Beispielsammlung
Betriebswirtschaftliche Optimierung

Thomas Dangl
Daniel Wondrak
Kevin Höglinger
Patrick Rosenberger

November 2018

Version 1.5.7

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Liebe TeilnehmerInnen der Lehrveranstaltung „Betriebswirtschaftliche Optimierung“,

die nachfolgende Beispielsammlung dient der Vertiefung der in der Vorlesung „Betriebswirtschaftliche Optimierung“ erlernten Fähigkeiten und zur Prüfungsvorbereitung. Die Prüfungen werden Multiple Choice Prüfungen sein, daher ist die Art der Fragestellung bei der Prüfung etwas anders, dazu gibt es gesonderte Beispielsammlungen im TISS - Informationssystem.

1 Optimierung ohne Nebenbedingungen

1.1 Beispiel 1

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 2x - 4y - 9z + 10 \tag{1.1}$$

a) Bestimmen Sie den(die) Extremwert(e).

b) Stellen Sie fest, ob es sich dabei um lokale/globale Minima/Maxima handelt.

c) Welchen Wert nimmt die Funktion an dem(n) Extremwert(en) ein?

Lösung

a)

$$f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 2x - 4y - 9z + 10$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y - 4, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 10z - 9$$

Extremstellen:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 6y-4 \\ 10z-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x & = & 2/2 = 1 \\ y & = & 4/6 = 2/3 \\ z & = & 9/10 \end{matrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1, & \frac{2}{3}, & \frac{9}{10} \end{pmatrix}' \tag{1.2}$$

b) Hesse-Matrix:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 10$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

$$Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Minoren:

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \begin{vmatrix} 2 \end{vmatrix} = 2 \\
B_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 * 6 = 12 \\
B_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 2 * 6 * 10 = 120
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Alle Minoren sind positiv => Hesse-Matrix pos. definit => Funktion ist konvex => Minimum
Da die Hessematrix von keiner Variablen mehr abhängig ist, bedeutet dies, dass die Funktion überall konvex ist. Der gefundene Extrempunkt ist daher ein **globales** Minimum.

c)

$$
\begin{aligned}
f(P) &= f\left(1, \quad \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{9}{10}\right) \\
&= 1^2 + 3 * (2/3)^2 + 5 * (9/10)^2 - 2 * 1 - 4 * 2/3 - 9 * 9/10 + 10 \\
&= 3.617
\end{aligned}
$$

1.2 Beispiel 2

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x, y, z) = -5x^2 - 8y^2 - 12z^2 + 3x + 2y$$

a) Bestimmen Sie den(die) Extremwert(e).

b) Stellen Sie fest, ob es sich dabei um lokale/globale Minima/Maxima handelt.

c) Welchen Wert nimmt die Funktion an dem(n) Extremwert(en) ein?

Lösung

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -10x + 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -16y + 2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -24z$$

Extremwerte:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -10x + 3 \\ -16y + 2 \\ -24z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & \frac{3}{10} \\ y & = & \frac{-2}{-16} = \frac{1}{8} \\ z & = & 0 \end{array}$$

$$P = \left(\tfrac{3}{10}, \quad \tfrac{1}{8}, \quad 0 \right)' \tag{1.4}$$

b) Hesse-Matrix:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -16, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -24$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

$$Hf = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix}$$

Minoren:

$$\begin{array}{rcl} B_1 & = & -10 \\ B_2 & = & (-10) * (-16) = 160 \\ B_3 & = & (-10) * (-16) * (-24) = -3\,840 \end{array}$$

Die Minoren alternieren im Vorzeichen beginnend mit <0
=> Funktion ist global konkav (unabhängig von x, y, z)
=> globales Maximum

c)

$$f(P) = f(\frac{3}{10}, \frac{1}{8}, 0) = 0.575 \tag{1.5}$$

1.3 Beispiel 3

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x, y, z) = 4x^2 + 3x - 2y^3 + y + z^2 \tag{1.6}$$

a) Bestimmen Sie den(die) Extremwert(e).

