente CS^{ni} entsprechend der Zahlungsbereitschaft der Konsumenten, Illustration:



Optimierung ohne Nebenbedingungen (54)

- Deckungsbeiträge:

$$\begin{aligned}
\text{HDB}^{ni} &= (60 - p')x - \frac{x^2}{100} \\
&= 20\,000 - 10\,000 = \text{EUR } 10\,000 \qquad (6) \\
\text{PDB}^{ni} &= 40x - \frac{x^2}{50} \\
&= 40\,000 - 20\,000 = \text{EUR } 20\,000 \qquad (7)
\end{aligned}$$

- Konsumentenrente:

$$\text{CS}^{ni} = (p^0 - p) * x/2 = \text{EUR } 5\,000 \qquad (8)$$

Optimierung ohne Nebenbedingungen (55)

- b) Was passiert, wenn Produzent und Händler mergen, d.h., als ein Unternehmen auftreten?
- Zwischenhandel fällt weg, Unternehmen maximiert den gesamten Deckungsbeitrag DB^i:
  - Erlös: $\mathrm{E}^i = px = 60x - \frac{x^2}{100}$
  - Kosten: $\mathrm{K}^i = cx = 20x$

$$\Rightarrow \mathrm{DB}^i = \mathrm{E}^i - \mathrm{K}^i = 40x - \frac{x^2}{100} \tag{9}$$

Optimierung ohne Nebenbedingungen (56)

- Optimale Wahl der Absatzmenge (durch Setzung des entsprechenden Endverbraucherpreises):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\mathsf{DB}^i(x) &= 0 \\ \Rightarrow \quad x &= 2000 \\ p &= \text{EUR } 40/\text{Einheit} \end{aligned} \tag{10}$$

- Deckungsbeitrag:

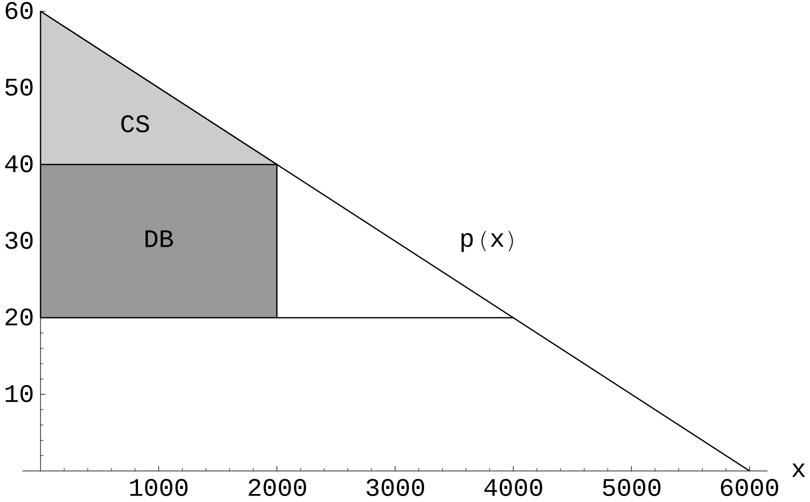
$$\mathsf{DB}^i = (p - c)x = \text{EUR } 40\,000 \tag{11}$$

- Konsumentenrente:

$$\mathsf{CS}^i = (p^0 - p) * x/2 = 20 * 2\,000/2 = \text{EUR } 20\,000 \tag{12}$$

Optimierung ohne Nebenbedingungen (57)

- Deckungsbeitrag und Konsumentenrente bei integrierter Struktur, Illustration:



Optimierung ohne Nebenbedingungen (58)

- c) Wie profitieren die Konsumenten von einem nichtlinearen Zwischenhandelspreis?
- Wir wissen von vorhin, dass Konsumenten und Produzent+Händler von einer integrierten Struktur profitieren.
- In die Preissetzung fließen nur die variablen Kosten ein (Fixkosten fallen bei der Optimalitätsbedingung erster Ordnung weg).
- Dasselbe Ergebnis wie bei integrierter Struktur lässt sich durch einen Zwischenhandelspreis $p' = c = 20$EUR /Einheit implementieren (dabei verdient der Produzent nichts).
- Damit auch der Produzent etwas verdient, wird ein Fixbetrag (Franchise) A vereinbart.

Optimierung ohne Nebenbedingungen (59)

- Gewinn des Produzenten PG bzw. des Händlers HG:

$$\begin{aligned} \text{PG} &= -cx + cx + A = A &(13)\\ \text{HG} &= px - cx - A = 40x - \frac{x^2}{100} - A &(14) \end{aligned}$$

- Optimale Entscheidung des Händlers:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\text{HG}(x) &= 0 \\ \Rightarrow \quad x &= 2\,000 &(15)\\ p &= \text{EUR } 40/\text{Einheit} \end{aligned}$$

Optimierung ohne Nebenbedingungen (60)

- Zu einer Einigung kommt es nur, wenn

$$\begin{aligned}\text{HG} &= 40\,000 - A \geq \text{HDB}^{ni} = \text{EUR } 10\,000 \\ \text{PG} &= A \geq \text{PDB}^{ni} = \text{EUR } 20\,000.\end{aligned}$$

- Daher gilt für A:

$$\text{EUR } 20\,000 \leq A \leq \text{EUR } 30\,000 \tag{16}$$

- Wie der zusätzliche Gewinn von EUR $10\,000$ zwischen Produzent und Händler aufgeteilt wird, hängt von der jeweiligen Verhandlungsmacht ab und ist durch die Angaben nicht bestimmt.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (1)

- Typischerweise sind wir bei der Suche nach dem Optimum der Zielfunktion in der Wahl von x durch Nebenbedingungen eingeschränkt:
  - Konsumenten haben Budgetbeschränkungen,
  - die Gesellschaft hat Ressourcenbeschränkungen,
  - etc.

Das klassische Optimierungsproblem unter Gleichheitsnebenbedingungen

Finde $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)'$ welches $f(x)$ maximiert (minimiert), unter Erfüllung der Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} h^1(x_1, \ldots, x_n) &= b_1, \\ &\vdots \qquad\qquad m \leq n. \\ h^m(x_1, \ldots, x_n) &= b_m, \end{aligned}$$

Mit f als *Zielfunktion* und $h^j = b_j,\ j = 1, \ldots, m,$ als *Nebenbedingungen*.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (2)

- Formuliere die Nebenbedingungen erst einmal um:

Das klassische Optimierungsproblem unter Gleichheitsnebenbedingungen (L.1)

Finde $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)'$ welches $f(x)$ maximiert (minimiert), unter Erfüllung der Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl} g^1(x_1,\dots,x_n) = b_1 - h^1(x_1,\dots,x_n) & = & 0, \\ & \vdots & \qquad m \le n. \\ g^m(x_1,\dots,x_n) = b_m - h^m(x_1,\dots,x_n) & = & 0, \end{array}$$

- Arbeite im Folgenden fast ausschließlich mit g.
- Ausnahme: Wenn wir uns die Frage stellen, wie sich der optimale Zielfunktionswert ändert als Reaktion auf eine Änderung der rechten Seite einer Beschränkung b_i.

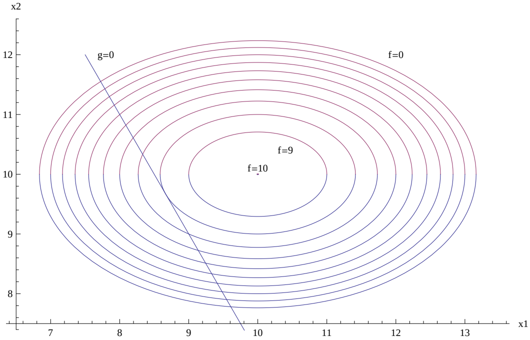
Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (3)

- Beispiel: Maximiere die Zielfunktion

$$f(x_1, x_2) = 10 - (10 - x_1)^2 - 2(10 - x_2)^2.$$

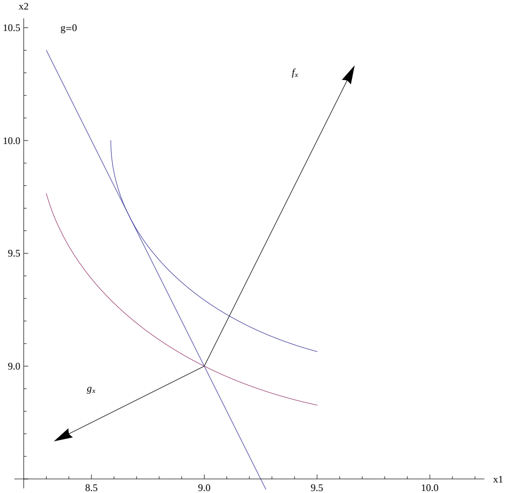
unter Einhaltung von

$$g(x_1, x_2) = 27 - 2x_1 - x_2 = 0.$$



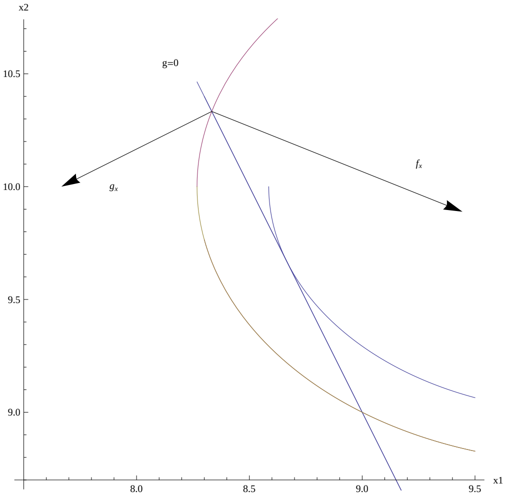
Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (4)

- Vergleiche den Gradienten an die Zielfunktion f_x mit dem Gradienten an die Nebenbedingung g_x an einem nicht optimalen Punkt $(x_1, x_2)'$.



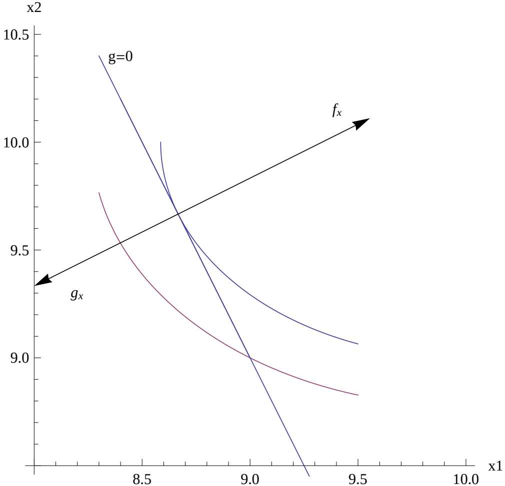
Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (5)

- Vergleiche den Gradienten an die Zielfunktion f_x mit dem Gradienten an die Nebenbedingung g_x an einem nicht optimalen Punkt $(x_1, x_2)'$.



Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (6)

- Im Optimum muss der Gradient an die Zielfunktion f_x parallel zum Gradienten an die Nebenbedingung g_x sein, d.h., f_x muss ein Vielfaches von g_x sein, $f_x(x^*) = \lambda g_x(x^*)$, Multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}$.



Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (7)

- Wir werden diese Idee nun formalisieren und dafür die Dimension des Problems erweitern (indem wir die oben erwähnten Multiplikatoren einführen) und definieren die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ folgendermaßen.

Def. Die Lagrange Funktion

Wir definieren die Lagrange Funktion $\mathcal{L}$ als

$$\mathcal{L}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot g^j(x_1, \ldots, x_n),$$

oder in kompakterer Schreibweise

$$\mathcal{L}(\lambda,\ x) = f(x) + \lambda' \cdot \mathbf{g}(x).$$

- Interaktive Beispiele zur Intuition hinter dem Lagrange-Formalismus finden Sie hier: http://showcase.imw.tuwien.ac.at/

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (8)

- Wir definieren nun eine Matrix, welche die ersten Ableitungen der gs enthält, mit den Gradienten in den Zeilen. D.h. die Matrix ist $(m \times n)$.

Def. G

Definiere die $(m \times n)$ Matrix G als

$$G = \left[\frac{\partial g^j}{\partial x_i} \right]_{j,i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g^m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g^m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (9)

Th. Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung

Wenn x^* eine Lösung des Problems (L.1) ist und die $(m \times n)$ Matrix G den vollen Rang m hat (das ist die sog. *Rang-Bedingung*), dann existiert ein eindeutiger Vektor $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)' \in \mathbb{R}^m$, sodass

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\lambda = \mathbf{g}(x^*) &= 0, \\ \mathcal{L}_x = f_x(x^*) + G'(x^*) \cdot \lambda &= 0. \end{aligned}$$

- Das erste Gleichungssystem der Optimalitätsbedingung erster Ordnung besagt, dass im Optimum alle Randbedingungen erfüllt sein müssen.
- Das zweite Gleichungssystem besagt, dass im Optimum der Gradient an die Zielfunktion als eine Linearkombination der Gradienten an die Nebenbedingungen geschrieben werden kann.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (10)

- Im Detail lautet das gesamte Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = g^1(x^*) &= 0, \\
&\vdots \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m} = g^m(x^*) &= 0, \\
\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = f_{x_1}(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j_{x_1}(x^*) &= 0, \\
&\vdots \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = f_{x_n}(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j_{x_n}(x^*) &= 0.
\end{aligned}
$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (11)

- Etwas mehr Intuition.
- Angenommen x^* ist ein Maximum unter Einhaltung der Nebenbedingungen. Jede kleine erlaubte Änderung in x muss

$$d\mathbf{g} = 0 = G(x^*)dx$$

  erfüllen. D.h., eine Variation dx ist erlaubt, wenn sie nicht zur Verletzung einer Nebenbedingung führt.
- Die Optimalitätsbedingung erster Ordnung verlangt nun, dass so eine erlaubte, geringfügige Variation bei x^* zu

$$df = f_x'(x^*)dx = 0$$

  führt, ansonsten führt eine Variation dx oder $-dx$ zu einer marginalen Verbesserung des Zielfunktionswertes.
- D.h., wir verlangen nicht, dass der Gradient $f_x(x^*)$ gleich 0 ist (so wie das beim unbeschränkten Optimum der Fall ist), sondern nur, dass $f_x(x^*) = 0$ in ”erlaubte Richtungen”.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (12)

- Also, jede erlaubte, marginale Variation dx die $G\,dx = 0$ erfüllt, muss auch $f_x' dx = 0$ erfüllen, d.h., jedes dx, welches das System aus m linearen Gleichungen in n Variablen erfüllt

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{\partial g^1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial g^1}{\partial x_n} dx_n & = & 0, \\
\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial g^m}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial g^m}{\partial x_n} dx_n & = & 0,
\end{array}
$$

  muss auch

$$
\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0
$$

  erfüllen.
- f_x muss daher eine Linearkombination der g_x sein. Und da der Rang von G gleich m ist, sind die Gewichte λ dieser Linearkombination eindeutig.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (13)

- Was passiert, wenn $m = n$ gilt?
- Die Rang-Bedingung sagt, dass die $(m \times n)$ Matrix G der Gradienten an die Nebenbedingungen in jedem lokalen Extremwert x^* den vollen Zeilenrang m haben muss.
- Wenn $m = n$, ist G eine quadratische Matrix mit vollem Zeilenrang und daher invertierbar.
- Wenn x^* ein lokaler Extremwert ist, dann ist dx eine Änderung in x, die durch die Nebenbedingungen erlaubt ist, wenn gilt

$$\begin{aligned} G(x^*)dx &= d\mathbf{g} = 0 \\ \exists G^{-1}(x^*) \quad \Rightarrow \quad dx &= G^{-1}0 = 0 \end{aligned}$$

- D.h., im durch die Nebenbedingungen erlaubten Bereich sind die Exremstellen isolierte Punkte. Und daher automatisch lokales Maximum und auch lokales Minimum.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (14)

- Was passiert, wenn die Rang-Bedingung nicht erfüllt ist?
- Dann,
  - sind möglicherweise die Gewichte nicht eindeutig bestimmt (das Gleichungssystem ist überbestimmt),
  - kann es u.U. unmöglich sein, f_x als Linearkombination der g_x zu schreiben (der Fall von "Krallen").
- Wir werden ein Beispiel für eine "Kralle" später sehen.
- Aber zuerst gehen wir zurück zu unserem Beispiel

$$f(x_1, x_2) = 10 - (10 - x_1)^2 - 2(10 - x_2)^2.$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x_1, x_2) = 27 - 2x_1 - x_2 = 0.$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (15)

- Die Lagrange Funktion des Problems lautet

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = 10 - (10 - x_1)^2 - 2(10 - x_2)^2 + \lambda(27 - 2x_1 - x_2).$$

- Aus der notwendigen Bedingung erster Ordnung folgen die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} &= 2(10 - x_1) - 2\lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} &= 4(10 - x_2) - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 27 - 2x_1 - x_2 = 0
\end{aligned}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (16)

- Die ersten beiden Gleichungen sind äquivalent zu

$$\nabla f + \lambda \nabla g = 0,$$

  also der Gradient an f ist eine Linearkombination der Gradienten an die gs (hier nur eine Nebenbedingung!)
- Die letzte Gleichung fordert die Erfüllung der Nebenbedingung.
- Eliminiert man aus den ersten beiden Gleichungen λ, dann bleibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 27, \\ x_1 - 4x_2 &= -30. \end{aligned}$$

  Daraus folgt als Kandidat für ein Maximum

$$x_1^* = \frac{26}{3}, \quad x_2^* = \frac{29}{3}, \quad f(x_1^*, x_2^*) = 8.$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (17)

- Für den Lagrange Multiplikator λ ermitteln wir

$$\lambda = \frac{4}{3}.$$

- Warum interessiert uns der Lagrange Multiplikator?
- Angenommen, wir haben Nebenbedingungen der Form

$$h^i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_i,$$

dann können wir schreiben

$$g^i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_i - h^i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

- Das ist z.B. bei Budgetbeschränkungen, Ressourcenbeschränkungen, Isoquanten, Iso-Kostenlinien etc. der Fall.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (18)

- Die Änderung des optimalen Zielfunktionswertes als Folge einer Änderung der Beschränkung p lässt sich aus dem Envelope Theorem ableiten.

Th. Schattenpreis einer Nebenbedingung

Haben die Nebenbedingungen die Form

$$g^i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_i - h^i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.$$

und ist x^*, λ^* ein Optimum des Lagrange Problems, so gilt

$$\frac{df}{dp_i}(x^*) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}(x^*, \lambda^*) = \lambda_i^*, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Der Lagrange Multiplikator wird dann als Schattenpreis der Restriktion bezeichnet.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (19)

- Im vollständigen Differential $\frac{df}{dp_i}$ ist berücksichtigt, dass bei einer Änderung der Beschränkung p die optimale Wahl der Variablen x^* sich verschiebt und sich dadurch der Zielfunktionswert ändert.
- Eine direkte Abhängigkeit des Zielfunktionswertes f von p gibt es ja nicht, d.h., $\frac{\partial f}{\partial p_i} = 0$.

- Warum heißt in diesem Fall λ_i der Schattenpreis der Nebenbedingung i? Angenommen, wir heben die Nebenbedingungen auf. Im Gegenzug werden für jede verbrauchte Einheit der Ressource i von der Zielfunktion λ_i^* Einheiten subtrahiert. D.h., jede Einheit der Ressource "kostet" den Preis λ^*.
- Die adaptierte Zielfunktion lautet dann:

$$\tilde{f}(x) = f(x) - \lambda^{*\prime}\mathbf{h}(x).$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (20)

- Das ist nun ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen.
- Und weil gilt
$$\frac{\partial h^j}{\partial x_i} = -\frac{\partial g^j}{\partial x_i}$$
folgt für die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung
$$f_x + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^* g_x^j = 0.$$
- Das ist exakt dieselbe Optimalitätsbedingung wie im Original-Problem mit Nebenbedingungen ⇒ daher führt das auch zu exakt derselben Lösung x^*.
- Daher der Begriff ”Schattenpreis einer Restriktion”. Diesen werden wir noch ausführlich verwenden.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (21)

- Zurück zu unserem Beispiel:
- Wenn wir die Nebenbedingung folgendermaßen ändern

$$g(x_1, x_2) = (27 + dp) - 2x_1 - x_2 = 0,$$

dann ändert sich der optimale Zielfunktionswert um

$$df = \lambda^* dp = \frac{4}{3} dp.$$

- Bitte beachten: Das Problem ist nichtlinear. D.h., der Zusammenhang gilt nur für infinitesimal kleine Änderungen.
- Vergleiche mit ”Zwangskräften” in der klassischen Mechanik.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (22)

- Zeit für ein Beispiel:

Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren

Der Produktionsprozess eines Unternehmens wird durch die Produktionsfunktion beschrieben, die den Einsatz der Produktionsfaktoren (Inputs) in Relation zur Produktionsmenge (Output) setzt.

$$x_A = f(r_1, r_2) = 9\sqrt{r_1}\, r_2.$$

Die variablen Kosten, die bei der Produktion im Betrachtungszeitraum anfallen, sind gegeben durch

$$K_v = q_1 r_1 + q_2 r_2,$$

mit $q_1 = 6$ [EUR/Einheit] und $q_2 = 4$ [EUR/Einheit].

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (23)

Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren (cont.)

Finde die optimale Faktorkombination, die den Output bei gegebenen variablen Kosten von $K_v = 18$ [EUR] maximiert.

- Die Lagrange Funktion des Problems lautet

$$\mathcal{L}(r_1, r_2, \lambda) = 9\sqrt{r_1}\, r_2 + \lambda(18 - q_1 r_1 - q_2 r_2)$$

- Die Bedingungen erster Ordnung sind

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1} &= \frac{\partial f}{\partial r_1} - \lambda q_1 = 9\frac{1}{2}\frac{r_2}{\sqrt{r_1}} - 6\lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} &= \frac{\partial f}{\partial r_2} - \lambda q_2 = 9\sqrt{r_1} - 4\lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \bar{K} - K_v = 18 - 6r_1 - 4r_2 = 0
\end{aligned}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (24)

- Aus den ersten beiden Gleichungen leiten wir ab

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_1}\frac{\partial f}{\partial r_1} &= \lambda, \\ \frac{1}{q_2}\frac{\partial f}{\partial r_2} &= \lambda. \end{aligned}$$

Def. Grenzproduktivität

Die partielle Ableitung der Produktionsfunktion nach der Einsatzmenge eines Faktors $\frac{\partial f}{\partial r_i}$ nennt man Grenzproduktivität des Faktors, auch MP_i (für marginal productivity) genannt

- Daher folgt aus der Optimalitätsbedingung erster Ordnung

$$\frac{MP_1}{q_1} = \frac{MP_2}{q_2}.$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (25)

- Im Optimum muss die Relation zwischen Grenzproduktivität und Faktorpreis für alle Faktoren den gleichen Wert annehmen (und dieser Wert ist λ).
- Diese Gleichung definiert den **Expansionspfad**.
- Wir leiten aus dieser Optimalitätsbedingung ab

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}\,9\frac{1}{2}\frac{r_2}{\sqrt{r_1}} &= \frac{1}{4}\,9\,\sqrt{r_1}, \\ \frac{r_2}{\sqrt{r_1}} &= 3\,\sqrt{r_1}, \\ r_2 &= 3r_1. \end{aligned}$$

D.h., um bei gegebenen variablen Kosten den Output zu maximieren, müssen die Produktionsfaktoren im Verhältnis $r_2 = 3r_1$ kombiniert werden.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (26)

- Als Ressourcenbeschränkung haben wir eine Budgetrestriktion: $K_v = 18$.

$$6r_1 + 4r_2 = 18.$$

- Und daraus folgt für die optimale Faktorkombination

$$\begin{aligned} r_1 &= 1. \\ r_2 &= 3. \end{aligned}$$

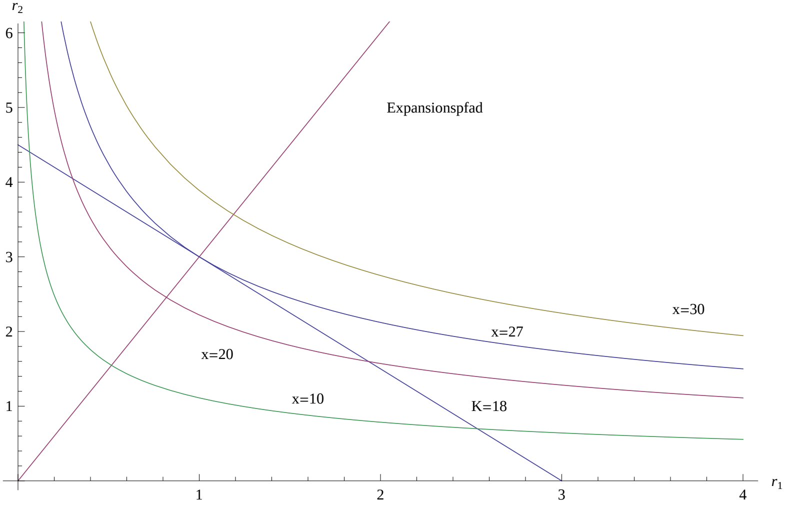
- Für den Lagrange-Multiplikator erhalten wir

$$\lambda = \frac{MP_1}{q_1} = \frac{MP_2}{q_2} = \frac{1}{4} 9 \sqrt{r_1} = \frac{9}{4}.$$

Interpretation: Wenn ich die Budgetrestriktion um eine (marginal) kleine Geldeinheit anhebe, dann steigt der Output um 9/4 Einheiten.

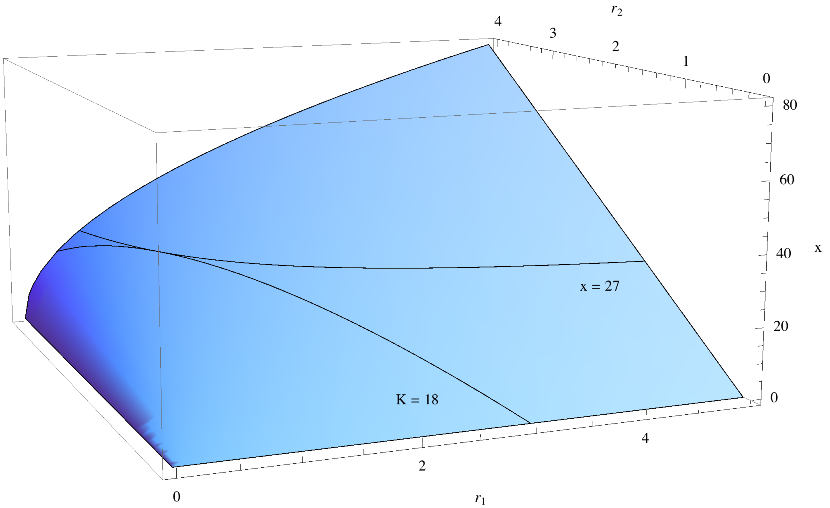
Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (27)

- Expansionspfad, Budgetbeschränkung und Isoquanten



Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (28)

- Budgetbeschränkung und Isoquante, 3D



Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (29)

- Wie zu erwarten ist der Gradient der Zielfunktion f_x im Optimum nicht gleich Null.
- Aber: In jede durch die Nebenbedingung erlaubte Richtung ist der Gradient von f gleich Null! Wir haben im Optimum

$$\nabla f(r^*) = \begin{pmatrix} 9\frac{1}{2}\frac{r_2}{\sqrt{r_1}} \\ 9\sqrt{r_1} \end{pmatrix}(r^*) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

- Die Iso-Kosten-Gerade kann geschrieben werden als

$$r_2 = -\frac{6}{4}r_1 + \frac{\bar{K}}{4}.$$

- D.h., die Richtung einer mit der Nebenbedingung kompatiblen Änderung ist

$$e_g = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (30)

- Eine marginale Änderung ds der Faktorkombination entlang von e_g hat keine Auswirkungen auf die Kosten (weil ja mit der Budget-Nebenbedingung kompatibel).

$$dK = e' \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} ds = (1, -\frac{3}{2}) \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} ds = 0$$

- Was ist die Auswirkung auf f, wenn ich die Faktorkombination marginal entlang der Richtung e_g ändere?

$$df = e' \nabla f(r^*) ds = (1, -\frac{3}{2}) \begin{pmatrix} \frac{9}{2} 3 \\ 9 \end{pmatrix} ds = 0.$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (31)

Def. Kostenfunktion

Die Kostenfunktion ist immer eine Funktion der Ausbringungsmenge (d.h., des Outputs). Die Produktionsfaktoren sind optimal eingesetzt (maximale Ausbringung bei gegebenen Kosten, minimale Kosten bei gegebenem Output).

- Kosten entlang des Expansionspfades

$$K_v = q'r = 6r_1 + 4r_2 = 18r_1$$

- Zusammenhang zwischen Faktoreinsatz und Ausbringungsmenge entlang des Expansionspfades

$$\begin{aligned} x &= f(r_1, r_2) = 9\sqrt{r_1}r_2 = 9\sqrt{r_1}3r_1 = 27r_1^{3/2}, \\ \Rightarrow \quad r_1 &= \left(\frac{1}{27}\right)^{2/3} x^{2/3} = \frac{1}{9}\,x^{2/3}. \end{aligned}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (32)

- Für die Kostenfunktion ergibt das

$$K_v(x) = 18\frac{1}{9}\ x^{2/3} = 2\ x^{2/3}.$$

Def. Grenzkosten

Die Grenzkosten K' sind definiert als die erste Ableitung der Kostenfunktion nach der Ausbringungsmenge.

- Erhöht man die Ausbringungsmenge um eine kleine Mengeneinheit dx, so ändern sich die Kosten um $K'dx$.
- Im Beispiel:

$$K_v'(x) = 2\frac{2}{3}\ x^{-1/3}$$

- Grenzkosten bei $x = 27$:

$$K_v'(27) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{27}\right)^{1/3} = \frac{4}{9}.$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (33)

- Nun formulieren wir die Fragestellung umgekehrt.

Optimaler Einsatz von Produktionsfaktoren (cont.)

Finde die optimale Faktorkombination, die die variablen Kosten bei gegebenem Output von $x = 27$ [EH] minimiert.

- Die Lagrange Funktion lautet nun:

$$\mathcal{L}(r_1, r_2, \lambda) = q_1 r_1 + q_2 r_2 + \lambda(27 - f(r_1, r_2)) = 6r_1 + 4r_2 + \lambda(27 - 9\sqrt{r_1} r_2)$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (34)

- Was passiert, wenn sich die Faktorpreise verändern?
- Wir unterscheiden hier den Substitutionseffekt und den Einkommens- oder Mengeneffekt.

Def. Substitutionseffekt

Als Substitutionseffekt bezeichnet man die Verschiebung der optimalen Faktorkombination als Reaktion auf eine Veränderung der relativen Faktorpreise bei konstantem Output.

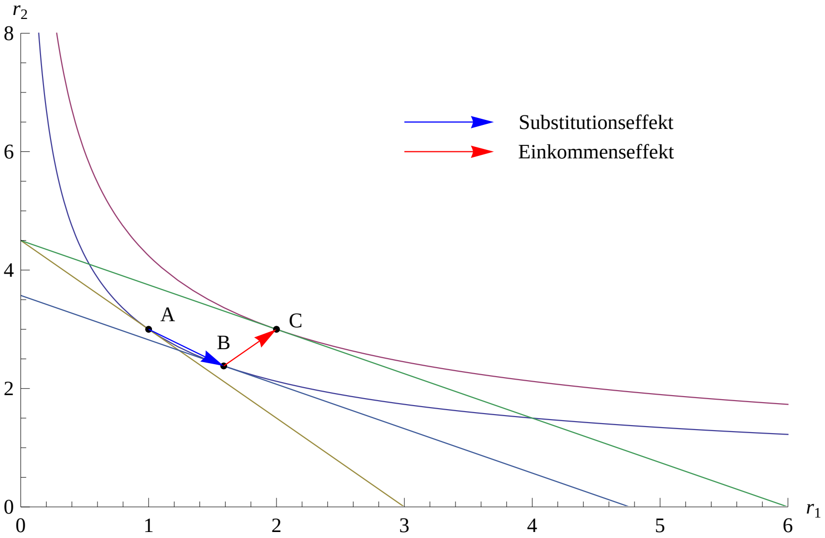
Def. Einkommenseffekt / Mengeneffekt

Als Einkommenseffekt / Mengeneffekt bezeichnet man die Verschiebung der optimalen Faktorkombination entlang des Expansionspfades, da durch die Preisänderung bei gleichem Budget ein höheres (niedrigeres) Outputniveau möglich ist.

- Der Begriff Einkommenseffekt kommt aus der Nutzentheorie.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (35)

- Substitutions- und Einkommenseffekt wenn $q_1 \to q_1/2$.



Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (36)

Th. Notwendige Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

Sei x^* ein lokales Maximum von Problem (L.1) und (x^*, λ^*) erfüllen die Bedingungen erster Ordnung. Dann ist die Matrix $L = \mathcal{L}_{xx}$ negativ-semidefinit für alle Vektoren $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$ mit $Gz = 0$.

- Für ein lokales Minimum muss ”negativ semidefinit” gegen ”positiv semidefinit” getauscht werden.
- Im Spezialfall $m = n$ gibt es kein $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$, das $Gz = 0$ erfüllt, weil dann G invertierbar ist (Rangbedingung) und damit aus $Gz = 0$ folgt $z = 0$. Siehe die Diskussion weiter oben. Damit ist in diesem Fall die obige Bedingung ohne Aussage.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (37)

Th. Hinreichende Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung

- Wenn $m < n$: Erfüllt (x^*, λ^*) die Bedingungen erster Ordnung und zusätzlich ist die Matrix $L = \mathcal{L}_{xx}$ negativ-definit für alle Vektoren $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$ mit $Gz = 0$ (L und G werden an der Stelle (x^*, λ^*) ausgewertet), dann ist x^* ein lokales Maximum des Problems (L.1).
- Wenn $m = n$: Erfüllt (x^*, λ^*) die Bedingungen erster Ordnung, dann ist x^* ein lokales Maximum des Problems (L.1).

- Für ein lokales Minimum muss ”negativ definit” gegen ”positiv definit” getauscht werden.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (38)

- Intuitiv ist es klar, dass die Definitheit nur in jene Richtungen von Bedeutung ist, die durch die Nebenbedingungen erlaubt sind. Diese bedingte Definitheit ist im Allgemeinen nicht sehr leicht zu prüfen.
- Es gibt aber ein Theorem, das einen einigermaßen einfachen Weg aufzeigt, diesen Test zu machen (die Anordnung der Variablen und Ableitungen ist exakt in der Reihenfolge vorzunehmen, wie es hier dargestellt ist).

Def. $\mathbf{B}$, die Hesse'sche Matrix von $\mathcal{L}$

Wir definieren $\mathbf{B}$ als die Hesse'sche Matrix der Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$, wobei wir mit den Ableitungen nach den Lagrange-Multiplikatoren λ beginnen und mit den Ableitungen nach den Variablen x fortsetzen,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{\lambda\lambda'} & \vdots & \mathcal{L}_{\lambda x'} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathcal{L}_{x\lambda'} & \vdots & \mathcal{L}_{xx'} \end{pmatrix}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (39)

- Im Detail:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{ccc|ccc}
0 & \cdots & 0 & g^1_{x_1} & \cdots & g^1_{x_n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & g^m_{x_1} & \cdots & g^m_{x_n} \\
\hline
g^1_{x_1} & \cdots & g^m_{x_1} & f_{x_1x_1} + \sum_{j=1}^m \lambda_j g^j_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} + \sum_{j=1}^m \lambda_j g^j_{x_1x_n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
g^1_{x_n} & \cdots & g^m_{x_n} & f_{x_1x_n} + \sum_{j=1}^m \lambda_j g^j_{x_1x_n} & \cdots & f_{x_nx_n} + \sum_{j=1}^m \lambda_j g^j_{x_nx_n}
\end{array}\right)$$

- Oder kompakt:

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c}
0 & G \\
\hline
G' & L = f_{xx'} + \sum_{j=1}^m \lambda_j g^j_{xx'}
\end{array}\right),$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (40)

- $\mathbf{B}$ ist $(m+n) \times (m+n)$ und die vier Sub-Matrizen 0, G, G' und L sind von der Dimension $m \times m$, $m \times n$, $n \times m$ und $n \times n$.

Th. Hinreichende Bedingungen für $m < n$

Wenn (x^*, λ^*) die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung erfüllt und zusätzlich die letzten $(n-m)$ Minoren von $\mathbf{B}$ im Vorzeichen alternieren, beginnend mit dem Vorzeichen von $(-1)^{m+1}$, wobei $\mathbf{B}$ bei (x^*, λ^*) ausgewertet wird, dann ist x^* ein lokales Maximum des Problems (L.1).

- Für ein Minimum müssen die letzten $(n-m)$ Minoren von $\mathbf{B}$ dasselbe Vorzeichen haben wie $(-1)^m$.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (41)

- Noch einmal zu unserem ersten Beispiel. Die Hesse Matrix $\mathbf{B}$ ist

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

  und da $n = 2$ und $m = 1$ ist nur der letzte Minor von Relevanz, d.h., $|\mathbf{B}| = 18$ muss dasselbe Vorzeichen haben wie $(-1)^{m+1} = 1$, was auch erfüllt ist. Daher ist der Punkt $x_1 = 26/3$, $x_2 = 29/3$, $\lambda = 4/3$ ein Maximum.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (42)

Mean-Variance-Efficiency

Ein Unternehmen überlegt, einen bestimmten Betrag für eine Zeitperiode in eine Reihe von Projekten P_i zu investieren, $i = 1, 2, \ldots, n$. Eine Investition von k EUR in Projekt i bringt am Ende der Zeitperiode eine Einzahlung in der Höhe von $(1 + r_i)k$.
Allerdings ist die Rendite r_i unsicher! Das Unternehmen ist aber in der Lage, den Erwartungswert und die Varianz / Kovarianz der Renditen zu bestimmen.

$$E(r_i) = \mu_i, \qquad \Sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(r_i, r_j).$$

Wie muss das Unternehmen die Projektinvestitionen gewichten, wenn es bei gegebener Ertragserwartung das geringstmögliche Gesamtrisiko (gemessen als Varianz der Einzahlungen) eingehen will?

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (43)

- Einige Vorbereitungen:
- Definiere den Vektor $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ als jenen Spaltenvektor, der in allen Komponenten 1 stehen hat.
- Nenne $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ein Projektportfolio, wenn die einzelnen Komponenten von $\mathbf{w}$ als Projektgewichte interpretiert werden können, d.h., für ein Projektportfolio muss gelten

$$\mathbf{w}'\mathbf{1} = 1.$$

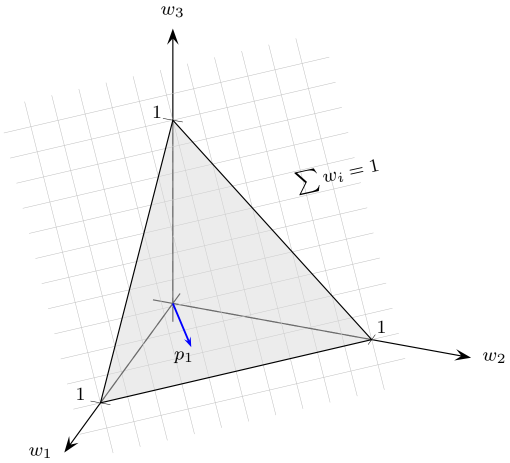
- Nenne Projektportfolios oft auch $\mathbf{p}$, interpretiere die Komponenten von $\mathbf{p}$ dann ebenfalls als Gewichte.
- Die Kovarianz zweier Projektportfolios $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ ist gegeben durch

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \mathbf{p}_1' \Sigma \mathbf{p}_2,$$

mit Σ positiv definit.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (44)

- Alle Projektportfolios liegen in der Ebene $\mathbf{w}'\mathbf{1} = 1$. Im grauen Dreieck liegen jene Portfolios mit nicht-negativen Gewichten (konvexe Kombination der reinen Projekte).



Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (45)

- Eine (kostenneutrale) Portfoliotransaktion $\Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2}$ führt ein Portfolio $\mathbf{p}_1$ in ein Projektportfolio $\mathbf{p}_2$ über, ohne Kosten zu verursachen.

$$\Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1,$$

  daraus folgt, dass Portfoliotransaktionen Vektoren in der Ebene der Portfolios sind, d.h.,

$$\Delta'_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2}\mathbf{1} = 0.$$

- Wir nennen zwei Projektportfolios / Portfoliotransaktionen orthogonal, wenn gilt

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = 0, \quad \mathrm{Cov}(\Delta_1, \mathbf{p}_1) = 0, \quad \mathrm{Cov}(\Delta_1, \Delta_2) = 0.$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (46)

- Exkurs:

Def. Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$

Eine Abbildung $\langle.|.\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt, wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt. Sie ist

- symmetrisch:
$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}|\mathbf{x}\rangle$$
- bilinear:
$$\begin{aligned} \langle \lambda\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle &= \langle \mathbf{x}|\lambda\mathbf{y}\rangle = \lambda\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \\ \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}|\mathbf{z}\rangle &= \langle \mathbf{x}|\mathbf{z}\rangle + \langle \mathbf{y}|\mathbf{z}\rangle \\ \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}+\mathbf{z}\rangle &= \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle + \langle \mathbf{x}|\mathbf{z}\rangle \end{aligned}$$
- positiv definit:
$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle \geq 0, \quad \langle \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = 0$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (47)

Def. Norm

Mit Hilfe eines Skalarprodukts lässt sich in natürlicher Weise eine Vektornorm (Länge) definieren:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x} | \mathbf{x} \rangle}.$$

- Orthogonalprojektion: Betrachte zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{a} \neq 0$. Suche b als

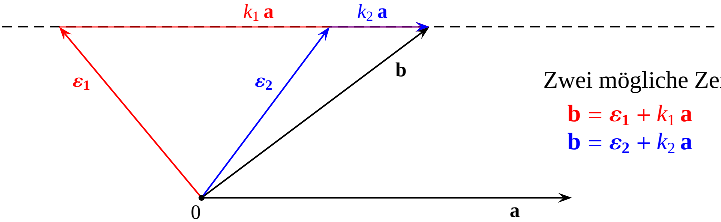
$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\varepsilon} + k\,\mathbf{a}$$

darzustellen, mit $k \in \mathbb{R}$, unter der Zielsetzung

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} | \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \to_k \min$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (48)

- Illustration der Zerlegung $\mathbf{b} = \boldsymbol{\varepsilon} + k\,\mathbf{a}$.



Zwei mögliche Zerlegungen:

$\mathbf{b} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + k_1\,\mathbf{a}$

$\mathbf{b} = \boldsymbol{\varepsilon}_2 + k_2\,\mathbf{a}$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (49)

- Es gilt also

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon} | \boldsymbol{\varepsilon} \rangle &= \langle \mathbf{b} - k\ \mathbf{a} | \mathbf{b} - k\ \mathbf{a} \rangle \\ &= \langle \mathbf{b} | \mathbf{b} \rangle - 2 \langle \mathbf{b} | k\ \mathbf{a} \rangle + \langle k\ \mathbf{a} | k\ \mathbf{a} \rangle \\ &= \langle \mathbf{b} | \mathbf{b} \rangle - 2k \langle \mathbf{b} | \mathbf{a} \rangle + k^2 \langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle \end{aligned}$$

- Optimalitätsbedingung erster Ordnung

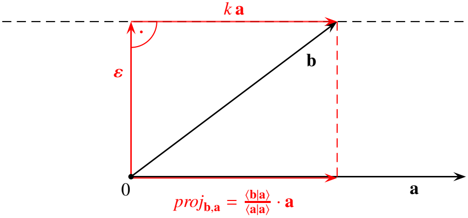
$$\frac{\partial \langle \boldsymbol{\varepsilon} | \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{\partial k} = -2 \langle \mathbf{b} | \mathbf{a} \rangle + 2k \langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle = 0.$$

- Daraus folgt für das optimale k

$$k = \frac{\langle \mathbf{b} | \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle}.$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (50)

- Orthogonalzerlegung $\mathbf{b} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\langle \mathbf{b}|\mathbf{a}\rangle}{\langle \mathbf{a}|\mathbf{a}\rangle}\,\mathbf{a}$.



Orthogonalzerlegung:

$\mathbf{b} = \boldsymbol{\varepsilon} + k\,\mathbf{a}$ mit $k = \frac{\langle \mathbf{b}|\mathbf{a}\rangle}{\langle \mathbf{a}|\mathbf{a}\rangle}$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist der “kürzeste” Projektor, der möglich ist.

$\boldsymbol{\varepsilon}$ ist orthogonal zu $\mathbf{a}$: $\langle \boldsymbol{\varepsilon}|\mathbf{a}\rangle = 0$

$\frac{\langle \mathbf{b}|\mathbf{a}\rangle}{\langle \mathbf{a}|\mathbf{a}\rangle} \cdot \mathbf{a}$ ist die Projektion von $\mathbf{b}$ auf $\mathbf{a}$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (51)

- Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung für ein Minimum

$$\frac{\partial^2 \langle \boldsymbol{\varepsilon} | \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{\partial k^2} = 2\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle > 0$$

ist erfüllt, da $a \neq 0$ und das Skalarprodukt positiv definit.