b) Berechnen Sie die Minoren der Hesse-Matrix.

c) Berechnen Sie die Minoren der Hesse-Matrix an dem(den) Extremwert(en).

d) Berechnen Sie die Eigenwerte der Hesse-Matrix an dem(den) Extremwert(en).

e) Stellen Sie fest, ob es sich dabei um lokale/globale Minima/Maxima handelt.

f) Welchen Wert nimmt die Funktion an dem(n) Extremwert(en) ein?

Lösung

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 8x + 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -6y^2 + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

Extremwerte:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8x + 3 \\ -6y^2 + 1 \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & \frac{-3}{8} \\ y^2 & = & \frac{-1}{-6} \\ z & = & 0 \end{array} \Rightarrow y_{1,2} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{6}}$$

$$P_1 = \left(-\tfrac{3}{8}, \quad -\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \quad 0\right)' \tag{1.7}$$

$$P_2 = \left(-\tfrac{3}{8}, \quad \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \quad 0\right)' \tag{1.8}$$

b)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

$$Hf = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -12y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Minoren:

$$\begin{array}{rcl} B_1 & = & 8 \\ B_2 & = & 8 * (-12y) = -96y \\ B_3 & = & 8 * (-12y) * 2 = -192y \end{array}$$

c)

P1:

$$B_1^{P_1} = 8 \tag{1.9}$$

$$B_2^{P_1} = 16 * \sqrt{6} \tag{1.10}$$

$$B_3^{P_1} = 32 * \sqrt{6} \tag{1.11}$$

P2:

$$B_1^{P_2} = 8 \tag{1.12}$$

$$B_2^{P_2} = -16 * \sqrt{6} \tag{1.13}$$

$$B_3^{P_2} = -32 * \sqrt{6} \tag{1.14}$$

d)

$$\left|\lambda * I - Hf\right| = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 12y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.15}$$

$$(\lambda - 8)(\lambda + 12y)(\lambda - 2) = 0$$

$$(\lambda^2 - 10\lambda + 16)(\lambda + 12y) = 0$$

Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 8$$

$$\lambda_2 = -12y$$

$$\lambda_3 = 2$$

An den Extremwerten:

$$E^{P_1} = \begin{pmatrix} 8, & 2 * \sqrt{6}, & 2 \end{pmatrix}' \tag{1.16}$$

$$E^{P_2} = \begin{pmatrix} 8, & -2 * \sqrt{6}, & 2 \end{pmatrix}' \tag{1.17}$$

e)

P_1: Alle Minoren >0 => Funktion ist konvex => **Minimum**. Da die Hessematrix von einer Variablen (y) abhängig ist, ist die Funktion nicht überall konvex. Daher kann es Funktionswerte geben, die kleiner als der gefundene Extrempunkt sind. Daher ist P_1 ein **lokales** Minimum.

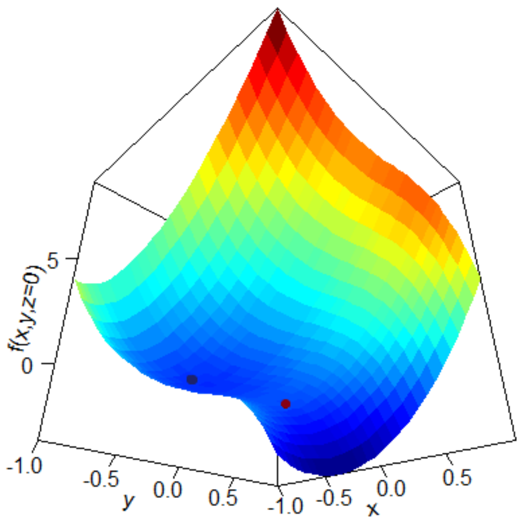
P_2: Minoren sind nicht positiv und alternieren nicht
=> Nicht definit, kein Extremum (Sattelpunkt)

f)

$$f(P_1) = -0.8347 \tag{1.18}$$

$$f(P_2) = -0.2903 \tag{1.19}$$

Plot



In diesem Plot sehen Sie die Funktion $f(x, y, z = 0)$. Der blaue Kreis markiert den Punkt P_1, der rote den Punkt P_2. Man erkennt, dass der blaue Punkt P_1 ein Minimum ist, da in seiner ausreichend klein gewählten Umgebung kein kleinerer Funktionswert gefunden werden kann. P_1 ist allerdings nur ein lokales Minimum, da die Funktion f global gesehen auch kleinere Funktionswerte annimmt.
Der rote Punkt P_2 ist ein Sattelpunkt.

1.4 Beispiel 4

Ein Unternehmen hat jährliche Fixkosten in der Höhe von 20 000 EUR für die kontinuierliche Weiterentwicklung eines Produktes zu tragen. Die Herstellung kostet dem Unternehmen 2 EUR pro Stück. Die Marketingabteilung des Unternehmens ermittelt, dass in Abhängigkeit von Ausgaben für Werbemaßnahmen a und dem Preis des Produktes p

$$2\,000 + 4\sqrt{a} - 20p \tag{1.20}$$

Stück abgesetzt werden können. Das Unternehmen will seinen Gesamtgewinn maximieren.

a) Wie lautet die zu optimierende Zielfunktion?

b) Wie sind Preis und Werbeausgaben zu wählen, um maximalen Gewinn zu erzielen?

c) Wie hoch ist der erzielte Gewinn?

d) Überprüfen Sie ihr(e) Ergebniss(e) hinsichtlich der gefundenen Extremstellen.

Lösung

a)

Kosten:

$$K = 20\,000 + 2x + a = 20\,000 + 2(2\,000 + 4 * \sqrt{a} - 20p) + a$$

Umsatz:

$$U = p * x = p * (2\,000 + 4 * \sqrt{a} - 20p)$$

Gewinn:

$$G(a,p) = U - K = (p-2)(2\,000 + 4\sqrt{a} - 20p) - a - 20\,000 = f(p,a) \tag{1.21}$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 2040 + 4\sqrt{a} - 40p$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2(p-2)}{\sqrt{a}} - 1$$

Extremstellen:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2\,040 + 4\sqrt{a} - 40p \\ \frac{2(p-2)}{\sqrt{a}} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcl} a & = & 15\,006.25 \\ p & = & 63.25 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a & = & 15\,006.25\,\mathrm{EUR} \\ p & = & 63.25\,\mathrm{EUR} \end{array}$$

c)

$$
\begin{aligned}
G(p = 63.25, a = 15\,006.25) &= (63.25 - 2)(2\,000 + 4\sqrt{15\,006.25} \\
&\quad -20 * 63.25) - 15\,006.25 - 20\,000
\end{aligned}
$$

$$
G = 40\,025\,\mathrm{EUR} \tag{1.22}
$$

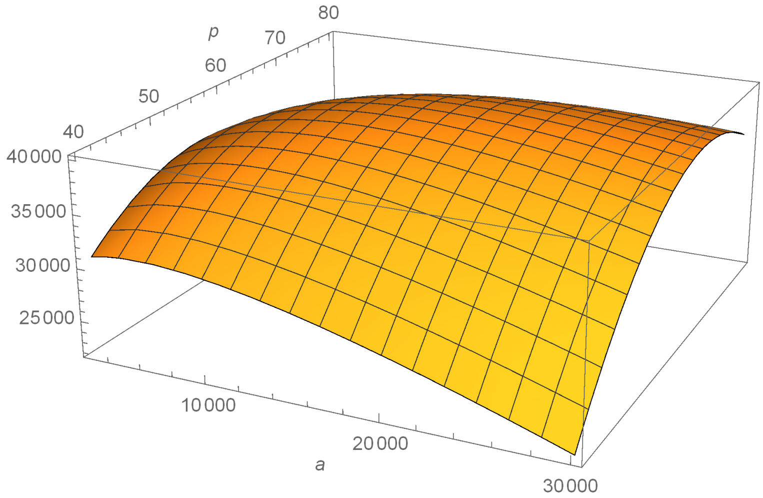
d)