Def. Orthogonalprojektion

Betrachte $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{a} \neq 0$ und die Aufspaltung von $\mathbf{b}$ in

$$\mathbf{b} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\langle \mathbf{b} | \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a},$$

dann ist $\boldsymbol{\varepsilon}$ orthogonal zu $\mathbf{a}$ (d.h., $\langle \boldsymbol{\varepsilon} | \mathbf{a} \rangle = 0$). Der Vektor $\frac{\langle \mathbf{b} | \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}$ heißt dann Orthogonalprojektion von $\mathbf{b}$ auf $\mathbf{a}$.
$\mathbf{b} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\langle \mathbf{b} | \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}$ ist eine Orthogonalzerlegung von $\mathbf{b}$.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (52)

Def. Orthogonalprojektion (cont.)

Darüber hinaus ist unter allen möglichen Varianten einer Aufspaltung

$$\mathbf{b} = \varepsilon + k\mathbf{a}, \quad k \in \mathbb{R}$$

die Wahl

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b} - \frac{\langle \mathbf{b}|\mathbf{a}\rangle}{\langle \mathbf{a}|\mathbf{a}\rangle}\mathbf{a}$$

jene mit der geringstmöglichen Norm $\sqrt{\langle \boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{\varepsilon}\rangle}$.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (53)

- Prüfe: $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist orthogonal zu $\mathbf{a}$.
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{b} - \frac{\langle \mathbf{b}|\mathbf{a}\rangle}{\langle \mathbf{a}|\mathbf{a}\rangle}\mathbf{a},$$

damit gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon|\mathbf{a}\rangle &= \langle \mathbf{b} - \frac{\langle \mathbf{b}|\mathbf{a}\rangle}{\langle \mathbf{a}|\mathbf{a}\rangle}\mathbf{a}|\mathbf{a}\rangle \\
&= \langle \mathbf{b}|\mathbf{a}\rangle - \frac{\langle \mathbf{b}|\mathbf{a}\rangle}{\langle \mathbf{a}|\mathbf{a}\rangle}\langle \mathbf{a}|\mathbf{a}\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (54)

- Kann Kovarianz zwischen zwei Projektportfolios als verallgemeinertes Skalarprodukt auf dem Raum der Projektgewichte interpretieren, denn die Kovarianz ist symmetrisch, bilinear und positiv definit (weil Σ symmetrisch und positiv-definit ist!) D.h.

$$\langle \mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_2 \rangle = \mathbf{p}_1^{'} \Sigma \mathbf{p}_2$$

- Die Norm oder "Länge" eines Gewichtsvektors $\mathbf{p}$ ist dann

$$||\mathbf{p}|| = \sqrt{\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle} = \sqrt{\mathbf{p}' \Sigma \mathbf{p}} = \sqrt{\mathrm{Var}(\mathbf{p})} = \sigma_{\mathbf{p}},$$

  d.h., die "Länge" des Vektors p entspricht dem Projektrisiko (gemessen als Standardabweichung der Rendite des Projektportfolios).

- Achtung: Das ist nur mehr eine verallgemeinerte Länge, nicht im streng Euklidischen Sinn.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (55)

- Sind alle Projektrisiken gleich groß (gleiche Varianz σ^2) und unkorreliert, dann hat die Kovarianzmatrix die einfache Form

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0.00 & \dots & 0.00 \\ 0.00 & \sigma^2 & \dots & 0.00 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.00 & 0.00 & \dots & \sigma^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I},$$

  und Σ ist winkelerhaltend. Die durch die Kovarianz definierte Orthogonalität ist ein ”echter”, rechter Winkel.

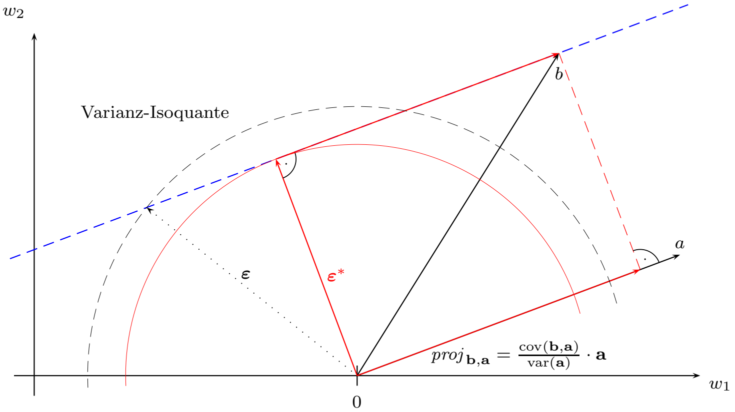
- Die Varianz-Isoquanten im Raum der Gewichte

$$\mathbf{p}'\Sigma\mathbf{p} = \text{const}$$

  sind dann Kugeln.

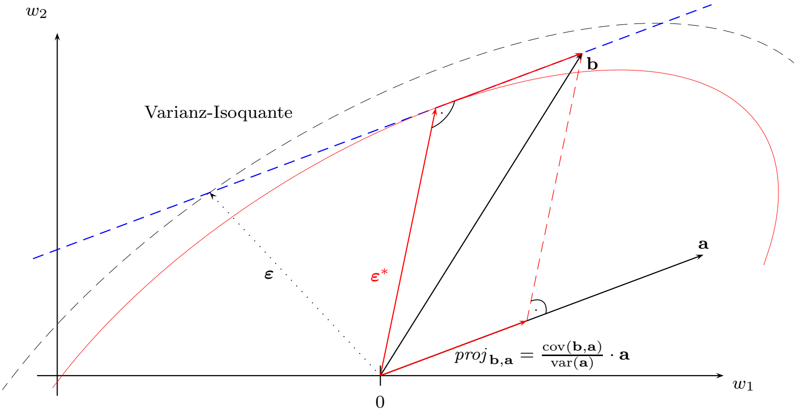
Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (56)

- Orthogonalzerlegung $\mathbf{b} = \boldsymbol{\varepsilon}^* + k\,\mathbf{a}$ bei $\boldsymbol{\Sigma} = \sigma^2\mathbf{I}$.
  Die "kleinste" Iso-Varianz-Kugel berührt die von allen möglichen $\boldsymbol{\varepsilon}$ gebildete blaue Linie.



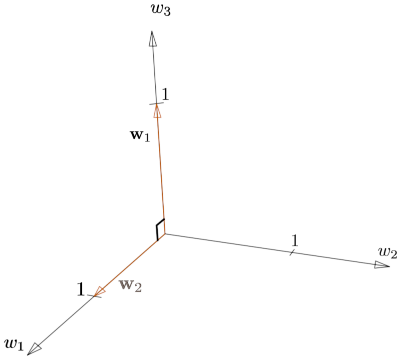
Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (57)

- Orthogonalzerlegung $\mathbf{b} = \boldsymbol{\varepsilon}^* + k\,\mathbf{a}$ bei allgemeiner Kovarianzstruktur. Das "kleinste" Iso-Varianz-Ellipsoid berührt die von allen möglichen $\boldsymbol{\varepsilon}$ gebildete blaue Linie.



Kovarianz und Orthogonalität (1)

- Im Euklidischen Raum definiert das Standard-Skalarprodukt Länge und Orthogonalität von Vektoren:

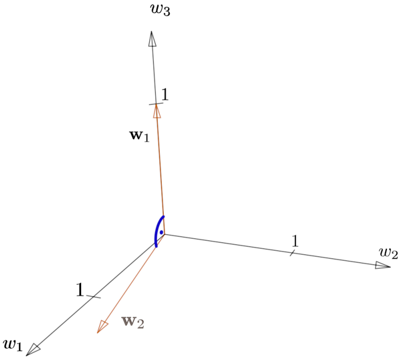


Länge: $|\mathbf{w}_1| = \sqrt{\mathbf{w}_1' \mathbf{w}_1},$

Orthogonalität: $\mathbf{w}_1' \mathbf{w}_2 = 0.$

Kovarianz und Orthogonalität (2)

- Im Raum der Rendite-Kombinationen definiert die Kovarianz ein Skalarprodukt, die Länge ist die Standardabweichung, Orthogonalität die Unkorreliertheit:

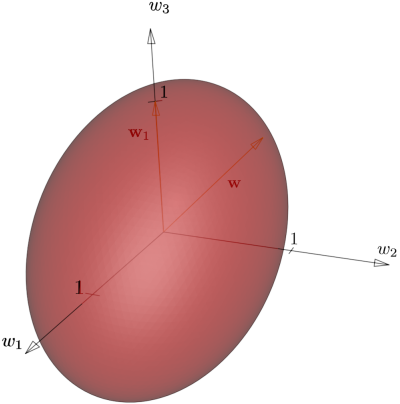


Länge: $\sigma_{\mathbf{w}_1} = \sqrt{\mathbf{w}_1' \Sigma \mathbf{w}_1}$,

Orthogonalität: $\mathbf{w}_1' \Sigma \mathbf{w}_2 = 0$.

Iso-Varianz-Ellipsoid (1)

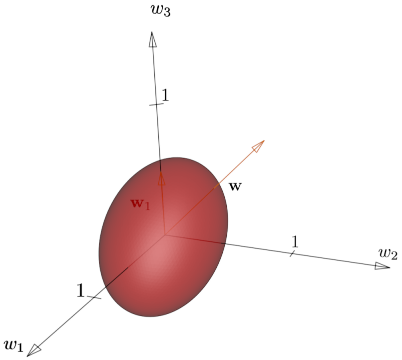
- Alle Vektoren mit gleicher Länge (= Kombinationen mit gleicher Standardabweichung und daher gleicher Varianz) liegen auf einem Iso-Varianz-Ellipsoid (Isoquante)



$$\sigma^2 = \mathbf{w}_1' \Sigma \mathbf{w}_1 = \text{const.}$$

Iso-Varianz-Ellipsoid (2)

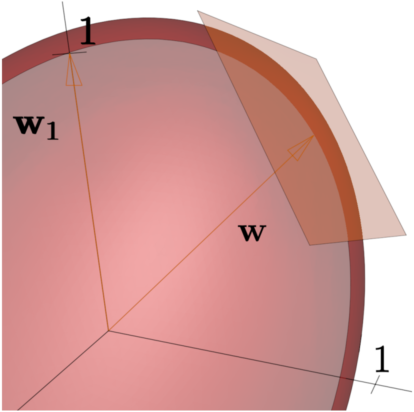
- Vergleich zweier Kombinationen $\mathbf{w}_1$ und $\mathbf{w}$: Liegt $\mathbf{w}$ außerhalb der Iso-Varianz-Fläche von $w_1 \Rightarrow \text{Var}(\mathbf{w}) > \text{Var}(\mathbf{w}_1)$



$\text{Var}(\mathbf{w}) > \text{Var}(\mathbf{w}_1)$

Tangentialebene an die Isoquante (1)

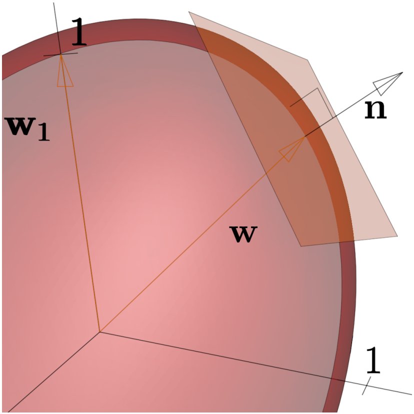
- Ellipsoide sind konvexe Formen. Die Tangentialebene im Punkt $\mathbf{w}$ berührt das Ellipsoid in $\mathbf{w}$ und liegt ansonsten außerhalb.



Tangentialebene im Punkt $\mathbf{w}$

Tangentialebene an die Isoquante (2)

- Der Varianz-Gradient ist der Normalvektor auf die Varianz-Isoquante und definiert als Normalvektor $\mathbf{n}$ die Tangentialebene.



Gradient auf die Varianz-Isoquante:

$$\nabla \mathrm{Var}(\mathbf{w}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}} (\mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w}) = 2\Sigma \mathbf{w}$$

$\Rightarrow$ ein Normalvektor (Euklidisch) $\mathbf{n}$ ist gegeben durch

$$\mathbf{n} = \Sigma \mathbf{w}$$

Tangentialebene an die Isoquante (3)

- Die Tangentialebene in Normalvektorform: Jeder Vektor auf der $\mathbf{w}$-Tangentialebene, $\mathbf{w}_T$, erfüllt

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_T'\mathbf{n} &= \text{const} = \mathbf{w}'\mathbf{n}, \\ \mathbf{w}_T'\Sigma\mathbf{w} &= \mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w}, \\ \mathrm{Cov}(\mathbf{w}_T, \mathbf{w}) &= \mathrm{Var}(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

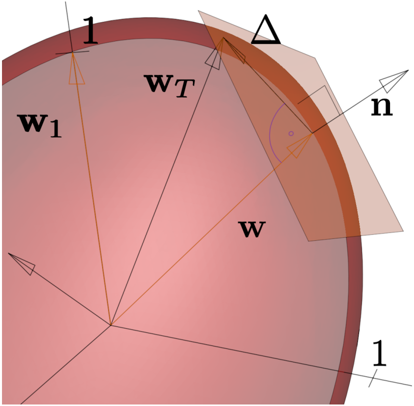
- Für jeden beliebigen Vektor Δ in der Tangentialebene $\Delta = \mathbf{w}_T - \mathbf{w}$ gilt

$$\mathrm{Cov}(\Delta, \mathbf{w}) = \Delta'\Sigma\mathbf{w} = (\mathbf{w}_T - \mathbf{w})'\Sigma\mathbf{w} = \mathbf{w}_T'\Sigma\mathbf{w} - \mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w} = 0$$

- Die Tangentialebene ist Δ-orthogonal zu $\mathbf{w}$ und Euklidisch-orthogonal zu $\mathbf{n}$.

Tangentialebene an die Isoquante (4)

- Die Tangentialebene an das Iso-Varianz-Ellipsoid und die beiden Orthogonalvektoren $\mathbf{n}$ und $\mathbf{w}$.



Euklidischer Normalvektor $\mathbf{n}$:

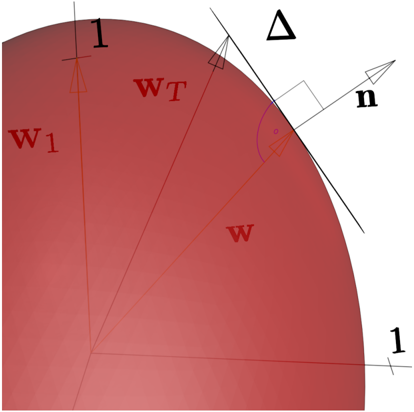
$$\Delta'\mathbf{n} = 0$$

Kovarianz-Normalvektor $\mathbf{w}$:

$$\Delta'\Sigma\mathbf{w} = 0$$

Tangentialebene an die Isoquante (5)

- $\mathbf{w}$ ist die Rendite-Kombination mit der geringsten Varianz unter allen Vektoren auf der $\mathbf{w}$-Tangentialebene.



Pythagoras im Einsatz:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathbf{w}_T) &= \mathbf{w}_T'\Sigma\mathbf{w}_T \\
&= (\mathbf{w}+\Delta)'\Sigma(w+\Delta) \\
&= \mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w} + \underbrace{2\Delta'\Sigma\mathbf{w}}_{=0} + \underbrace{\Delta'\Sigma\Delta}_{\geq 0} \\
&= \mathrm{Var}(\mathbf{w}) + \mathrm{Var}\Delta \\
&\geq \mathrm{Var}(\mathbf{w})
\end{aligned}$$

Globales Minimum-Varianz Portfolio (1)

- In den Überlegungen zum Iso-Varianz-Ellipsoid haben wir bis jetzt die Portfolio-Bedingung

$$\mathbf{w}'\mathbf{1} = 1$$

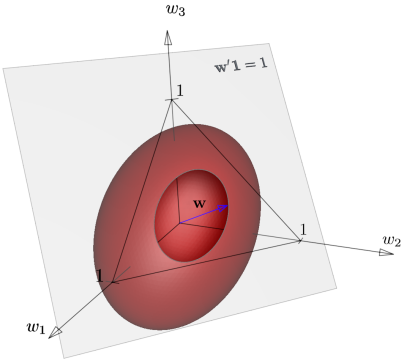
  nicht berücksichtigt.
- Nun wollen wir jenes Portfolio bestimmen, das die geringstmögliche Varianz unter allen Portfolios hat.
- Das ist ein Lagrange-Problem (Optimierung unter Gleichheits-Nebenbedingung)

$$\min_{\mathbf{w}} \left\{ \frac{1}{2} \mathrm{Var}(\mathbf{w}) \right\}$$

NB: $\mathbf{w}'\mathbf{1} = 1$

Globales Minimum-Varianz Portfolio (2)

- Wir suchen also jenen Vektor, der gleichzeitig
  - ein Portfolio darstellt, d.h., auf der Portfolioebene liegt und
  - die geringstmögliche Länge (im Kovarianz-Sinn) hat



Intuitiv ist klar:
Wenn das Iso-Varianz-Ellipsoid durch die Portfolioebene schneidet, gibt es ein Portfolio mit geringerer Varianz.

Globales Minimum-Varianz Portfolio (3)

- Die Lagrange-Funktion des Problems lautet

$$L(\lambda, \mathbf{w}) = \frac{1}{2}\mathbf{w}'\Sigma\mathbf{w} + \lambda(1 - \mathbf{w}'\mathbf{1})$$

- Die Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung sind

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nabla \mathrm{Var}(\mathbf{w}) - \lambda\mathbf{1} &= 0, \quad \text{(i)} \\ \mathbf{w}'\mathbf{1} &= 1. \quad \text{(ii)} \end{aligned}$$

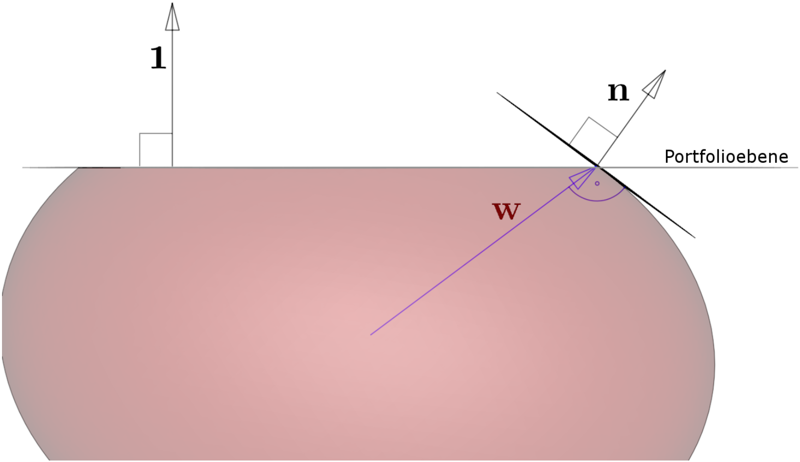
- Die Gleichung (i) folgt

$$\Sigma\mathbf{w} = \mathbf{n} = \lambda\mathbf{1},$$

  d.h., wir suchen jenes $\mathbf{w}$, dessen Tangentialebene an die Varianz-Isoquante einen Normalvektor hat, der parallel zum Vektor $\mathbf{1}$ ist.

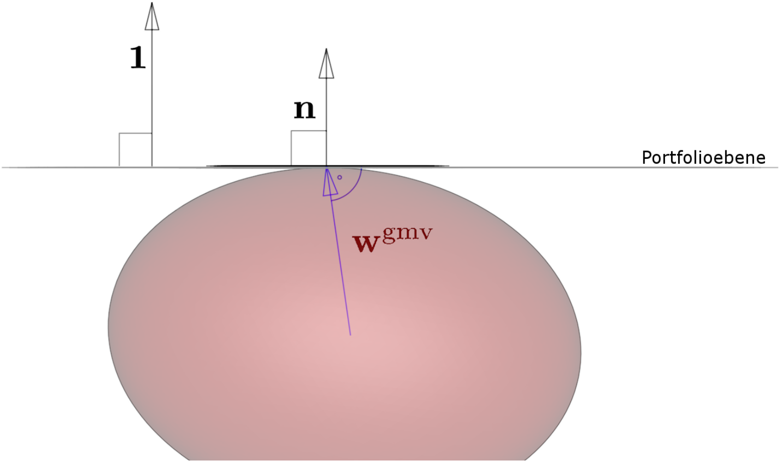
Globales Minimum-Varianz Portfolio (4)

- Wenn $\mathbf{n}$ nicht parallel zu $\mathbf{1}$ ist, schneidet das Iso-Varianz-Ellipsoid die Portfolioebene $\Rightarrow$ das Portfolio $\mathbf{w}$ ist nicht das globale Minimum-Varianz-Portfolio.



Globales Minimum-Varianz Portfolio (5)

- Die Iso-Varianz-Fläche des globalen Minimum-Varianz-Portfolios $\mathbf{w}^{\text{gmv}}$ berührt die Portfolioebene nur in $\mathbf{w}^{\text{gmv}}$. Daher ist in diesem Fall $\mathbf{n}$ parallel zu $\mathbf{1}$.



Globales Minimum-Varianz Portfolio (6)

- Im globalen Minimum-Varianz-Portfolio $\mathbf{w}^{\text{gmv}}$ ist also $\mathbf{n} = \Sigma\mathbf{w}^{\text{gmv}}$ parallel zu $\mathbf{1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \Sigma\mathbf{w}^{\text{gmv}} = \lambda\mathbf{1}, \\ \Rightarrow \quad \mathbf{w}^{\text{gmv}} &= \lambda\Sigma^{-1}\mathbf{1}. \end{aligned}$$

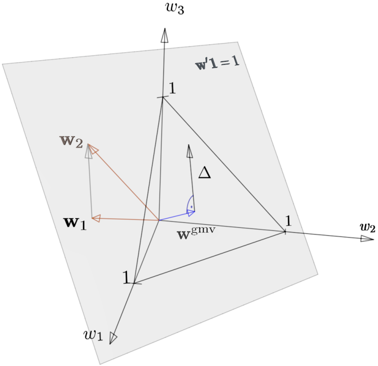
- $\mathbf{w}^{\text{gmv}}$ ist aber auch ein Portfolio

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{\text{gmv}\prime}\mathbf{1} &= 1, \\ \lambda\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1} &= 1, \\ \lambda &= \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{w}^{\text{gmv}} = \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}\Sigma^{-1}\mathbf{1}.$$

Globales Minimum-Varianz Portfolio (7)

- Das globale Minimum-Varianz-Portfolio $\mathbf{w}^{\text{gmv}}$ ist kovarianz-orthogonal zur Portfolioebene.