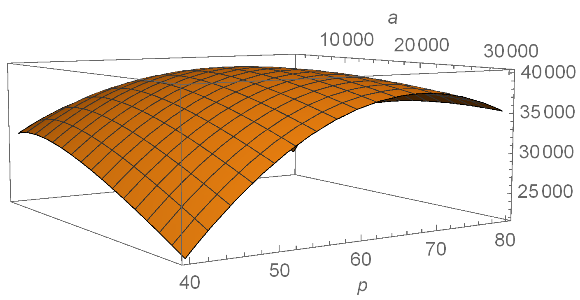
$$
Hf = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial a} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial p} & \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 & \frac{2}{\sqrt{a}} \\ \frac{2}{\sqrt{a}} & (2 - p) * a^{-3/2} \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
B_1 &= -40 < 0 \\
B_2 &= 0.001 > 0
\end{aligned}
$$

Minoren alternieren im Vorzeichen beginnend mit <0 => Funktion ist lokal konkav (nicht global konkav weil abhängig von p und a) => lokales Maximum

Plot


p
80
70
60
50
40
40 000
35 000
30 000
25 000
10 000
20 000
a
30 000


a
10 000
20 000
30 000
40 000
35 000
30 000
25 000
40
50
60
70
80
p

2 Optimierung unter Gleichheitsbedingungen

2.1 Beispiel 5

Peters Spielwaren GmbH. produziert Spielzeugsoldaten und Miniaturzüge. Die Soldaten können für einen Preis von 27 EUR und die Züge für 21 EUR verkauft werden. Für die Produktion werden Materialkosten von 10 EUR bzw. 9 EUR und Herstellungskosten von 14 EUR bzw. 10 EUR fällig.

Bei der Produktion durchlaufen die Spielwaren die Abteilungen Montage und Lackiererei. Für die Fertigstellung eines Spielzeugsoldaten werden in der Montage 1 h und in der Lackiererei 2 h benötigt, für die eines Miniaturzuges je 1 h. Das Unternehmen besitzt eine Kapazität von 80 h in der Montage und 100 h in der Lackiererei.

a) Formulieren Sie das Optimierungsproblem für die Maximierung des Gewinns unter den gegebenen Nebenbedingungen.

b) Formulieren Sie die Lagrange Funktion und bestimmen Sie den optimalen Produktionsplan.

c) Wieviel wäre das Unternehmen maximal für eine Erweiterung der Kapazität in der Montage bereit zu bezahlen? Wieviel wäre das Unternehmen maximal für eine Erweiterung der Kapazität in der Lackiererei bereit zu bezahlen?

d) Überprüfen Sie ihr(e) Ergebniss(e) hinsichtlich der gefundenen Extremstellen.

Lösung

a) Gewinnfunktion:

$$\begin{aligned} G(x_S, x_Z) &= U - K \\ &= x_S * 27 + x_Z * 21 - (x_S(10+14) + x_Z(9+10)) \qquad (2.1) \\ &= 3x_S + 2x_Z \end{aligned}$$

Nebenbedingungen:

$$g_1(x_S, x_Z) = 80 - x_S - x_Z \quad \text{... Montage} \qquad (2.2)$$
$$g_2(x_S, x_Z) = 100 - 2x_S - x_Z \quad \text{... Lackiererei} \qquad (2.3)$$

b) Lagrange-Funktion:

$$L(\lambda_1, \lambda_2, x_S, x_Z) = 3x_S + 2x_Z + \lambda_1(80 - x_S - x_Z) + \lambda_2(100 - 2x_S - x_Z) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 80 - x_S - x_Z = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= 100 - 2x_S - x_Z = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_S} &= 3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_Z} &= 2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