Für jede beliebige Portfolio-transaktion

$$\Delta = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$$

gilt

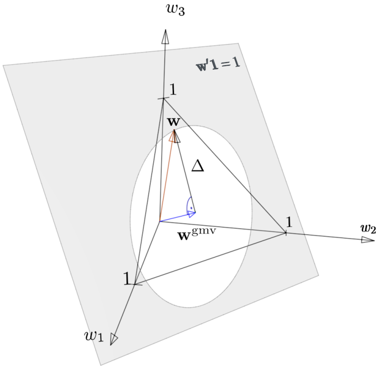
$$\Delta' \Sigma \mathbf{w}^{\text{gmv}} = 0.$$

Globales Minimum-Varianz Portfolio (8)

- Pythagoras im Einsatz: Jedes Portfolio kann mit Hilfe des globalen Minimum-Varianz-Portfolios in zwei orthogonale Komponenten zerlegt werden

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{\text{gmv}} + \Delta_{\mathbf{w}}, \quad \text{mit } \Delta_{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \mathbf{w}^{\text{gmv}}.$$

.



Das ist eine Orthogonalzerlegung, d.h.,

$$\Delta'_{\mathbf{w}} \Sigma \mathbf{w}^{\text{gmv}} = 0.$$

Deshalb gilt (Pythagoras):

$$\text{Var}(\mathbf{w}) = \text{Var}(\mathbf{w}^{\text{gmv}}) + \text{Var}(\Delta_{\mathbf{w}})$$

Globales Minimum-Varianz Portfolio (9)

- Vergleicht man die Varianz von zwei Portfolios, dann reicht es, ihre "Abstände" vom globalen Minimum-Varianz-Portfolio zu vergleichen.
- Die Orthogonalzerlegung der beiden Portfolios $\mathbf{w}_1$ und $\mathbf{w}_2$

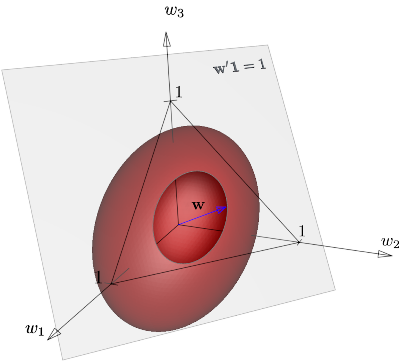
$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{w}^{\mathsf{gmv}} + \Delta_{\mathbf{w}_1}, \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{w}^{\mathsf{gmv}} + \Delta_{\mathbf{w}_2}, \end{aligned}$$

dann ergibt der Vergleich der Varianzen

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\mathbf{w}_1) &\gtreqless \mathrm{Var}(\mathbf{w}_2), \\ &\Leftrightarrow \\ \mathrm{Var}(\Delta_{\mathbf{w}_1}) &\gtreqless \mathrm{Var}(\Delta_{\mathbf{w}_2}). \end{aligned}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (58)

- Für die geometrische Intuition hinter dem globalen Minimum-Varianz Portfolio siehe: https://youtu.be/lAswDAI7swA (in englischer Sprache)



- Eine interaktive Illustration zur Mean-Variance Optimization findet sich hier: http://showcase.imw.tuwien.ac.at/

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (59)

Def. Diversifikation

Diversifikation ist die Risikoreduktion durch Portfoliobildung.

- Beispiel: Angenommen wir haben drei Projekte mit folgenden Kennzahlen zur Verfügung:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.06 \\ 0.09 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.04 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.04 \end{pmatrix}$$

- Varianz / Kovarianz-Matrix Σ hat eine spezielle Struktur, welche die Euklidischen Winkel erhält, denn in diesem Spezialfall gilt

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \mathbf{p}_1^{'} \Sigma \mathbf{p}_2 = 0.04 \; \mathbf{p}_1^{'} \mathbf{p}_2$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (60)

- Angenommen, ich betrachte Portfolios bestehend aus dem Projekt 1 und Projekt 2.
- D.h., die möglichen Portfolio-Gewichte sind gegeben durch

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \;\; \mathbf{p}^{'}\mathbf{1} = 1.$$

- Oder nach Substitution der Nebenbedingung:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} k \\ 1-k \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \;\; k \in \mathbb{R}.$$

- Welches Portfolio aus den beiden Projekten ist optimal diversifiziert?

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (61)

- Zerlege das Portfolio $\mathbf{p}_2$ in zwei Komponenten, in (i) ein Portfolio $\mathbf{p}$ und (ii) das Residuum,

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_2 = \mathbf{p} + (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}) &= \underbrace{k\mathbf{p}_1 + (1-k)\mathbf{p}_2}_{\mathbf{p}} + \underbrace{k(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)}_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}}, \\ &= \mathbf{p} + k\Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2}.\end{aligned}$$

- Ziel dieser Zerlegung: Suche jenes Portfolio $\mathbf{p}$, welches das geringste Risiko hat = das Portfolio mit der bestmöglichen Diversifikation!
- Wissen schon: Wähle

$$k = \frac{\mathrm{Cov}(\mathbf{p}_2, \Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2})}{\mathrm{Var}(\Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2})},$$

  dann ist die Zerlegung

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p} + \frac{\mathrm{Cov}(\mathbf{p}_2, \Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2})}{\mathrm{Var}(\Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2})}\Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2}$$

  diejenige, bei welcher $\mathbf{p}$ die geringste Varianz besitzt.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (62)

- Dieses optimal diversifizierte Portfolio $\mathbf{p}$ ist dann gegeben durch

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \frac{\mathrm{Cov}(\mathbf{p}_2, \Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2})}{\mathrm{Var}(\Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2})}\Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2}$$

- Berechne die Bausteine:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\mathbf{p}_2, \Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2}) &= \mathbf{p}_2^{'}\boldsymbol{\Sigma}\Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2} = (0,1,0)\boldsymbol{\Sigma}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0,1,0)\begin{pmatrix} -0.04 \\ 0.04 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= 0.04.
\end{aligned}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (63)

- weiter mit

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2}) &= \Delta'_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2}\Sigma\Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2} = (-1,1,0)\Sigma\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\\ &= (-1,1,0)\begin{pmatrix}-0.04\\0.04\\0\end{pmatrix} = 0.08.\end{aligned}$$

- Die optimale Diversifizierung ist erreicht durch

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \mathbf{p}_2 - \frac{0.04}{0.08}\Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2}\\ &= \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 0.5\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.5\\0.5\\0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (64)

- Das Zielportfolio $\mathbf{p}$ hat ein Risiko von

$$\sigma_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}'\Sigma\mathbf{p}} = \sqrt{0.02} = 0.14142$$

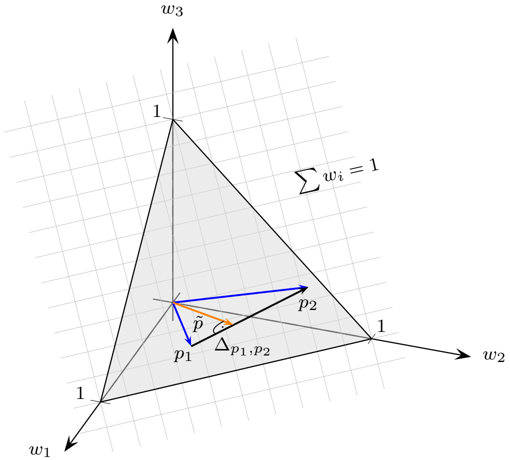
- Weiteres Beispiel mit derselben Varianz / Kovarianz-Matrix wie oben.
- Betrachte 2 Projektportfolios

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0.57 \\ 0.30 \\ 0.13 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.70 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

- Kann man diese beiden Portfolios ”mischen”, sodass das Zielportfolio geringeres Risiko hat, als jeder der beiden Bausteine?

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (65)

- Optimale Diversifikation zweier Projektportfolios: Das Portfolio mit der geringsten Varianz ist orthogonal zu allen möglichen Portfoliokombinationen.



Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (66)

- Das globale Minimum-Varianz Portfolio ist jenes mit geringstmöglicher Varianz.

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2}\mathrm{Var}(r_{\mathbf{w}}) = \min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2}\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}$$

unter der Nebenbedingung:

$$\mathbf{w}'\mathbf{1} \quad = \quad 1$$

- Die Lagrange-Funktion des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathbf{w}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{w} + \lambda(1 - \mathbf{w}'\mathbf{1})$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (67)

- Die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für das globale Minimum-Varianz Portfolio sind

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = \Sigma \mathbf{w} - \lambda \mathbf{1} = 0 \\
&\text{(ii)} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 - \mathbf{w}' \mathbf{1} = 0
\end{aligned}
$$

- Aus (i) und dem Faktum, dass λ eine reelle Zahl ist, folgt

$$\mathbf{w}^{\text{gmv}} = \lambda \Sigma^{-1} \mathbf{1}$$

- Aus (ii) erhalten wir

$$\mathbf{w}^{\text{gmv}} = \frac{1}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \Sigma^{-1} \mathbf{1}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (68)

- Das Problem

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2}\mathrm{Var}(r_{\mathbf{w}}) = \min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2}\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$$

  unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}'\mathbf{1} &= 1 \\ E(r_{\mathbf{w}}) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} &= \bar{\mu} \end{aligned}$$

- Die Lagrange-Funktion des Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} + \lambda(1 - \mathbf{w}'\mathbf{1}) + \delta(\bar{\mu} - \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu})$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (69)

- Wir suchen also nach dem Portfolio mit minimaler Varianz bei vorgegebener Ertragserwartung $\bar{\mu}$.

Def. Minimum-Varianz Portfolio

Das Portfolio mit minimaler Varianz bei vorgegebener Renditeerwartung $\bar{\mu}$ nennen wir $\mathbf{w}^{\mathrm{mv}}$, oder auch $\mathbf{w}^{\mathrm{mv}}(\bar{\mu})$.

Def. Mean-Variance Efficient Frontier

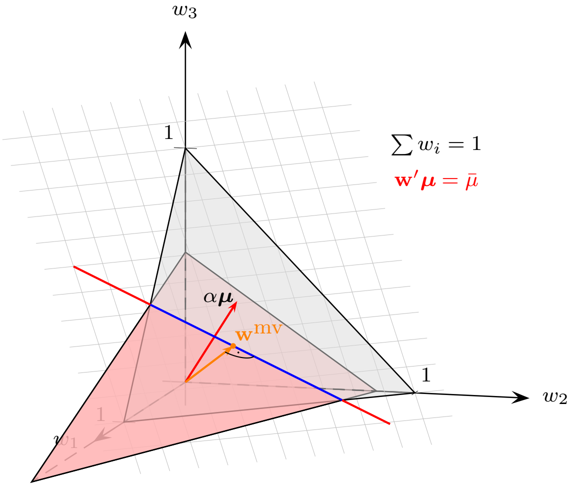
Die Menge aller Minimum-Varianz Portfolios $\mathbf{w}^{\mathrm{mv}}(\bar{\mu})$ (d.h., für alle darstellbaren Werte von $\bar{\mu}$) wird Mean-Variance Efficient Frontier genannt, oder auch Effizienzlinie. Die Portfolios $\mathbf{w}^{\mathrm{mv}}$ werden mean-variance efficient, oder einfach effizient genannt.

Def. Globales Minimum-Varianz Portfolio

Das Portfolio mit minimaler Varianz unter allen möglichen Portfolios nennen wir $\mathbf{w}^{\mathrm{gmv}}$.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (70)

- Portfolios mit identischem Erwartungswert der Rendite $\bar{\mu}$ befinden sich auf dem Schnitt zweier Hyperebenen des $\mathbb{R}^n$.



Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (71)

- Die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung sind

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{\Sigma w} - \lambda \mathbf{1} - \delta \boldsymbol{\mu} = 0 \\
&\text{(ii)} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 1 - \mathbf{w}^{\prime} \mathbf{1} = 0 \\
&\text{(iii)} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta} = \bar{\mu} - \mathbf{w}^{\prime} \boldsymbol{\mu} = 0
\end{aligned}
$$

- Aus (i) und dem Faktum, dass λ und δ reelle Zahlen sind, folgt

$$\mathbf{w}^{\text{mv}} = \lambda \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{1} + \delta \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\mu}$$

- Aus (ii) erhalten wir

$$\mathbf{w}^{\text{mv}^{\prime}} \mathbf{1} = 1$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (72)

- Gemeinsam mit dem Ausdruck für $\mathbf{w}^{\text{mv}}$ erhalten wir

$$\lambda \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1} + \delta \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \mathbf{1} = 1$$

- Aus (iii) folgt

$$\mathbf{w}^{\text{mv}'} \boldsymbol{\mu} = \bar{\mu}$$

und daher

$$\lambda \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} + \delta \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} = \bar{\mu}$$

- In kompakter Schreibweise

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1} & \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \mathbf{1} \\ \mathbf{1}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (73)

- Mit der folgenden Notation

$$
\begin{aligned}
A &= \mathbf{1}^{'}\Sigma^{-1}\mathbf{1} \\
B &= \mathbf{1}^{'}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} \\
C &= \boldsymbol{\mu}^{'}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}
\end{aligned}
$$

  können wir die Gleichung schreiben als

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \lambda \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}
$$

- Es lässt sich zeigen, dass M invertierbar ist, da Σ positiv-definit ist (sofern μ nicht parallel zu $\mathbf{1}$ ist).

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (74)

- Die beiden Lagrange-Multiplikatoren sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \delta \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix} = \frac{1}{|M|} \begin{pmatrix} C & -B \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{\mu} \end{pmatrix}$$

- Daraus folgt, dass der Lagrange-Multiplikator, der mit der Bedingung $\mathbf{w}'\mathbf{1} = 1$ verbunden ist (Portfoliogewichte summieren zu 1), λ, gegeben ist

$$\lambda = \frac{C - \bar{\mu}B}{|M|}$$

- Der Lagrange-Multiplikator, der mit der Bedingung $\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} = \bar{\mu}$ verbunden ist (gegebene erwartete Rendite), δ, ist gegeben durch

$$\delta = \frac{\bar{\mu}A - B}{|M|}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (75)

- Das Portfolio mit minimaler Varianz bei gegebener Renditeerwartung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}^{\mathrm{mv}}(\bar{\mu}) &= \frac{C-\bar{\mu}B}{|M|}\Sigma^{-1}\mathbf{1} + \frac{\bar{\mu}A-B}{|M|}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} \\
&= \underbrace{\frac{1}{|M|}(C\Sigma^{-1}\mathbf{1} - B\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu})}_{\mathbf{w}_0} + \underbrace{\frac{1}{|M|}(A\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} - B\Sigma^{-1}\mathbf{1})}_{\Delta_\mu}\bar{\mu} \\
&= \mathbf{w}_0 + \Delta_\mu\bar{\mu}
\end{aligned}$$

- Die optimalen Portfoliogewichte sind eine lineare Funktion in $\bar{\mu}$.

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (76)

- Das Portfolio $\mathbf{w}_0$ ist ein Mean-Variance-effizientes Portfolio mit erwarteter Rendite $\mu(\mathbf{w}_0) = 0$.
- Im Gegensatz dazu ist Δ_μ eine Portfoliotransaktion mit $\mathbf{1}'\Delta_\mu = 0$.
- Beginnend bei einem gewählten Mean-Variance-effizienten Portfolio (hier $\mathbf{w}_0$), kann die ganze Mean-Variance-Effizienzgrenze dadurch konstruiert werden, indem man Vielfache der Portfoliotransaktion Δ_μ addiert – ein % von Δ_μ für jeden zusätzlichen %-Punkt an erwarteter Rendite.
- Die Differenz zweier zufällig gewählter Portfolios an der Mean-Variance-Effizienzgrenze ist immer ein Vielfaches der Portfoliotransaktion Δ_μ.
- Two-fund Separation: Zwei unterschiedliche Mean-Varianz-effiziente Portfolios $\mathbf{w}_1$ und $\mathbf{w}_2$ spannen die gesamte Mean-Varianz-Effizienzgrenze auf

$$\mathbf{w} = k\mathbf{w}_1 + (1-k)\mathbf{w}_2, \quad k \in \mathbb{R}.$$

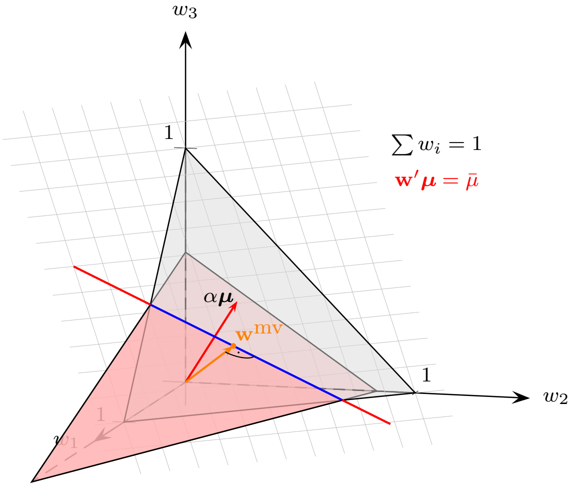
Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (77)

- Die Portfoliovarianz an der Effizienzgrenze in Abhängigkeit von $\bar{\mu}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(r_{\mathbf{w}^{\mathrm{mv}}}) = \sigma^2_{\mathbf{w}^{\mathrm{mv}}} &= \mathbf{w}^{\mathrm{mv}\prime}\Sigma\mathbf{w}^{\mathrm{mv}} \\
&= \mathbf{w}^{\mathrm{mv}\prime}\Sigma(\lambda\Sigma^{-1}\mathbf{1} + \delta\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}) \\
&= \lambda\mathbf{w}^{\mathrm{mv}\prime}\Sigma\Sigma^{-1}\mathbf{1} + \delta\mathbf{w}^{\mathrm{mv}\prime}\Sigma\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu} \\
&= \lambda\mathbf{w}^{\mathrm{mv}\prime}\mathbf{1} + \delta\mathbf{w}^{\mathrm{mv}\prime}\boldsymbol{\mu} \\
&= \lambda + \delta\bar{\mu} \\
&= \frac{1}{|M|}(C - \bar{\mu}B + \bar{\mu}^2 A - \bar{\mu}B) \\
&= \frac{1}{|M|}(\bar{\mu}^2 A - 2\bar{\mu}B + C)
\end{aligned}
$$

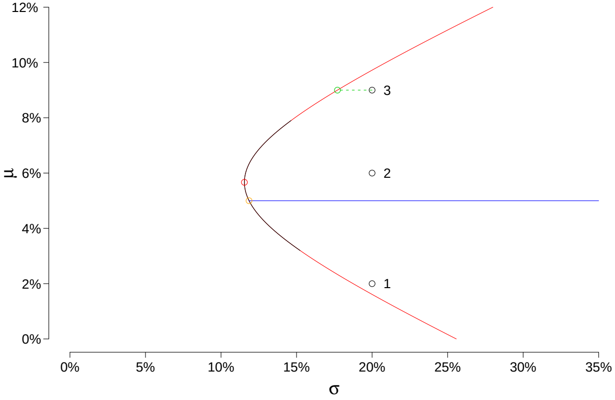
Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (78)

- Portfolios mit identischem Erwartungswert der Rendite $\bar{\mu}$ befinden sich auf dem Schnitt zweier Hyperebenen des $\mathbb{R}^n$.



Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (79)

- Die Mean-Variance-Effizienzgrenze im $\mu - \sigma$-Diagramm.



Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (80)

- Wo auf der Effizienzkurve (die eigentlich eine Gerade ist!) liegt das Globale Minimum-Varianz Portfolio?

$$\frac{d\sigma^2}{\partial\bar{\mu}} = \frac{1}{|M|}(2\bar{\mu}A - 2B) = 0$$

das ergibt,

$$\bar{\mu}^{\text{gmv}} = \frac{B}{A}$$

- Eine weitere Möglichkeit, das Globale Minimum-Varianz Portfolio zu ermitteln: Beim Globalen Minimum-Varianz Portfolio muss der Lagrange-Multiplikator, der mit der Rendite-Nebenbedingung $\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} = \bar{\mu}$ verbunden ist, gleich 0 sein (warum?):

$$\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|M|}(\bar{\mu}A - B) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\mu}^{\text{gmv}} = \frac{B}{A}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (81)

- Die Gewichte des Globalen Minimum-Varianz Portfolios können gefunden werden, indem man $\bar{\mu}^{\text{gmv}}$ in die Lösung des Optimierungsproblems einsetzt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}^{\text{gmv}} = \mathbf{w}^{\text{mv}}(\bar{\mu}^{\text{gmv}}) &= \frac{C - \frac{B}{A}B}{|M|}\Sigma^{-1}\mathbf{1} + \underbrace{\frac{\frac{B}{A}A - B}{|M|}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}}_{=0} \\
&= \frac{\frac{1}{A}\overbrace{(AC - B^2)}^{|M|}}{|M|}\Sigma^{-1}\mathbf{1} \\
&= \frac{1}{A}\Sigma^{-1}\mathbf{1} \\
&= \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}\Sigma^{-1}\mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (82)

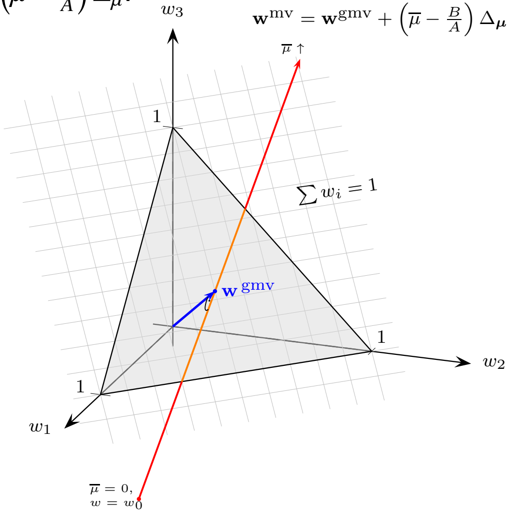
Mean-Variance Efficient Frontier – Effizienzlinie

Die Effizienzlinie der Minimum-Varianz Portfolios ist gegeben durch

$$w^{\mathsf{mv}} = w^{\mathsf{gmv}} + \left(\overline{\mu} - \frac{B}{A}\right)\Delta_{\mu}.$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (83)

- Mean-Variance-Efficient Portfolios befinden sich auf der Geraden $w^{\text{mv}} = w^{\text{gmv}} + \left(\overline{\mu} - \frac{B}{A}\right)\Delta_\mu$.



Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (84)

- Das Globale Minimum-Varianz Portfolio hängt nicht von den Ertragserwartungen $\boldsymbol{\mu}$ ab, sondern nur von der Varianz-Kovarianzstruktur Σ.
- In unserem einfachen Beispiel:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.04 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.04 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}.$$

- Daraus folgt

$$\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1} = (1, 1, 1)\begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix} = 75$$

und

$$\mathbf{w}^{\mathrm{gmv}} = \frac{1}{\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}}\Sigma^{-1}\mathbf{1} = \frac{1}{75}\begin{pmatrix} 25 \\ 25 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (85)

- Wir wissen schon: $\mathbf{w}^{\text{gmv}}$ ist orthogonal zu **allen** Portfoliotransaktionen. (siehe Orthogonalprojektion)
- Das heißt: Für zwei beliebige Portfolios $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ gilt

$$\langle \mathbf{w}^{\text{gmv}} | \Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2} \rangle = \text{Cov}(\mathbf{w}^{\text{gmv}}, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{w}^{\text{gmv}\prime} \Sigma (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) = 0.$$

  Das muss so sein, denn ansonsten wäre $\mathbf{w}^{\text{gmv}}$ nicht das Portfolio mit der geringsten Varianz!
- Nun zu $\mathbf{w}^{\text{mv}}(\bar{\mu})$: Das ist das Minimum-Varianzportfolio unter **all jenen** Portfolios, deren **erwartete Rendite gleich** $\bar{\mu}$ ist.
- Daher ist $\mathbf{w}^{\text{mv}}(\bar{\mu})$ orthogonal zu **allen** Portfoliotransaktionen zwischen Portfolien mit erwarteter Rendite von $\bar{\mu}$.
- D.h. für zwei beliebige Portfolios $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ mit erwarteter Rendite $\bar{\mu}$ gilt

$$\langle \mathbf{w}^{\text{mv}}(\bar{\mu}) | \Delta_{\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2} \rangle = \text{Cov}(\mathbf{w}^{\text{mv}}(\bar{\mu}), \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{w}^{\text{mv}\prime}(\bar{\mu}) \Sigma (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) = 0.$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (86)

- Auch Δ_μ ist orthogonal zu allen Portfoliotransaktionen zwischen Portfolien mit identischer Renditeerwartung.

Orthogonalzerlegung von Portfolien

Jedes beliebige Portfolio $\mathbf{p}$ kann in drei orthogonale Komponenten zerlegt werden:

$$\mathbf{p} = \mathbf{w}^{\text{gmv}} + \left(\mu_p - \frac{B}{A}\right)\Delta_\mu + \boldsymbol{\varepsilon}_p$$

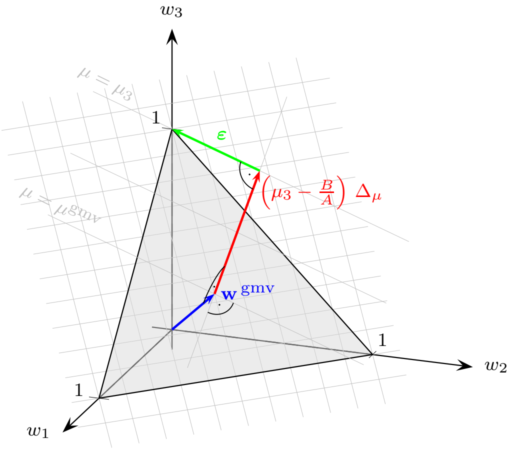
mit $(\mu_p - \frac{B}{A})\Delta_\mu$ als Projektion von $p - \mathbf{w}^{\text{gmv}}$ auf Δ_μ.

- Daher gilt:

$$\begin{aligned}
\mu_p &= \frac{B}{A} + \frac{\mathrm{Cov}(\mathbf{p} - \mathbf{w}^{\text{gmv}}, \Delta_\mu)}{\mathrm{Var}(\Delta_\mu)} = \frac{B}{A} + \frac{\mathrm{Cov}(\mathbf{p}, \Delta_\mu) - \overbrace{\mathrm{Cov}(\mathbf{w}^{\text{gmv}}, \Delta_\mu)}^{=0}}{\mathrm{Var}(\Delta_\mu)} \\
&= \frac{B}{A} + \frac{\mathrm{Cov}(\mathbf{p}, \Delta_\mu)}{\mathrm{Var}(\Delta_\mu)}
\end{aligned}$$

Optimierung unter Gleichheitsbedingungen (87)

- Portfoliozerlegung am Beispiel p_3.



Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (1)

- In manchen Fällen sind Nebenbedingungen aber nicht so streng wie Gleichheitsbedingungen.
- Z.B., Ressourcenbeschränkungen bedeuten i.a. nicht, dass man die verfügbare Ressource unter allen Umständen völlig aufbrauchen muss.

Def. Das Standardproblem der Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (KT.1)

$$\max_x f(x)$$

unter der Nebenbedingung

$$\mathbf{g}(x) \geq 0, \quad x \geq 0.$$

Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (2)

Beispiel

Betrachte ein Unternehmen, das ein nicht lagerfähiges Gut in zwei aufeinanderfolgenden Zeitperioden erzeugt. Die variablen Produktionskosten sind konstant EUR 10,- pro produzierter Einheit. Mit x_1 und x_2 bezeichnen wir die Produktionsmenge in den Perioden 1 und 2. Die inverse Nachfrage in der ersten Periode ist gegeben durch $p_1 = 100 - 1.5x_1$. In Periode 2 ist der erzielte Preis gleich $p_2 = 50 - 2x_2$. Während der Produktion sind Emissionen unvermeidbar. Gesetzliche Beschränkungen erlauben maximal 33 Einheiten zu erzeugen (Summe von x_1 und x_2). Kapazitätsbeschränkungen bewirken, dass in jeder Periode maximal 28 Einheiten produziert werden können. Der Zeitwert des Geldes ist gleich 0.

a) Bestimme die optimale Produktionsentscheidung x_1 und x_2, welche den Gesamtgewinn des Unternehmens maximiert.

b) Interpretiere das Ergebnis. Was kann man aus der Größenordnung der Lagrange-Multiplikatoren ablesen?

c) Angenommen, die Emissionsbeschränkung wird aufgehoben. Stattdessen wird eine Emissionssteuer von EUR 12 pro produzierter Einheit eingehoben. Was ist nun die optimale Produktionsentscheidung?

- Eine ausführlich dokumentierte Lösung des Problems inklusive interaktiver Darstellung der Lagrangefunktion finden Sie unter http://showcase.imw.tuwien.ac.at/BWOpt/BeispielKT1.html

Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (3)

Def. Bindende Nebenbedingungen

Eine Nebenbedingung $g^j \geq 0$ wird *bindend* an einem Punkt $\bar{x}$ genannt, wenn $g^j(\bar{x}) = 0$.

Regularitätsbedingung

Die Nebenbedingungen g erfüllen die Regularitätsbedingung, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) g^j ist linear für alle $j = 1, \ldots, m$.

(ii) g^j ist konkav und es existiert ein $\bar{x} > 0$, sodass $g^j > 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$.

(iii) Die zulässige Menge ($g^j \geq 0, x \geq 0$) ist konvex und hat ein nichtleeres Inneres, und $g_x^j \neq 0$ wenn die Nebenbedingung j bindend ist.

(iv) Sortiere die Nebenbedingungen, sodass die ersten $k \leq m$ Nebenbedingungen bindend sind. Dann hat die Matrix $[\partial g^j / \partial x]_{ji}, i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, k$ den vollen Rang k.

Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (4)

Th. Kuhn-Tucker

Sei x^* eine Lösung des Problems (KT.1). Angenommen die Regularitätsbedingung hält (siehe oben). Dann existiert eine Menge von Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, sodass

$$g^j(x^*) \geq 0, \quad \lambda_j \geq 0, \quad \text{und} \quad \lambda_j g^j(x^*) = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$f_{x_i}(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j_{x_i}(x^*) \leq 0, \quad x_i^* \geq 0,$$

$$x_i^* \left[f_{x_i}(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j_{x_i}(x^*) \right] = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (5)

Th. Kuhn-Tucker (cont)

Oder in kompakterer Schreibweise:

$$\mathcal{L}_\lambda(\lambda^*, x^*) \geq 0, \quad \lambda^* \geq 0, \quad \text{und} \quad \lambda^{*\prime}\mathcal{L}_\lambda(\lambda^*, x^*) = 0,$$
$$\mathcal{L}_x(\lambda^*, x^*) \leq 0, \quad x^* \geq 0, \quad \text{und} \quad x^{*\prime}\mathcal{L}_x(\lambda^*, x^*) = 0.$$

- Die Teilmenge der Kuhn-Tucker Bedingungen

$$\begin{aligned} \lambda^{*\prime}\mathcal{L}_\lambda(\lambda^*, x^*) &= 0, \\ x^{*\prime}\mathcal{L}_x(\lambda^*, x^*) &= 0. \end{aligned}$$

  heißen die *complementary slackness* Bedingungen.
- In Worten: Nur bindende Nebenbedingungen können Schattenpreise ungleich 0 haben.
- Salopp: Kuhn-Tucker $=$ Lagrange Methode für eine Auswahl an bindenden Nebenbedingungen $+$ ein Test-Kriterium welches entscheidet, ob die Auswahl konsistent mit dem Problem (KT.1) ist.

Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (6)

- Nachteil: Kuhn-Tucker bietet keine Anweisung, wie man die bindenden Nebenbedingungen ermittelt. D.h., wir brauchen etwas (ökonomische) Intuition und / oder wir müssen bis zu 2^m Lagrange-Probleme lösen.

Def. Duale Variablen

Ist (x^*, λ^*) eine optimale Lösung: Die Lagrange-Multiplikatoren λ^* heißen auch duale Variablen der Nebenbedingungen.
Die Ableitungen der Lagrangefunktion nach den Variablen $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,\lambda^*)}{\partial x} = \mathcal{L}_x(x^*, \lambda^*)$ heißen auch duale Variablen der Variablen.

Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (7)

Th. Hinreichende Bedingung

Angenommen (x^*, λ^*) erfüllen die Kuhn-Tucker Bedingungen und die gs erfüllen die Regularitätsbedingung (bei x^*). Nehme weiters an, dass die ersten $k \leq m$ Nebenbedingungen bindend sind bei x^* und dass die nicht bindenden Nebenbedingungen strikt nicht-bindend sind in einer ganzen Umgebung von x^*.
Wenn (x^*, λ_j^*), $j = 1, \ldots, k$, gemeinsam mit den bindenden Nebenbedingungen $g^j = 0$, $j = 1, \ldots, k$, die hinreichenden Bedingungen für das implizierte (L.1) Lagrange-Problem erfüllt, dann ist x^* ein lokales Maximum von (KT.1).

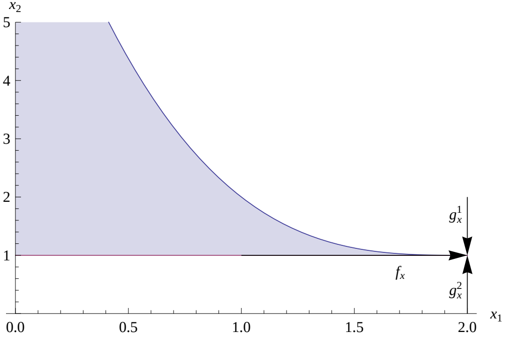
Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (8)

- Beispiel (Kralle, Cusp): Maximiere

$$f(x_1, x_2) = x_1$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g^1: \quad x_2 &\leq -(x_1 - 2)^3 + 1, \\ g^2: \quad x_2 &\geq 1. \end{aligned}$$



Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (9)

- Einige Anmerkungen:
- Angenommen, die gs hängen von der Wahl eines Parameters $\mathbf{p}$ ab.
- Sei $U \neq \{\}$ der zulässige Wertebereich von x.
- Wenn eine Änderung $\mathbf{p} \to \tilde{\mathbf{p}}$ zu einem zulässigen Wertebereich $\tilde{U}$ führt, mit $\tilde{U} \subseteq U$, dann nennen wir das eine Verschärfung der Nebenbedingungen g.
- Wenn eine Änderung $\mathbf{p} \to \tilde{\mathbf{p}}$ zu einem zulässigen Wertebereich $\tilde{U}$ führt, mit $U \subseteq \tilde{U}$, dann nennen wir das eine Lockerung der Nebenbedingungen g.
- Sei $f(x^*(p))$ ein (lokales) Maximum. Eine Änderung $\mathbf{p} \to \tilde{\mathbf{p}}$, welche die Nebenbedingung(en) verschärft, impliziert

$$f(x^*(\tilde{p})) \leq f(x^*(p)).$$

- Sei $f(x^*(p))$ ein (lokales) Maximum. Eine Änderung $\mathbf{p} \to \tilde{\mathbf{p}}$, welche die Nebenbedingung(en) lockert, impliziert

$$f(x^*(\tilde{p})) \geq f(x^*(p)).$$

Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (10)

- Insbesondere: Die Einführung einer zusätzlichen Nebenbedingung ist immer eine Verschärfung der Nebenbedingungen.
- Sei $f(x^*(p))$ ein (lokales) Minimum. Eine Änderung $\mathbf{p} \to \tilde{\mathbf{p}}$, welche die Nebenbedingung(en) verschärft, impliziert

$$f(x^*(\tilde{p})) \geq f(x^*(p)).$$

- Sei $f(x^*(p))$ ein (lokales) Minimum. Eine Änderung $\mathbf{p} \to \tilde{\mathbf{p}}$, welche die Nebenbedingung(en) lockert, impliziert

$$f(x^*(\tilde{p})) \leq f(x^*(p)).$$

Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (11)

Def. Das Minimierungsproblem unter Ungleichheitsbedingungen (KT.2)

$$\min_x f(x)$$

unter der Nebenbedingung

$$\mathbf{g}(x) \geq 0, \quad x \geq 0.$$

Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (12)

Th. Kuhn-Tucker - Minimierungsproblem

Sei x^* eine Lösung des Minimierungsproblems (KT.2). Angenommen die Regularitätsbedingung hält (siehe oben). Dann existiert eine Menge von Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, sodass

$$g^j(x^*) \geq 0, \quad \lambda_j \leq 0, \quad \text{und} \quad \lambda_j g^j(x^*) = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$f_{x_i}(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j_{x_i}(x^*) \geq 0, \quad x_i^* \geq 0,$$

$$x_i^* \left[f_{x_i}(x^*) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g^j_{x_i}(x^*) \right] = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (13)

Th. Kuhn-Tucker Minimierungsproblem (cont)

Oder in kompakterer Schreibweise:

$$\mathcal{L}_\lambda(\lambda^*, x^*) \geq 0, \quad \lambda^* \leq 0, \quad \text{und} \quad \lambda^{*\prime}\mathcal{L}_\lambda(\lambda^*, x^*) = 0,$$
$$\mathcal{L}_x(\lambda^*, x^*) \geq 0, \quad x^* \geq 0, \quad \text{und} \quad x^{*\prime}\mathcal{L}_x(\lambda^*, x^*) = 0.$$

- Achtung: Nun sind die Lagrange-Multiplikatoren ≤ 0, d.h., bei einer Lockerung der Nebenbedingungen wird der optimale Zielfunktionswert keinesfalls größer (= schlechter).

Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen (14)

- Interpretation der Lagrange-Multiplikatoren:
- Sind die Nebenbedingungen formulierbar als

$$g^j(x) = p_j - h(x),$$

dann gilt im Optimum (x^*, λ^*),

$$\frac{df}{dp_j}(x^*) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_j}(x^*, \lambda^*) = \lambda_j \quad j = 1, \ldots, k..$$

- Das ist so wie beim Lagrange-Problem, nur, dass nun das Vorzeichen des Multiplikators vorgegeben ist.
- Die Erhöhung von p_j um dp ist jedenfalls eine Lockerung der Nebenbedingung
  - $\Rightarrow$ die Zielfunktion eines Maximierungsproblems wird möglicherweise steigen, aber keineswegs sinken $\Rightarrow \lambda_j \geq 0$.
  - $\Rightarrow$ die Zielfunktion eines Minimierungsproblems wird möglicherweise sinken, aber keineswegs steigen $\Rightarrow \lambda_j \leq 0$.

Lineare Optimierung (1)

- Die lineare Optimierung ist ein Spezialfall, bei dem die Zielfunktion und alle Nebenbedingungen lineare Funktionen sind.
- Daher ist die Regularitätsbedingung in jedem Fall erfüllt (siehe oben).
- Der zulässige Wertebereich (x, die alle Nebenbedingungen erfüllen) ist entweder leer oder es ist ein konvexer, n-dimensionaler Polyeder.
- Auf Grund der Linearität des Problems wissen wir: Wenn ein Optimum existiert, dann ist immer ein Eckpunkt des Polyeders Teil der Lösungsmenge.
- Der **Simplex**-Algorithmus wurde von George Dantzig in den 1940-er Jahren entwickelt. Ist eine Methode, die systematisch die Ecken des Polyeders absucht, entlang des Pfades der steilsten Verbesserung der Zielfunktion.
- Die händische Berechnung des Simplex-Algorithmus mit Hilfe des Simplex-Tableau wird in diesem Kurs nicht erklärt.

Lineare Optimierung (2)

- Lösen nun ein einfaches Beispiel und lernen, wie man das **R**-package `lpSolve` verwendet.

Beispiel Tischlermeister

Tischlermeister H. plant sein kommendes Arbeitsjahr. Maximal 1200 Stunden will er sich der Erzeugung von Tischen bzw. Sesseln widmen, den Rest der Zeit reserviert er für Reparaturarbeiten. Auf Grund der räumlichen Enge der Werkstatt kann er höchstens 320 Tische im Jahr erzeugen. Die Produktion eines Tisches dauert 2 Stunden und benötigt 0.8 Einheiten Holz, für die Fertigung eines Sessels benötigt er 4 Stunden und verbraucht 0.4 Einheiten Holz. Es stehen ihm maximal 282 Einheiten Holz pro Jahr zur Verfügung.

Der Deckungsbeitrag eines Tisches beträgt EUR 90, der Deckungsbeitrag eines Sessels beträgt EUR 60. (Darin sind alle Kosten - z.B. für Holz - berücksichtigt.)

Erstellen Sie ein Lineares Programm, mit dem Ziel, durch einen optimalen Produktmix den gesamten Deckungsbeitrag zu maximieren.

Lineare Optimierung (3)

- Zielfunktion des linearen Programms:

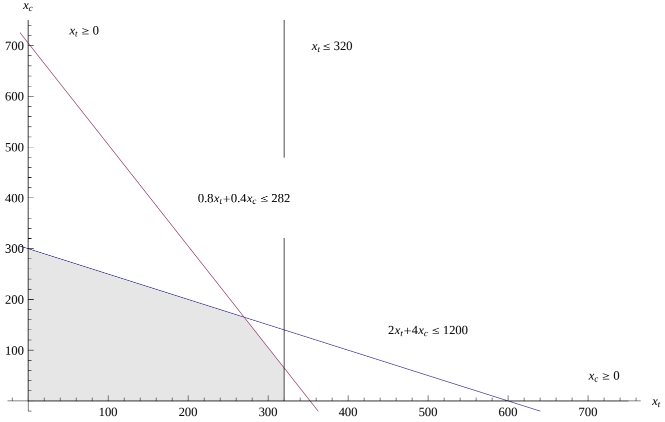
$$\max_{x_t, x_c} f(x_t, x_c) = 90x_t + 60x_c$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g^1(x_t, x_c) = 320 - x_t &\geq 0, \\ g^2(x_t, x_c) = 1200 - 2x_t - 4x_c &\geq 0, \\ g^3(x_t, x_c) = 282 - 0.8x_t - 0.4x_c &\geq 0, \end{aligned}$$

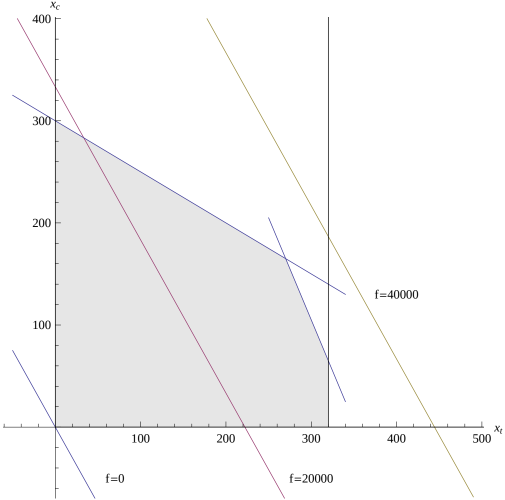
Lineare Optimierung (4)

- Die Menge der zulässigen Produktionspläne.



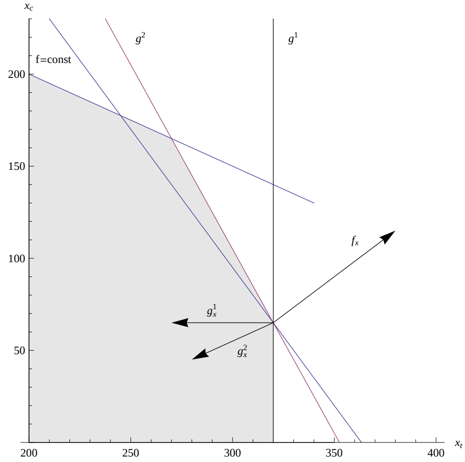
Lineare Optimierung (5)

- Die Menge der zulässigen Produktionspläne gemeinsam mit Isoquanten der Zielfunktion.



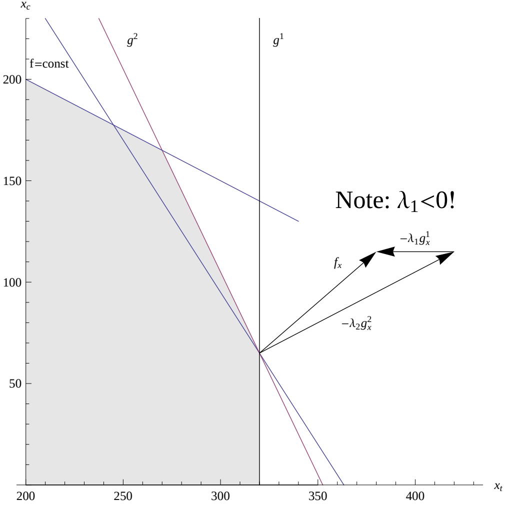
Lineare Optimierung (6)

- An einem nicht optimalen Eckpunkt: Der Gradient der Zielfunktion kann als Linearkombination der Gradienten der aktiven Nebenbedingungen geschrieben werden. Aber…



Lineare Optimierung (7)

- …das Vorzeichen mindestens eines Lagrange-Multiplikators ist nicht konsistent mit den Kuhn-Tucker Bedingungen.



Lineare Optimierung (8)

- Lineares Programm hat die allgemeine Form

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{ccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & \leq & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & \leq & b_2 \\ a_{3,1}x_1 & + & a_{3,2}x_2 & \leq & b_3 \end{array}$$

- Oder in kompakter Form (Matrixschreibweise, mehr als 2 Dimensionen!):

$$\mathbf{c}'\mathbf{x} \to \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

Lineare Optimierung (9)

- Dabei wird A auch als `lhs` für left-hand-side (linke Seite der Gleichung) bezeichnet und $\mathbf{b}$ als `rhs` für right-hand-side (rechte Seite der Gleichung).
- Konkret im Beispiel

$$90x_t + 60x_c \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcrcr} x_t & & & \leq & 320 \\ 2x_t & + & 4x_c & \leq & 1200 \\ 0.8x_t & + & 0.4x_c & \leq & 282 \end{array}$$

- Implementierung: siehe `LP.R`, das Package `lpSolve` wird benötigt.

```
library(lpSolve)
```

Lineare Optimierung (10)

- LP.R cont.

```
# Koeffizienten der Zielfunktion
obj <- c(90,60)

# Nebenbedingungen
# Raumbeschränkung
lhs <- matrix(c(1,0),nrow=1)
rhs <- 320
dir <- "<="

# Zeitbeschränkung
lhs <- rbind(lhs,c(2,4))
rhs <- c(rhs,1200)
dir <- c(dir,"<=")
```

Lineare Optimierung (11)

- `LP.R` cont.:

```
# Holzbeschränkung
lhs <- rbind(lhs,c(0.8,0.4))
rhs <- c(rhs,282)
dir <- c(dir,"<=")

# Errechne die Lösung
sol <- lp("max",obj,lhs,dir,rhs,compute.sens=T)
```

- Die verfügbaren Komponenten der Lösung (in `sol` gespeichert) lassen sich mit `names(sol)` ermitteln. Die wichtigsten sind

  `sol$objval`

  `sol$solution`

  `sol$duals` (zuerst die dualen Variablen der Nebenbedingungen, dann die der Variablen)

Lineare Optimierung (12)

- Alternativ dazu kann man das gesamte Gleichungssystem der Nebenbedingungen in einem Schritt erstellen:

```
> obj<-c(90,60)
> lhs<-matrix(c(1,0,2,4,0.8,0.4),nrow=3,byrow=TRUE)
> dir<-c("<=","<=","<=")
> rhs<-c(320,1200,282)
> sol<-lp("max",obj,lhs,dir,rhs,compute.sens=TRUE)
```

Lineare Optimierung (13)

- Resultat:

```
Optimaler Produktionsplan
       Anzahl
Tische    270
Sessel    165

max.  Zielfunktion:  34200

duale Variablen der Nebenbedingungen
(Schattenpreise):
   lambda
g1      0
g2      5
g3    100
```

Lineare Optimierung (14)

- Resultat (cont):

```
duale Variablen der Variablen (relative
Deckungsbeiträge):
   rel.  Deckungsbeitrag
x1           0
x2           0
```

- Die λs sagen uns, dass der Tischlermeister eine zusätzliche Arbeitsstunde mit EUR 5 und eine zusätzliche Einheit Holz mit EUR 100 bewertet.
- Zusätzlicher Platz hat einen Wert von EUR 0, weil die Platzbeschränkung nicht bindend ist.
- Die relativen Deckungsbeiträge stellen die marginalen Opportunitätskosten dar, wenn man vom optimalen Plan abweicht und eine zusätzliche marginale Einheit erzeugt.
- Beide Variablen sind strikt positiv, daher sind beide relative Deckungsbeiträge gleich 0.

Lineare Optimierung (15)

- Nun ändern wir die Gewinnmargen der Produkte, sodass nur ein Produkt im optimalen Produktionsplan ist:

$$\max_{x_t, x_c} f(x_t, x_c) = 60x_t + 130x_c$$

- Neues Resultat:

```
optimaler Produktionsplan
       Anzahl
Tische      0
Sessel    300

max.  Zielfunktion:  39000
```

Lineare Optimierung (16)

- Neue Resultate (cont.):

```
duale Variablen der Nebenbedingungen
(Schattenpreise):
   lambda
g1    0.0
g2   32.5
g3    0.0

duale Variablen der Variablen (relative
Deckungsbeiträge):
   rel.  margin
Tische       -5
Sessel        0
```

- Nun sind Tische nicht im Produktionsplan. Die Opportunitätskosten für die Produktion eines (marginalen) Tisches betragen EUR 5 pro Einheit.

Lineare Optimierung (17)

- Die duale Sichtweise konzentriert sich auf die Frage nach der internen Bewertung der Restriktionen. Sie stellt eine Beziehung zwischen dem bewerteten Ressourcenverbrauch, der mit einer Einheit einer Aktivität verbunden ist, und dem Deckungsbeitrag, der dadurch erwirtschaftet wird, her.
- Sei λ_i der Wert einer Einheit der durch die Restriktion i beschränkten Ressource. Durch eine Einheit der Aktivität j werden a_{ij} Einheiten der Ressource verbraucht.
- Wenn die Bewertung konsistent ist, dann muss gelten: Wert des Ressourcenverbrauchs pro Einheit einer Aktivität $\geq$ Deckungsbeitrag pro Einheit dieser Aktivität

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\lambda_i \geq c_j$$

Lineare Optimierung (18)

- Suche nach der minimalen internen Bewertung, die das erfüllt

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \lambda_i \to \min$$

- Da die λ_i Schattenpreise von $\leq$ Restriktionen sind, müssen sie natürlich ≥ 0 sein.
- Oder in Vektorschreibweise

$$\begin{array}{rrcl} & b'\lambda & \to & \min\limits_{\lambda} \\ \text{unter} & A'\lambda & \geq & c \\ & \lambda & \geq & 0 \end{array}$$

Lineare Optimierung (19)

- Wir formen die Lagrange-Funktion des Tischler-Beispiels um

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= 90x_t + 60x_c + \lambda_1(320 - x_t) \\
&\quad +\lambda_2(1200 - 2x_t - 4x_c) + \lambda_3(282 - 0.8x_t - 0.4x_c) \\
&= 320\lambda_1 + 1200\lambda_2 + 282\lambda_3 \\
&\quad +x_t(90 - \lambda_1 - 2\lambda_2 - 0.8\lambda_3) + x_c(60 - 4\lambda_2 - 0.4\lambda_3)
\end{aligned}
$$

- Sieht wie die Lagrange-Funktion eines Minimierungsproblems aus, allerdings müssen dort die Lagrange-Mutiplikatoren nicht-positiv sein, aber $x_t \geq 0$ und $x_c \geq 0$.

Lineare Optimierung (20)

- Definiere $\kappa_t = -x_t \leq 0$, $\kappa_c = -x_c \leq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= 320\lambda_1 + 1200\lambda_2 + 282\lambda_3 \\ &\quad +\kappa_t(-90 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + 0.8\lambda_3) + \kappa_c(-60 + 4\lambda_2 + 0.4\lambda_3) \end{aligned}$$

- Das ist die Lagrange-Funktion des Problems

$$320\lambda_1 + 1200\lambda_2 + 282\lambda_3 \to \min$$

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 0.8\lambda_3 \geq & 90 \\ & + & 4\lambda_2 & + & 0.4\lambda_3 \geq & 60 \end{array}$$

Lineare Optimierung (21)

- Implementierung in **R**:

```
obj <- c(320,1200,282)

lhs <- matrix(c(1,0,2,4,0.8,0.4),nrow=2)
rhs <- c(90,60)
dir <- c(">=",">=")
```

Lineare Optimierung (22)

- Die Lösung wird errechnet durch den Aufruf

```
sol <- lp("min",obj,lhs,dir,rhs,compute.sens=T)
```

- `sol$solution` ergibt:

```
[1] 0 5 100
```

- Das sind die optimalen Ressourcebewertungen:

```
optimale Bewertung der Ressourcen
     EUR
Raum   0
Zeit   5
Holz 100
```

- Der minimale, bewertete Ressourcenverbrauch ist `sol$objval`:

```
min.  Ressourceverbauch:  34200
```

Lineare Optimierung (23)

- Die Nebenbedingungen sagen: Der bewertete Ressourcenverbrauch jedes Produkts muss größer oder gleich dem Deckungsbeitrag sein. Die duale Variable einer Nebenbedingung sagt dann aus: Um welchen Betrag steigt die Zielfunktion, wenn der Deckungsbeitrag um einen (marginalen) EUR steigt.
- D.h., die dualen Variablen der Nebenbedingungen sind die optimalen Produktionsmengen:

```
duale Variablen der Nebenbedingungen
(Produktionsplan):
       Anzahl
Tische    270
Sessel    165
```

Lineare Optimierung (24)

- Die dualen Variablen der Variablen geben an, wie viel freie Ressourcen vorhanden sind (sog. Slack):

```
duale Variablen der Variablen (Slack):
     Slack
Raum    50
Zeit     0
Holz     0
```

- D.h., die Raum-Restriktion hat einen Slack von 50, die beiden anderen sind voll ausgeschöpft.

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (1)

- Während große lineare Programme sehr effizient und schnell gelöst werden können, ändern sich Dinge drastisch, sobald einige der freien Variablen x auf ganzzahlige Werte beschränkt sind.
- Die Differenzierbarkeit der Zielfunktion ist in diesem Fall nicht gegeben, d.h., die Lagrange und Kuhn-Tucker Bedingungen können nicht angewandt werden.
- Solange es einen effizienten Algorithmus zur Lösung des zugrunde liegenden nicht-ganzzahligen Problems gibt, ist der sog. *Branch-and-Bound* Algorithmus geeignet, das ganzzahlige Problem zu lösen.
- Der einfachste Ansatz ist eine vollständige Enumeration, d.h., die Evaluierung der Lösung des verbleibenden nicht-ganzzahligen Problems für jede zulässige Kombination der ganzzahligen Variablen.

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (2)

- Betrachte ein Problem mit n binären Variablen (ganzzahlige Variablen, die entweder 0 oder 1 sein können). Angenommen, ein Computer kann pro Sekunde 1 Milliarde Mal die Zielfunktion an unterschiedlichen Stellen berechnen und vergleichen. Die benötigte Zeit zur vollständigen Enumeration ist:
  - für $n = 10$ dauert es $1.024\mu s$,
  - für $n = 20 \ldots 1.049ms$,
  - für $n = 30 \ldots 1.074s$,
  - für $n = 40 \ldots 18.33$min,
  - für $n = 50 \ldots 13.03$d,
  - für $n = 60 \ldots 36.6$y.
  - für $n = 100 \ldots 4.02 \cdot 10^{13}$y.
- D.h., wir müssen unter allen Umständen die vollständige Enumeration vermeiden!

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (3)

- Branch-and-Bound Algorithmus für gemischt-ganzzahlige lineare Probleme:
- Betrachte ein lineares Maximierungsproblem, bei dem die ersten $k \leq n$ Variablen in $\mathbf{x}$ ganzzahlig sein müssen.
- Einige Überlegungen:
- Zuerst ignorieren wir die Ganzzahligkeitsbedingung und lösen das lineare Programm. Nenne dieses initiale Problem P0 und die Lösung von P0 nennen wir f_0.
- Wenn f_0 alle Ganzzahligkeitsbedingungen erfüllt, dann ist f_0 auch die Lösung des Gesamtproblems.
- Wenn nicht, dann wählen wir eine beliebige Variable, die die Ganzzahligkeitsanforderung nicht erfüllt, sagen wir x_i. Sei $x_{0,i}$ der Wert von x_i in der Lösung f_0 und $\underline{x}_{0,i}$ die größte ganze Zahl mit $\underline{x}_{0,i} \leq x_{0,i}$. Weiters sei $\bar{x}_{0,i}$ die kleinste ganze Zahl mit $\bar{x}_{0,i} \geq x_{0,i}$.

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (4)

- Erzeuge zwei neue Modelle (Zweige, branches) und füge sie an die Kandidatenliste an:
  - P1 ist P0 mit der zusätzlichen Nebenbedingung $x_i \geq \bar{x}_{0,i}$.
  - P2 ist P0 mit der zusätzlichen Nebenbedingung $x_i \leq \underline{x}_{0,i}$
- Nun lösen wir P1 und P2 und – falls noch weitere Variablen existieren, die die Ganzzahligkeitsbedingungen nicht erfüllen – erzeugen wir weitere Zweige.
- So weit ist der Verzweigungsalgorithmus nur ein systematischer Ansatz, um das Problem vollständig zu enumerieren.
- Glücklicherweise können wir obere Schranken für den maximal erzielbaren Zielfunktionswert in jedem Zweig ausrechnen (bounds): Betrachte das Problem Ph mit der LP-Lösung f_h. Alle Probleme, die in diesem Zweig noch folgen, haben zusätzliche Nebenbedingungen, d.h., das sind Verschärfungen der Nebenbedingungen. Daher gilt: $f_l \leq f_h$ für alle Nachfolger-Probleme Pl.
- Nun sind wir vorbereitet, um den Branch-and-Bound Algorithmus zu formulieren.

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (5)

- Branch-and-Bound:

1. Starte mit P0 und ignoriere alle Ganzzahligkeitsbedingungen und hänge es an der Kandidatenliste an. Der Status des Modells ist ”not calculated” und als ”parent objective” setzen wir -∞.
2. Unter allen nicht evaluierten Modellen auf der Kandidatenliste wähle jenes mit dem größten Wert für ”parent objective”, sage Ph, und berechne die LP-Lösung f_h.
3. Wenn keines der folgenden Kriterien erfüllt ist, setze den Status des Problems auf ”evaluated”, verzweige in zwei Modelle an einer Variable, für welche die LP-Lösung die Ganzzahligkeitsbedingung nicht erfüllt, setze f_h als ”parent objective” für beide Nachfolger-Modelle und den Status auf ”non-evaluated”.
4. Setze bei Schritt 2 fort, solange Modelle mit Status ”non-evaluated” in der Kandidatenliste sind.

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (6)

5. Wenn kein ”non-evaluated”-Modell übrig ist:
    - Wenn keines der evaluierten LP-Modelle die Ganzzahligkeitsbedingungen erfüllt, dann ist das Gesamtmodell unlösbar.
    - Wenn die Lösungen eines oder mehrerer Kandidaten-Modelle alle Ganzzahligkeitsbedingungen erfüllt (erfüllen), ermittle die maximale Lösung als Gesamtlösung des Problems.

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (7)

- Abbruchbedingung: Es gibt keine weitere Verzweigung in einem Zweig nachdem P_h evaluiert wurde, wenn eines der folgenden Kriterien erfüllt ist:

i Die LP-Lösung f_h erfüllt alle Ganzzahligkeitsbedingungen.
  - Dann ist f_h eine zulässige Lösung des Gesamtproblems. Vergleiche f_h mit der besten bisher bekannten Lösung.
  - Wenn es das bisherige Max. übersteigt, dann merke Ph und f_h.
  - Suche nach "non-evaluated" Problemen in der Kandidatenliste, deren "parent-objective" kleiner als f_h ist. Ändere deren Status von "non-evaluated" in "dominated". D.h., der gesamte Zweig ab diesem Modell ist dominiert und braucht nicht weiter evaluiert werden (keine Verzweigung mehr)

ii Wenn Ph unlösbar ist.
  - Setze den Status auf "infeasible".

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (8)

- Betrachte das folgende ganzzahlige, lineare Modell:

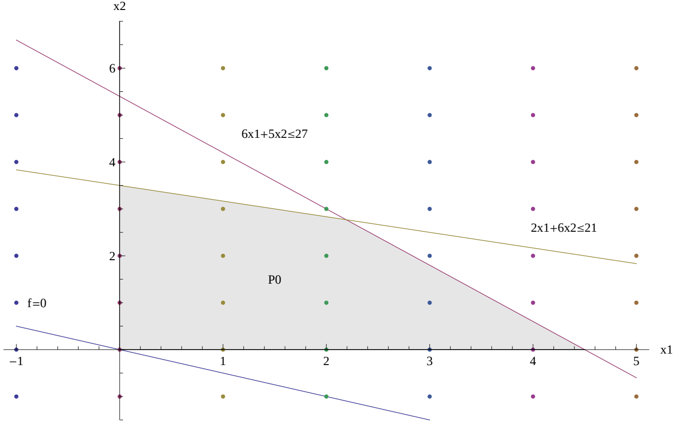
  max $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$

  unter den Nebenbedingungen

$$
\begin{array}{rrcrl}
6x_1 & +5x_2 & \leq & 27 & \\
2x_1 & +6x_2 & \leq & 21 & \\
 & x_j & \geq & 0 & \text{und ganzzahlig, } j = 1, 2
\end{array}
$$

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (9)

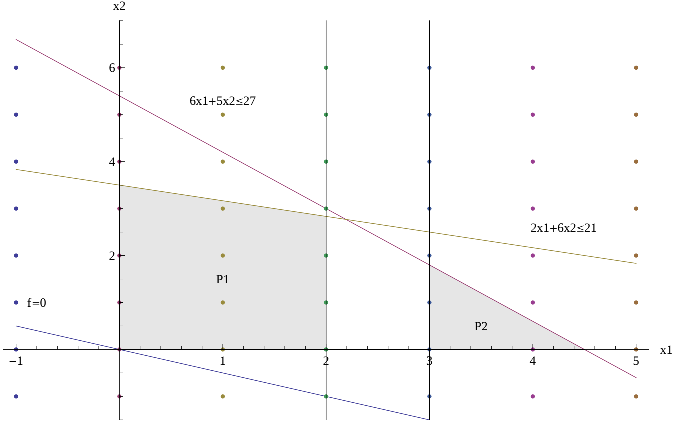
- Hier sieht man das initiale Problem P0 gemeinsam mit dem Gitter der erlaubten ganzzahligen Lösungspaare (x_1, x_2).



- Die LP-Lösung P0 ist: $f_0 = 7.73$, $x_{0,1} = 2.19$,$x_{0,2} = 2.77$.

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (10)

- Verzweigung bei $x_{0,1}$ führt zu den zwei weiteren Kandidaten P1, P2.



Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (11)

- Die Kandidatenliste

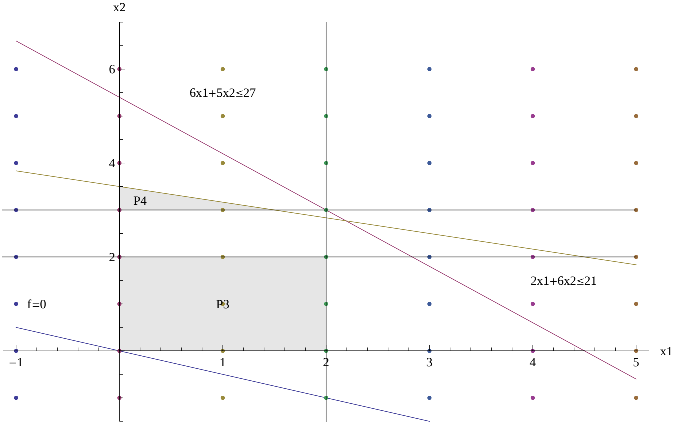
Modell	Status	parent objective	Nebenbedingungen
P0	”evaluated”	$-\infty$	P0
P1	”non-evaluated”	7.73	P0 & $x_1 \leq 2$
P2	”non-evaluated”	7.73	P0 & $x_1 \geq 3$

- Setze fort mit P1
- Die LP-Lösung ist: $f_1 = 7.67$, $x_{1,1} = 2.0$,$x_{1,2} = 2.83$.
- Neue Kandidatenliste ist:

Modell	Status	parent objective	Nebenbedingungen
P0	”evaluated”	$-\infty$	P0
P1	”evaluated”	7.73	P0 & $x_1 \leq 2$
P2	”non-evaluated”	7.73	P0 & $x_1 \geq 3$
P3	”non-evaluated”	7.67	P0 & $x_1 \leq 2$ & $x_2 \leq 2$
P4	”non-evaluated”	7.67	P0 & $x_1 \leq 2$ & $x_2 \geq 3$

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (12)

- Illustration der Probleme P3 und P4:



Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (13)

- Wir setzen bei P2 fort.
- Die LP-Lösung ist: $f_2 = 6.6$, $x_{2,1} = 3.0$,$x_{2,2} = 1.8$.
- Erneut verzweigen bei $x_{2,2}$, die neue Kandidatenliste:

Modell	Status	parent objective	Nebenbedingungen
P0	"evaluated"	$-\infty$	P0
P1	"evaluated"	7.73	P0 & $x_1 \leq 2$
P2	"evaluated"	7.73	P0 & $x_1 \geq 3$
P3	"non-evaluated"	7.67	P0 & $x_1 \leq 2$ & $x_2 \leq 2$
P4	"non-evaluated"	7.67	P0 & $x_1 \leq 2$ & $x_2 \geq 3$
P5	"non-evaluated"	6.60	P0 & $x_1 \geq 3$ & $x_2 \leq 1$
P6	"non-evaluated"	6.60	P0 & $x_1 \geq 3$ & $x_2 \geq 2$

- Nun P3. Die LP-Lösung ist: $f_3 = 6$, $x_{3,1} = 2$,$x_{3,2} = 2$.
- Lösung erfüllt die Ganzzahligkeitsbedingung! Keine weitere Verzweigung! Das ist die beste bisher gefundene Lösung! Keiner der Äste ist dominiert.

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (14)

- Setze fort mit P4. LP-Lösung ist: $f_4 = 7.5$, $x_{4,1} = 1.5$, $x_{4,2} = 3$.
- Verzweigung erweitert die Kandidatenliste:

Modell	Status	parent objective	Nebenbedingungen
P0	”evaluated”	$-\infty$	P0
P1	”evaluated”	7.73	P0 & $x_1 \leq 2$
P2	”evaluated”	7.73	P0 & $x_1 \geq 3$
P3	”solution”	7.67	P0 & $x_1 \leq 2$ & $x_2 \leq 2$
P4	”evaluated”	7.67	P0 & $x_1 \leq 2$ & $x_2 \geq 3$
P5	”non-evaluated”	6.60	P0 & $x_1 \geq 3$ & $x_2 \leq 1$
P6	”non-evaluated”	6.60	P0 & $x_1 \geq 3$ & $x_2 \geq 2$
P7	”non-evaluated”	7.50	P0 & $x_1 \leq 1$ & $x_2 \geq 3$
P8	”non-evaluated”	7.50	P0 & $x_1 = 2$ & $x_2 \geq 3$

- Setze fort mit P7: $f_7 = 7.33$, $x_{7,1} = 1$, $x_{7,2} = 3.17$.
- Verzweige weiter bei $x_{7,2} = 3.17$.

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (15)

- Die neue Kandidatenliste ist (überspringe Status ”evaluated”):

Modell	Status	parent objective	Nebenbedingungen
P3	”solution”	7.67	P0 & $x_1 \leq 2$ & $x_2 \leq 2$
P5	”non-evaluated”	6.60	P0 & $x_1 \geq 3$ & $x_2 \leq 1$
P6	”non-evaluated”	6.60	P0 & $x_1 \geq 3$ & $x_2 \geq 2$
P8	”non-evaluated”	7.50	P0 & $x_1 = 2$ & $x_2 \geq 3$
P9	”non-evaluated”	7.33	P0 & $x_1 \leq 1$ & $x_2 = 3$
P10	”non-evaluated”	7.33	P0 & $x_1 \leq 1$ & $x_2 \geq 4$

- P8 hat keine zulässige Lösung, Abbruchkriterium ist erfüllt.
- Nun P9: $f_9 = 7$, $x_{9,1} = 1$, $x_{9,2} = 3$.
- Das ist eine ganzzahlige Lösung! Sie ist besser als P3($f_3 = 6$).
- Probleme P5 und P6 sind dominiert durch P9.

Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierung (16)

- Dann bleibt nur mehr P10: Keine zulässige Lösung.
- Das Maximum ist daher gegeben durch die Lösung des Problems P9:

$$\begin{aligned} x_1^* &= 1 \\ x_2^* &= 3 \\ f(x_1^*, x_2^*) &= 7 \end{aligned}$$

Das Bellman - Prinzip (1)

- Ein *dynamisches Optimierungsproblem* ist ein Optimierungsproblem, bei dem die Entscheidungen sequenziell über einige Zeitperioden hinweg getroffen werden.
- Diese Zeitperioden sind in irgendeiner Weise miteinander ‘verknüpft’, d.h., die Aktionen, welche in einer Periode gesetzt werden, führen zu einem sofortigen Nutzen, aber beeinflussen auch den Zustand des Systems in den Folgeperioden.
- Aktionen, die vom Standpunkt des sofortigen Nutzens sehr attraktiv sind (z.B. ein luxuriöser Urlaub), können den *Zustand* des Systems (d.h., das Bankguthaben) in einer sehr ungünstigen Weise beeinflussen, die das zukünftige Leben schwer macht.
- Notation:

S	...	der Zustandsraum des Problems mit Elementen s
A	...	der Aktionsraum des Problems mit Elementen a
T	...	der Horizont des Problems

Das Bellman - Prinzip (2)

- Wir behandeln in dieser Lehrveranstaltung nur zeitdiskrete Probleme.
- Für jedes $t \in \{1, \ldots, T\}$

$r_t : S \times A \to \mathbb{R}$	...	die Belohnungsfunktion zum Zeitpunkt t
$f_t : S \times A \to S$	...	die Zustands-Übergangsfunktion zum Zeitpunkt t
$\Phi_t :$	...	die erlaubten Aktionen zum Zeitpunkt t

- Das dynamische Programm ist dann

$$\max_{a_t} \sum_{t=1}^{T} r_t(s_t, a_t)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} s_1 &= \bar{s} \in S \\ s_t &= f_{t-1}(s_{t-1}, a_{t-1}), \quad t = 2, \ldots, T \\ a_t &\in \Phi_t(s_t), \quad t = 1, \ldots, T. \end{aligned}$$

Das Bellman - Prinzip (3)

Def. Strategie

Eine Strategie σ ist ein bedingter Plan, d.h., ein Plan, der festlegt, was in jedem Zeitschritt zu tun ist als Funktion von allem, was bis zum jeweiligen Zeitpunkt passiert ist.

- D.h., eine Strategie σ definiert a_t in Abhängigkeit von der t-Historie $\eta_t = \{s_1, a_1, \ldots, s_{t-1}, a_{t-1}, s_t\}$.

Def. Wertefunktion

Nenne $V(s_1, \sigma)$ die Wertefunktion eines Problems definiert durch

$$V(s_1, \sigma) = \sum_{t=1}^{T} r_t(s_t, a_t = \sigma(\eta_t))$$

welche bei Anwendung der Strategie σ erreicht wird.

Das Bellman - Prinzip (4)

- Die optimale Strategie σ^* ist die Lösung des dynamischen Optimierungsproblems.

Def. Wertefunktion (cont.)

Schreibt man σ nicht explizit als Argument, dann nimmt man an, dass die optimale Strategie angewendet wird, d.h.,

$$V(s_1) = V(s_1, \sigma^*) = \max_{a_t} \sum_{t=1}^{T} r_t(s_t, a_t)$$

Def. Markov-Strategie

Eine Markov-Strategie ist eine Strategie, in der $a_t = \sigma_t(\eta_t)$ nur durch t und den Zustand s_t von der Historie abhängt.

- Eine Markov-Strategie kann als eine Sequenz von Funktionen $\{g_1, \ldots, g_T\}$ dargestellt werden, wobei $g_t : S \rightarrow A$.

Das Bellman - Prinzip (5)

- Von nun an betrachten wir nur Markov-Probleme, d.h., wir beschränken uns auf Strategien $\sigma = \{g_1(s_1), \ldots, g_T(s_T)\}$.

Def. Folgeproblem oder Fortsetzungsproblem

Das Zeit-t-Folgeproblem (auch Fortsetzungsproblem) ist jenes Teilproblem, das sich über die Zeitperioden $t, t+1, \ldots, T$ erstreckt.

- D.h., das Zeit-t-Folgeproblem ist

$$V_t(s_t) = \max_{a_\tau} \sum_{\tau=t}^{T} r_\tau(s_\tau, a_\tau)$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
s_t &\in S \quad \text{gegeben}, \\
s_\tau &= f_{\tau-1}(s_{\tau-1}, a_{\tau-1}), \quad \tau = t, \ldots, T \\
a_\tau &\in \Phi_\tau(s_\tau), \quad \tau = t, \ldots, T.
\end{aligned}$$

Das Bellman - Prinzip (6)

- Dann ist $V_t(s_t)$ die Wertefunktion des Zeit-t-Folgeproblems, d.h., jener Wert, den ich erhalte, wenn ich die optimale bedingte Strategie an das Zeit-t-Folgeproblem anwende, welches im Zustand s_t startet.

Th. Das Bellman Prinzip

Betrachte ein Markov-Problem, und $V_t(s_t)$ ist die Wertefunktion des Zeit-t-Folgeproblems, dann gilt

$$V_t(s) = \max_{a \in \Phi(s)} \{r_t(s,a) + V_{t+1}(f_t(s,a))\}$$

- In Worten: Die Wertefunktion des Zeit-t-Folgeproblems lässt sich ermitteln als eine gemeinsame Maximierung der Summe aus zwei Komponenten
  - sofortige Belohnung,
  - Wert des Zeit-$t+1$-Folgeproblems unter **voller Berücksichtigung der Konsequenzen** der Aktion zum Zeitpunkt t.

Das Bellman - Prinzip (7)

- Sobald wir in der Lage sind, die Wertefunktion in der letzten Periode, $V_T(s_t)$, anzugeben, gibt uns das Bellman-Prinzip ein Iterationsschema, mit dem wir uns zurück bis zum Zeitpunkt $t = 1$ arbeiten können.
- Daher wird das Bellman-Prinzip auch als Rückwärtsinduktion (backward induction principle) bezeichnet.
- Diese Idee funktioniert ganz analog auch für Minimierungsprobleme (siehe das folgende Beispiel).

Das Bellman - Prinzip (8)

Ex. Eiswaffelproduktion

Zu Beginn des Monats Juli sind die Lager einer Eiswaffelfabrik leer. Für die Monate Juli, August, September ist ein Absatz von je 5000 Kartons Eiswaffeln prognostiziert. Die Kostenfunktion für x Kartons Eiswaffeln in einem Monat ist

$$K(x) = \begin{cases} \text{EUR } 0 & : \quad x = 0, \\ \text{EUR } 3000 + 0.5x & : \quad x > 0, \end{cases}$$

d.h., die Fixkosten fallen nur an, wenn die Produktion läuft.

Zu Beginn jedes der Monate Juli, August und September kann die Fabrik entscheiden, entweder 0, 5000, 10000 oder 15000 Kartons zu erzeugen. Für die Lagerung eines Kartons muss ein Betrag von EUR 0.5 pro Monat aufgewendet werden (Berechnung nach Monatsendbestand). Am Ende der Eissaison (Ende September) ist ein eventuell vorhandener Lagerbestand wertlos.

Ermitteln Sie die kostenminimale Produktions- / Lagerentscheidung mit Hilfe des Bellman Prinzips (keine Diskontierung). Wie hoch sind die minimalen Kosten?

Das Bellman - Prinzip (9)

- Die Kostenfunktion

$$
\begin{aligned}
C(0) &= 0 \\
C(5.000) &= 5.500 \\
C(10.000) &= 8.000 \\
C(15.000) &= 10.500
\end{aligned}
$$

- Optimale bedingte Entscheidung am Beginn des Septembers:

a_3 / s_3	0	5.000	10.000	15.000	$V_3(s_3)$	$g_3(s_3)$
0		$C(5.000) = 5.500$	$C(10.000) = 8.000$	$C(15.000) = 10.500$	5.500	5.000
5000	$C(0) = 0$	$C(5.000) = 5.500$	$C(10.000) = 8.000$	$C(15.000) = 10.500$	0	0

Das Bellman - Prinzip (10)

- Optimale Entscheidung am Beginn des Augusts bedingt auf die optimale Lösung des Folgeproblems:

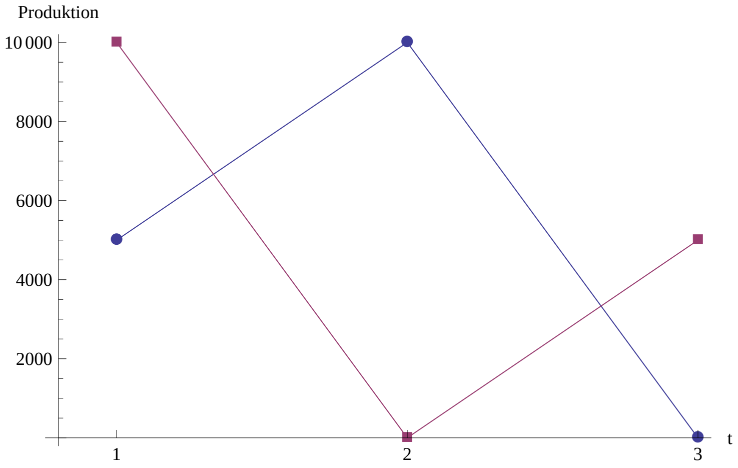
s_2 \ a_2	0	5.000	10.000	$V_2(s_2)$	$g_2(s_2)$
0		$C(5.000) + V_3(0) =$ 11.000	$C(10.000) + V_3(5.000)$ $+2.500 = 10.500$	10.500	10.000
5.000	$C(0) + V_3(0) =$ 5.500	$C(5.000) + V_3(5.000)$ $+2.500 = 8.000$		5.500	0
10.000	$C(0) + V_3(5.000)$ $+2.500 = 2.500$			2.500	0

- Optimale Entscheidung am Beginn des Julis:

s_1 \ a_1	5000	10000	15000	$V_1(s_1)$	$g_1(s_1)$
0	$C(5.000) + V_2(0) =$ 16.000	$C(10.000) + V_2(5.000)$ $+2.500 = 16.000$	$C(15.000) + V_2(10.000)$ $+5.000 = 18.000$	16.000	5.000/ 10.000

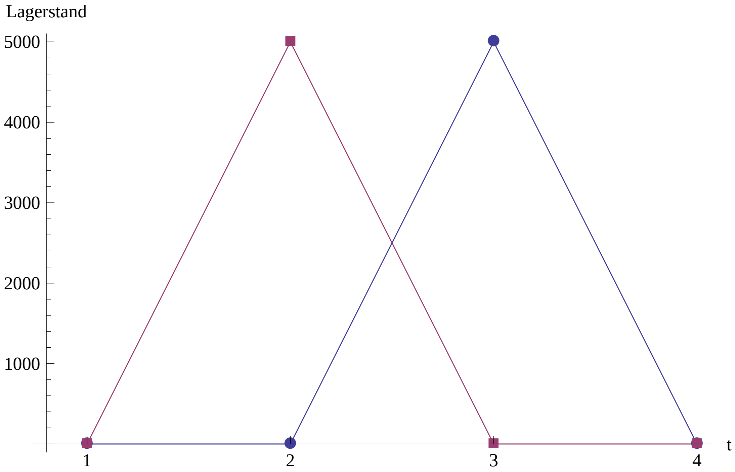
Das Bellman - Prinzip (11)

- Optimale Produktionsentscheidung:



Das Bellman - Prinzip (12)

- Lagerstand:



Das Bellman - Prinzip (13)

Ex. optimale Flughöhe

Ein Flugzeug hat eine Flugstrecke X zurückzulegen. Der Start bringt das Flugzeug in 8000 m Höhe, die Landung führt das Flugzeug aus der Höhe von 8000 m zurück auf den Boden (die Flugstrecke X ist ohne den bei Start und Landung zurückgelegten Weg gemessen). Nach jeweils 100km kann entschieden werden,

- im Lauf der nächsten 100 km von 8000 m Höhe auf 10000 m Höhe zu steigen, Verbrauch 1200 kg Kerosin auf 100 km,
- im Lauf der nächsten 100 km auf 8000 m Höhe zu bleiben, Verbrauch 650 kg Kerosin auf 100 km,
- im Lauf der nächsten 100 km von 10000 m Höhe auf 8000 m Höhe zu sinken, Verbrauch 250 kg Kerosin auf 100 km,
- im Lauf der nächsten 100 km auf 10000 m Höhe zu bleiben, Verbrauch 450 kg Kerosin auf 100 km.

Das Bellman - Prinzip (14)

Ex. optimale Flughöhe (cont.)

Es ist eine Strecke X von 300 km zurückzulegen. Wie soll die Flughöhe des Flugzeugs optimal gewählt werden, damit der Kerosinverbrauch minimal ist.

- Zustand des Systems ist die aktuelle Flughöhe und die verbleibende Flugstrecke
- Verbleibende Strecke: 100 km

a_{100} / s_{100}	-2000	0	$+2000$	$V_{100}(s_{100})$	$g_{100}(s_{100})$
8000	–	650	–	650	0
10000	250	–	–	250	-2000

Das Bellman - Prinzip (15)

- Verbleibende Strecke: 200 km

s_{200} \ a_{200}	-2000	0	$+2000$	$V_{200}(s_{200})$	$g_{200}(s_{200})$
8000	–	$650 + V_{100}(8000)$	$1200 + V_{100}(10000)$		
	–	1300	1450	1300	0
10000	$250 + V_{100}(8000)$	$450 + V_{100}(10000)$	–		
	900	700	–	700	0

- Verbleibende Strecke: 300 km

s_{300} \ a_{300}	-2000	0	$+2000$	$V_{300}(s_{300})$	$g_{300}(s_{300})$
8000	–	$650 + V_{200}(8000)$	$1200 + V_{200}(10000)$		
	–	1950	1900	1900	2000
10000	$250 + V_{200}(8000)$	$450 + V_{200}(10000)$	–		
	1550	1150	–	1150	0

Das Bellman - Prinzip (16)

- In vielen dynamischen Programmen werden in der Zukunft liegende Belohnungen diskontiert:

$$V(s_1) = \max_{a_t} \sum_{t=1}^{T} D^t r_t(s_t, a_t)$$

  mit dem Diskontfaktor $D < 1$.
- Dann muss man das Bellman-Prinzip geringfügig anpassen, um die Diskontierung zu berücksichtigen:

$$V_t(s) = \max_{a \in \Phi(s)} \left\{ r_t(s, a) + D V_{t+1}(f_t(s, a)) \right\}$$

- Probleme mit Diskontierung können auch über unendlichen Zeithorizont definiert werden,

$$V(s_1) = \sup_{a_t} \sum_{t=1}^{\infty} D^t r_t(s_t, a_t).$$

Das Bellman - Prinzip (17)

- Wenn es keine explizite Zeitabhängigkeit gibt (d.h., Belohnungsfunktion ist nicht von der Zeit, sondern nur vom Zustand abhängig), dann suchen wir nach einer stationären Strategie, welche Folgendes erfüllt:

$$V(s) = \sup_{a \in \Phi(s)} \left\{ r(s, a(s)) + DV(f(s, a(s))) \right\}$$

- Das Bellman Prinzip kann auch erweitert werden auf Probleme mit Unsicherheit.
- Wenn eine Aktion a, die heute im Zustand s angewandt wird, zu einem unsicheren Zustand morgen führt.
- Wenn E den Erwartungswertoperator bezeichnet, hat das Bellman-Prinzip die Form:

$$V_t(s) = \max_{a \in \Phi(s)} \{ r_t(s, a) + D \cdot E_t \left\{ V_{t+1}(f_t(s, a)) \right\} \}$$

Optimale Kapazitätsanpassung (18)

Optimale Kapazitätsanpassung

Ein Unternehmen produziert an der Kapazitätsgrenze von $x = 1$ Einheit / Zeiteinheit in einem unsicheren Marktumfeld. Der Abnahmepreis für die Erzeugung folgt einem stochastischen Prozess p_t mit

$$p_{t+\Delta t} = \begin{cases} p_t * u & \ldots \text{Wahrscheinlichkeit:} \quad \pi, \\ p_t * d & \ldots \text{Wahrscheinlichkeit:} \quad 1 - \pi, \end{cases}$$

mit $u > 1$ und $d = 1/u$. Die Stückkosten pro Zeiteinheit sind konstant gleich k. D.h., im Zeitintervall $[t, t + \Delta t)$ erwirtschaftet das Unternehmen einen Cashflow von $c_t = (p_t - k)x\Delta t$.

Das Unternehmen hat in jedem Zeitpunkt $t \leq T$ die Möglichkeit
(i) gegen Zahlung der Investitionskosten I die Kapazität auf $x = 5$ zu erhöhen,
(ii) die Produktion gegen die Zahlung des Betrages D dauerhaft einzustellen.

Optimale Kapazitätsanpassung (19)

Optimale Kapazitätsanpassung (cont.)

Optimierungsziel: In welchen Entscheidungsknoten soll das Unternehmen investieren, in welchen Entscheidungsknoten soll das Unternehmen die Produktion stilllegen, um den Erwartungswert der Summe der diskontierten Cashflows zu maximieren

$$V = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{E(c_t)}{(1+r)^t} \rightarrow_{\text{Investitionsstrategie}} \max$$

- Bilden einen ”Baum” für den Preisprozess über die Zeit.
- Arbeiten mit Rückwärtsinduktion (Bellman-Prinzip).

Optimale Kapazitätsanpassung (20)

- Parametrisierung:

$$
\begin{aligned}
T &= 10 \text{ a} \\
\Delta t &= 1/100 \text{ a} \\
p_0 &= 100 \text{ GE/EH} \\
k &= 80 \text{ GE/EH} \\
I &= 600 \text{ GE} \\
D &= 30 \text{ GE} \\
r &= 0.0004880207 \text{ pro Zeitschritt} = 5\% \text{ p.a.} \\
u &= 1.0100502 \\
d &= 0.9900498 \\
\pi &= 0.4975
\end{aligned}
$$

- D.h., u, d und π sind so gewählt, dass
  - (i) $E(p_{t+1}) = \pi(p_t\, u) + (1-\pi)(p_t\, d) = p_t$,
  - (ii) die Standardabweichung von p in einem Jahr 10% beträgt.

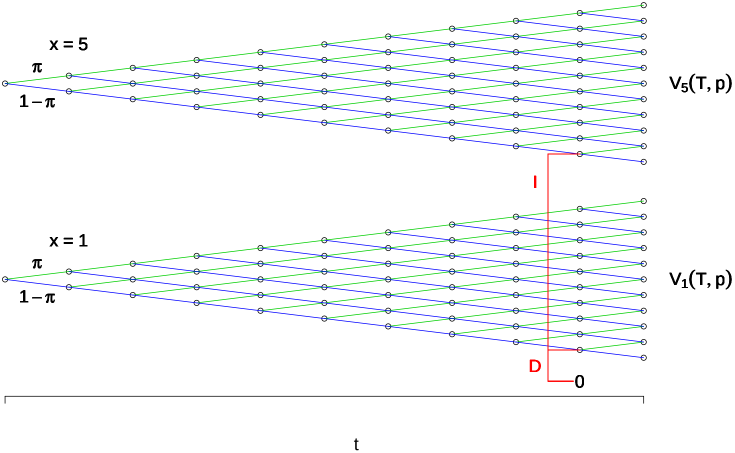
Optimale Kapazitätsanpassung (21)

- Der Zustand des Systems ist beschrieben durch Preis und Kapazität und die Zeit selbst: $s_t = (p_t, x_t, t)$.
- Der Aktionsraum ist abhängig von der aktuellen Kapazität

$$\Phi(s_t) = \begin{cases} \{\text{"warten"}, \text{"investieren"}, \text{"schließen"}\} & \ldots \quad x_t = 1, \\ \{\text{"warten"}, \text{"schließen"}\} & \ldots \quad x_t = 5. \end{cases}$$

Das Bellman - Prinzip (22)

- Bewertung und optimale Entscheidung im Baum:



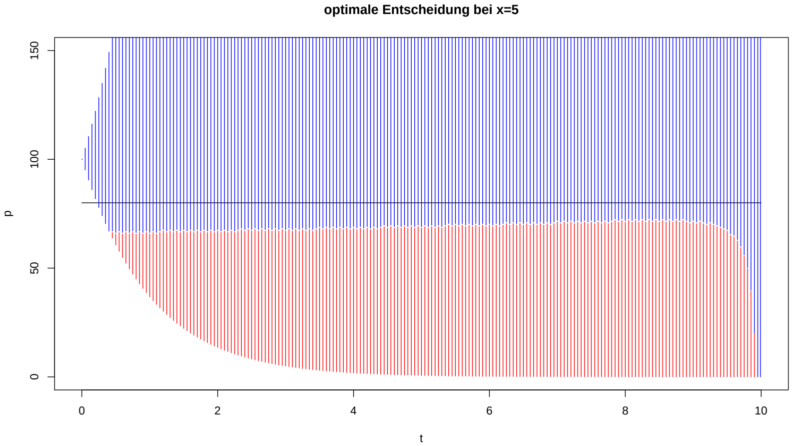
Das Bellman - Prinzip (23)

- Bewerten rückwärts auf dem Baum und treffen in jedem Knoten die optimale Entscheidung:

$$\begin{aligned} V_5(t,p) &= \max\Big\{ -D, \\ &\quad 5(p-k)\Delta t + \frac{1}{1+r}[\pi V_5(t+\Delta t, p*u) + (1-\pi)V_5(t+\Delta t, p*d)]\Big\} \\ V_1(t,p) &= \max\Big\{ -D, \\ &\quad V_5(t,p) - I, \\ &\quad 1(p-k)\Delta t + \frac{1}{1+r}[\pi V_1(t+\Delta t, p*u) + (1-\pi)V_1(t+\Delta t, p*d)]\Big\} \end{aligned}$$

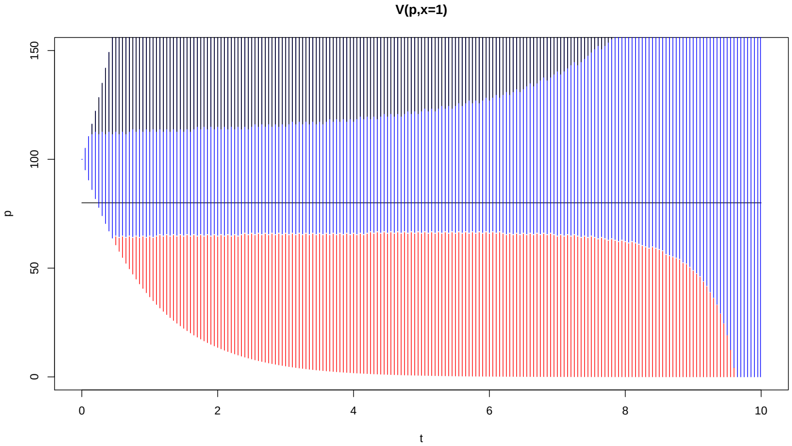
Das Bellman - Prinzip (24)

- Optimale Entscheidung bei $x = 5$:
  blau = ”warten”, rot = ”schließen”



Das Bellman - Prinzip (25)

- Optimale Entscheidung bei $x = 1$:
  blau = ”warten”, schwarz = ”investieren”, rot = ”schließen”



Das Bellman - Prinzip (26)

Ex. Investitionsproblem

Firma X überlegt einen LKW zu kaufen. Die Investition kann entweder zum Zeitpunkt $t = 1$ oder zum Zeitpunkt $t = 2$ getätigt werden. Zur Auswahl stehen zwei Typen, es kann maximal ein LKW gekauft werden, die Lebensdauer ist unbeschränkt:

- Typ 1: Investitionskosten: EUR $160\,000,-$
- Typ 2: Investitionskosten: EUR $100\,000,-$

Bei sofortiger Investition in $t = 1$ kann in der aktuellen Periode folgender Cashflow erwirtschaftet werden (Investitionskosten nicht berücksichtigt):

$$c_1 = \begin{cases} \text{EUR } 50\,000,- & \text{Typ 1} \\ \text{EUR } 20\,000,- & \text{Typ 2} \end{cases}$$

Im Zeitpunkt $t = 2$ kann die Nachfrage nach Transportleistung entweder steigen (Zustand u, Wahrscheinlichkeit $\pi = 50\%$) oder fallen (Zustand d, Wahrscheinlichkeit $1 - \pi = 50\%$).

Das Bellman - Prinzip (27)

Ex. Investitionsproblem (cont.)

Der Wert eines LKWs in $t = 2$ (das ist der Barwert der zukünftig erwirtschafteten Cashflows, Investitionskosten nicht enthalten) ist gleich

$$V_{2,u} = \begin{cases} \text{EUR} \;\; 450\,000,- & \text{Typ 1} \\ \text{EUR} \;\; 250\,000,- & \text{Typ 2} \end{cases}, \qquad V_{2,d} = \begin{cases} \text{EUR} \;\; 150\,000,- & \text{Typ 1} \\ \text{EUR} \;\; 130\,000,- & \text{Typ 2} \end{cases}$$

Der Diskontsatz ist 10%.
Firma X will so investieren, dass sie den Nettobarwert der Cashflows (Barwert der erwirtschafteten Cashflows minus Barwert der Investitionskosten) maximiert.

- Erste Überlegung: Warten bis $t = 2$.

Das Bellman - Prinzip (28)

- Tritt der Zustand u ein, dann ist der Nettowert der LKWs

$$\begin{array}{rcrl} 450\,000 - 160\,000 & = & 290\,000 & \text{Typ 1} \\ 250\,000 - 100\,000 & = & 150\,000 & \text{Typ 2} \end{array}$$

- Tritt der Zustand d ein, dann ist der Nettowert der LKWs

$$\begin{array}{rcrl} 150\,000 - 160\,000 & = & -10\,000 & \text{Typ 1} \\ 130\,000 - 100\,000 & = & 30\,000 & \text{Typ 2} \end{array}$$

- Wenn man bis $t = 2$ wartet, ist es optimal im Zustand u einen LKW vom Typ 1 zu kaufen und im Zustand d einen LKW vom Typ 2. Der $t = 1$-Wert der Strategie "warten bis $t = 2$" ist dann

$$V_{t=1}^{(\text{warten bis } t\,=\,2)} = \frac{1}{(1 + 0.1)}\{0.5 * 290\,000 + 0.5 * 30\,000\} = 145\,455.$$

Das Bellman - Prinzip (29)

- Wenn die Firma sofort in einen LKW von Typ 1 investiert, dann ist der Nettobarwert

$$\begin{aligned} V_{t=1}^{(\text{Typ1 zu } t\,=\,1)} &= 50\,000 - 160\,000 \\ &\quad + \frac{1}{(1+0.1)}\{0.5 * 450\,000 + 0.5 * 150\,000\} \\ &= 162\,727. \end{aligned}$$

- Wenn die Firma sofort in einen LKW von Typ 2 investiert, dann ist der Nettobarwert

$$\begin{aligned} V_{t=1}^{(\text{Typ2 zu } t\,=\,1)} &= 20\,000 - 100\,000 \\ &\quad + \frac{1}{(1+0.1)}\{0.5 * 250\,000 + 0.5 * 130\,000\} \\ &= 92\,727. \end{aligned}$$

- Es ist optimal, sofort in einen LKW vom Typ 1 zu investieren. Der Wert der Investitionsstrategie ist $V_1^{(\text{opt.})} = 162\,727$.

Das Bellman - Prinzip (30)

Ex. Investitionsproblem (cont.)

Wie ändert sich die optimale Investitionsstrategie, wenn der LKW vom Typ 1 nicht $160\,000$ sondern $200\,000$ kostet?

- Dann ist es optimal die Investition bis $t = 2$ aufzuschieben und dann je nach Zustand, der eingetreten ist, in einen LKW vom Typ 1 (Zustand u) oder in einen LKW vom Typ 2 (Zustand d) zu investieren.
- Der Wert der Investitionsmöglichkeit ist dann

$$V_1 = 127\,273.$$

- Sofort in Typ 1 zu investieren hätte einen Wert von $122\,727$, sofort in Typ 2 zu investieren hätte einen Wert von $92\,727$.

Das Replikationsprinzip (1)

- Dynamische Optimierung findet viele Anwendungen in der Finanzwirtschaft.
- Mit manchen Produkten (wie z.B. Optionen) ist Entscheidungsfreiheit verbunden.
  - Eine Call Option gibt dem Halter das Recht, eine Aktie zu einem vordefinierten Preis zu kaufen (es gibt aber keine Verpflichtung, das zu tun).
  - Eine sogenannte "Amerikanische" Call Option ermöglicht die Ausübung des Kaufsrechts zu jedem Zeitpunkt während der Laufzeit der Option.
  - Eine sogenannte "Europäische" Call Option ermöglicht die Ausübung des Kaufsrechts nur am Ende der Laufzeit.
- Die optimale Ausübung dieser Entscheidungsfreiheit definiert auch den Wert des Produkts.
- Daher ist die Bewertung immer kombiniert mit einer Optimierung zu sehen.

Das Replikationsprinzip (2)

Ex. Bewertung einer Call Option

Einfaches ”Einperiodenmodell” mit zwei Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$.

Der Basiswert der Option ist eine Aktie, die zum Zeitpunkt $t = 0$ (heute) einen Wert von EUR 100,- hat. Zum Zeitpunkt $t = 1$ (Zukunft) kann sie entweder den Wert EUR 120,- haben oder den Wert EUR 90,- (im Betrachtungszeitraum werden keine Dividenden gezahlt).

Eine (Amerikanische) Call Option hat eine Laufzeit bis $t = 1$ und ermöglicht dem Besitzer, die Aktie um EUR 95,- zu erwerben.

Alternativ zur Investition in die Aktie oder die Option gibt es noch eine risikolose Veranlagung (Sparbuch), die eine Verzinsung von 5% bietet.

Was ist der Wert der Call Option zu $t = 0$?

- Beachte: Es ist keine Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Zustände in $t = 1$ gegeben.

Das Replikationsprinzip (3)

- Wertverlauf der Aktie:

$$S_0 = 100, \qquad S_1 = \begin{cases} S_{1,u} = 120, & \ldots \text{Zustand } u, \\ S_{1,d} = \ \ 90, & \ldots \text{Zustand } d. \end{cases}$$

- Wertverlauf eines Euros auf dem Sparbuch

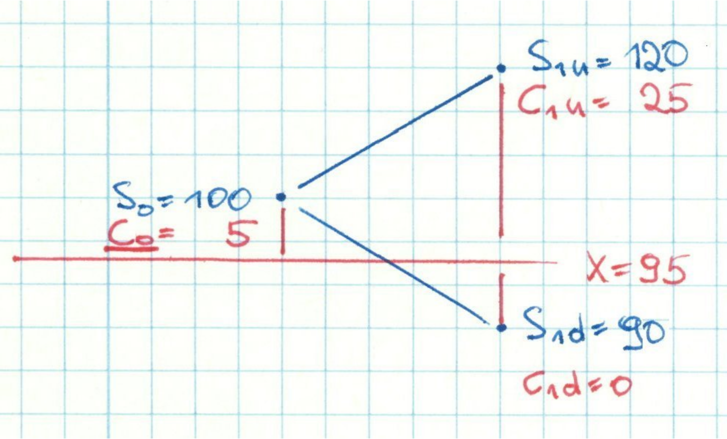
$$B_0 = 1, \qquad B_1 = (1+r)1 = 1.05 \quad \ldots \text{Zustände } u \text{ und } d.$$

- Wertverlauf der Option:

$$C_0 = ?, \qquad C_1 = \begin{cases} C_{1,u} = \max\{0,\ 120 - 95\} = 25, & \ldots \text{Zustand } u, \\ C_{1,d} = \max\{0,\ \ 90 - 95\} = 0, & \ldots \text{Zustand } d. \end{cases}$$

Das Replikationsprinzip (4)

- Wertverlauf der Aktie und Wert der Option bei sofortiger Ausübung



Das Replikationsprinzip (5)

- Erster, naiver Bewertungsansatz: Wenn die Aktie heute EUR 100,- wert ist und ich das Recht habe, diese Aktie um EUR 95,- zu kaufen, dann ist die Option offensichtlich EUR 5,- wert.
- Aber: Möglicherweise ist es besser, die Option nicht heute auszuüben, sondern erst zu $t = 1$ und dann nur, wenn der Aktienkurs steigt?
- D.h., der oben ermittelte Wert von EUR 5,- ist nur eine untere Schranke für den Wert. Den echten Wert kann ich nur gemeinsam mit der Lösung des Optimierungsproblems ermitteln.
- Was ist nun der Wert der Option, wenn ich sie nicht heute, sondern erst zu $t = 1$ ausübe?
- Wir haben zwei Zustände zu $t = 1$ und zwei Instrumente, deren Wert wir heute und in beiden Zuständen zu $t = 1$ kennen (Aktie, Sparbuch).

Das Replikationsprinzip (6)

- Versuchen nun, ein Portfolio zu bilden aus N_a Stücken der Aktie und N_b Euro in der risikolosen Veranlagung, sodass der Wert des Portfolios zu $t = 1$ in beiden Zuständen mit jenem der Option übereinstimmt (Replikation).

$$\begin{aligned} \text{Zustand u}: \quad N_a S_{1,u} + N_b(1+r) &= C_{1,u}, \\ \text{Zustand d}: \quad N_a S_{1,d} + N_b(1+r) &= C_{1,d}. \end{aligned}$$

- Diese zwei Gleichungen in zwei Variablen bieten eine eindeutige Lösung für N_a und N_b solange $S_{1,u} \neq S_{1,d}$ gilt.
- Mit der Lösung:

$$N_a = \frac{C_{1,u} - C_{1,d}}{S_{1,u} - S_{1,d}}, \qquad N_b = \frac{S_{1,u}C_{1,d} - S_{1,d}C_{1,u}}{(S_{1,u} - S_{1,d})(1+r)}.$$

Das Replikationsprinzip (7)

- Einsetzen der konkreten Werte ergibt:

$$N_a = 0.8333, \qquad N_b = -71.4286.$$

- Achtung: N_b ist negativ, d.h., man nimmt einen Kredit im Ausmaß von EUR 71.4286 auf.
- Der Wert des Portfolios in den beiden Zuständen:

$$\begin{aligned}
\text{Zustand u}: \quad P_{1,u} &= 0.8333 * 120 - 71.4286 * 1.05 &= 25, \\
\text{Zustand d}: \quad P_{1,d} &= 0.8333 * 90 - 71.4286 * 1.05 &= 0.
\end{aligned}$$

- Replikationsargument: Wenn das Portfolio zu $t = 1$ den Wert der Option perfekt nachbildet, dann muss der Wert der Option zu $t = 0$ gleich den Kosten für die Bildung des Replikationsportfolios sein!

Das Replikationsprinzip (8)

- Wert des Replikationsportfolios zu $t = 0$:

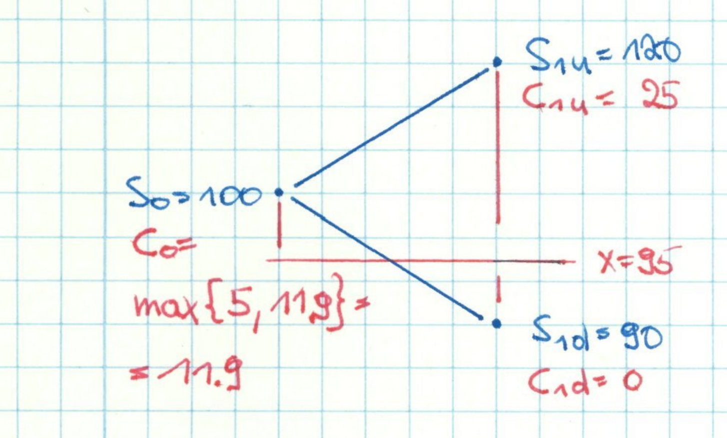
$$P_0 = N_a S_0 + N_b B_0 = 0.8333 * 100 - 71.4286 * 1.00 = 11.9048$$

- Die Option zu behalten und morgen erst auszuüben (und dann nur im Zustand u), liefert einen Wert von EUR 11.9048.
- Der Wert der Call Option ist dann gleich

$$\begin{aligned} C_0 &= \max\{C_{\text{sofort ausüben}},\ C_{\text{nicht sofort ausüben}}\} = \max\{5, 11.9048\} \\ &= 11.9048. \end{aligned}$$

Das Replikationsprinzip (9)

- Wertverlauf der Aktie und Wert der Option bei optimaler Ausübung = warten bis $t = 1$.



Das Replikationsprinzip (10)

- Alternative Überlegung: In der Wertentwicklung der Aktie steckt ja implizit eine Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Zustände u und d.
- Nach Bellman muss ja gelten:

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\{\tilde{\pi} S_{1,u} + (1-\tilde{\pi}) S_{1,d}\}$$

- Achtung: Die so ermittelte "Wahrscheinlichkeit" $\tilde{\pi}$ hat nichts mit der echten, objektiven Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Zustands u zu tun, sondern ist rein durch den Preisprozess bestimmt.
- Löst man obige Gleichung nach $\tilde{\pi}$, so ergibt das

$$\tilde{\pi} = \frac{(1+r)S_0 - S_{1,d}}{S_{1,u} - S_{1,d}}.$$

Das Replikationsprinzip (11)

- Als implizite Wahrscheinlichkeit kann ich $\tilde{\pi}$ aber nur interpretieren wenn gilt $\tilde{\pi} \in [0, 1]$.
- Das ist der Fall wenn gilt:

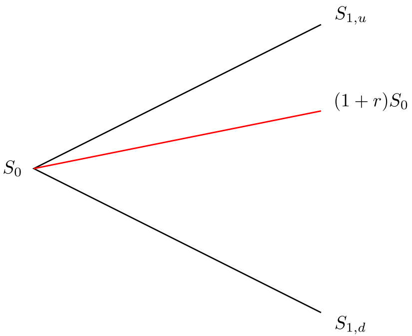
$$(1 + r)S_0 \in [S_{1,d}, S_{1,u}],$$

  d.h., wenn der Markt arbitragefrei ist. Ist das nicht der Fall, ist entweder das Aktieninvestment eindeutig durch das Sparbuch dominiert oder umgekehrt.
- In unserem Beispiel haben wir

$$\tilde{\pi} = \frac{1.05 * 100 - 90}{120 - 90} = \frac{15}{30} = 0.5.$$

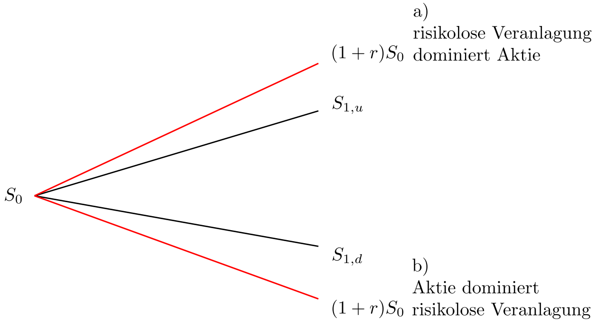
Das Replikationsprinzip (12)

- Arbitragefreier Markt:



Das Replikationsprinzip (13)

- Markt mit Arbitragemöglichkeit:



Das Replikationsprinzip (14)

- Damit ergibt sich als Wert für die Call Option (wenn man sie bei $t = 1$ ausübt)

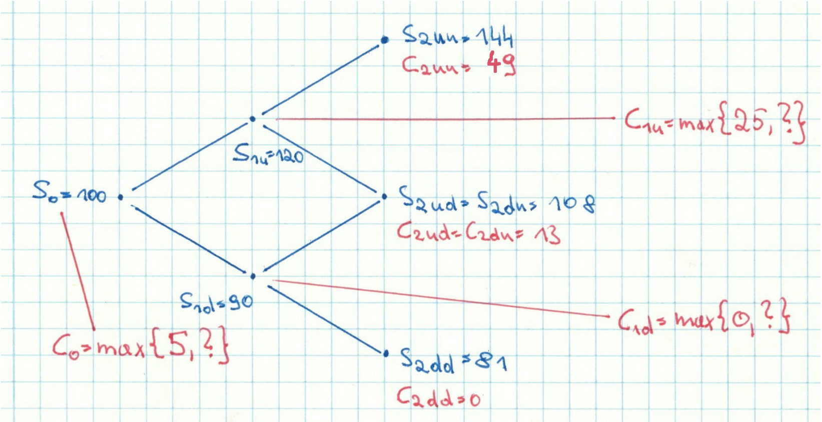
$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{1+r}\{\tilde{\pi}C_{1,u} + (1-\tilde{\pi})C_{1,d}\} \\
&= \frac{1}{1.05}0.5 * 25 \\
&= 11.9048.
\end{aligned}
$$

Ex. Call Option (cont.)

Betrachte nun den Fall, wo die Laufzeit der Call Option bis zum Zeitpunkt $t = 2$ reicht. Die möglichen Preise der Aktie zu $t = 2$ sind $S_{2,uu} = 144$, $S_{2,ud} = S_{2,du} = 108$, $S_{2,dd} = 81$.

Das Replikationsprinzip (15)

- Der Wert der Option zum Ende der Laufzeit ist in Abhängigkeit von der Laufzeit einfach bestimmbar (da gibt es nur die sofortige Ausübung, oder die Option verfallen zu lassen). I.e., $C = \max\{0, S - X\}$. Der Wert in Zeitpunkten davor hängt von der optimalen Ausübungsstrategie ab.



Das Replikationsprinzip (16)

- Bestimmung von $C_{1,u}$. Als untere Schranke können wir 25 angeben (das ist der Wert bei sofortiger Ausübung = 120-95).
- Wenn man im Knoten $1, u$ beschließt, die Option nicht auszuüben, dann kann man den Wert der Option wieder replizieren aus einem Portfolio aus Aktien und der risikolosen Anlage = Kredit.
- Das Replikationsportfolio muss erfüllen:

$$\begin{aligned}\text{Zustand uu}: \quad N_{1,u,a} S_{2,uu} + N_{1,u,b}(1+r) &= C_{2,uu},\\ \text{Zustand ud}: \quad N_{1,u,a} S_{2,ud} + N_{1,u,b}(1+r) &= C_{2,ud}.\end{aligned}$$

- Oder konkret:
- Das Replikationsportfolio muss erfüllen:

$$\begin{aligned}\text{Zustand uu}: \quad N_{1,u,a} * 144 + N_{1,u,b}(1+r) &= 49,\\ \text{Zustand ud}: \quad N_{1,u,a} * 108 + N_{1,u,b}(1+r) &= 13.\end{aligned}$$

Das Replikationsprinzip (17)

- Mit dem Ergebnis:

$$N_{1,u,a} = 1, \qquad N_{1,u,b} = -90.4762.$$

- D.h., wenn ich mich im Zustand $1, u$ entscheide, die Option noch nicht auszuüben, dann hat sie einen Wert, der gleich dem des Replikationsportfolios sein muss

$$N_{1,u,a} * 120 + N_{1,u,b} = 29.5238$$

- Offensichtlich ist es im Zustand $1, u$ optimal, die Option nicht auszuüben. Der Wert bei optimaler Ausübungsstrategie ist 29.5238.
- Im Zustand $1, d$ wählen wir die alternative Bewertungsmethode über die impliziten Wahrscheinlichkeiten.
- Gemäß der Aktienpreisdynamik muss gelten

$$S_{1,d} = \frac{1}{1+r}\{\tilde{\pi}_{1,d} S_{2,du} + (1 - \tilde{\pi}_{1,d}) S_{2,dd}\}$$

Das Replikationsprinzip (18)

- Das ergibt

$$\tilde{\pi}_{1,d} = 0.5.$$

- Und damit errechnet sich der Wert der Option im Zustand $1, d$ bei weiterem Halten der Option als

$$\frac{1}{1+r}\{0.5 * 13 + 0.5 * 0\} = 6.1905.$$

- D.h., auch im Zustand $1, d$ ist das Halten der Option optimal.
- Der Wert der Option im Zustand 0 ergibt sich aus dem Vergleich zwischen dem Wert bei sofortiger Ausübung (= 5) und dem Wert bei Abwarten:

$$\frac{1}{1+r}\{0.5 * 29.5238 + 0.5 * 6.1905\} = 17.0068.$$

- Daher ist auch zu Beginn der Laufzeit das weitere Halten der Option optimal.

Das Replikationsprinzip (19)

- Wertverlauf der Aktie und der Wert der Option bei optimaler Ausübungsstrategie.