=>

$$\begin{aligned}
x_S &= 20 \\
x_Z &= 60 \\
\lambda_1 &= 1 \\
\lambda_2 &= 1
\end{aligned}$$

Optimaler Produktionsplan:

$$P = \begin{pmatrix} 20, & 60 \end{pmatrix}' \quad (2.5)$$

c) Schattenpreise:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 \text{ ... Montage} \\
\lambda_2 &= 1 \text{ ... Lackiererei}
\end{aligned}$$

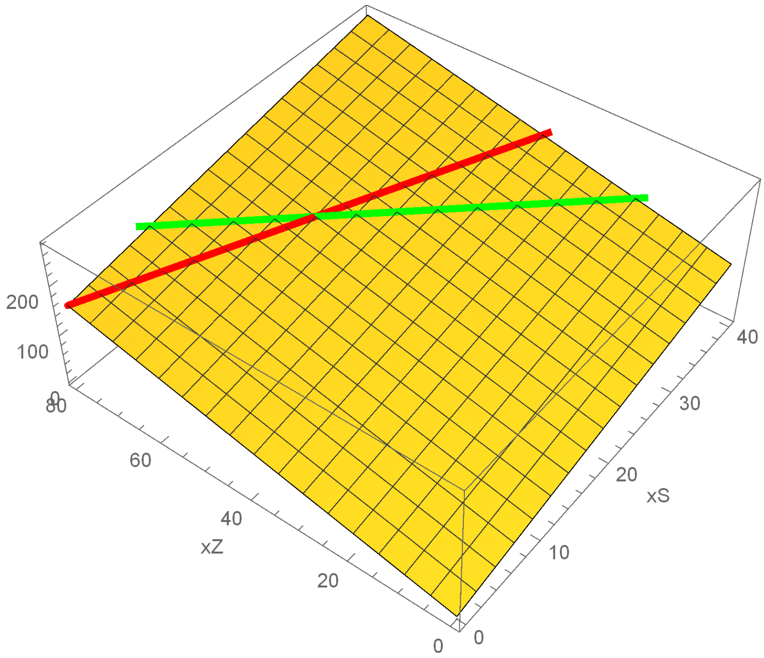
d)

$$HL = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial x_S} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial x_Z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2 \partial x_S} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2 \partial x_Z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_S \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_S \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_S^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_S \partial x_Z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_Z \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_Z \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_Z \partial x_S} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_Z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
n &= 2 \text{ ... Anzahl Variablen} \\
m &= 2 \text{ ... Anzahl Nebenbedingungen} \\
(n - m) &= 0
\end{aligned}$$

=> Sonderfall, keine Überprüfung notwendig
Lokales Maximum (auch lokales Minimum!)

Plot



2.2 Beispiel 6

Das Unternehmen Solid AG soll 100 Stück eines Produktes mit einer oder mehreren von drei zur Verfügung stehenden Technologien herstellen. Die Produktion von x bzw. y bzw. z Stück des Produktes mit Technologie A bzw. B bzw. C kostet $10x$ bzw. $2y^2$ bzw. $z^2 + 8z$.

a) Formulieren Sie das nichtlineare Programm für die Produktion von 100 Stück mit minimalen Kosten.

b) Formulieren Sie die Lagrange Funktion und bestimmen Sie den optimalen Produktionsplan.

c) Wie hoch sind die Grenzkosten der Produktion?

d) Überprüfen Sie ihr(e) Ergebniss(e) hinsichtlich der gefundenen Extremstellen.

Lösung

a) Kostenfunktion:

$$K(x,y,z) = 10x + 2y^2 + z^2 + 8z \tag{2.6}$$

Nebenbedingung:

$$g(x,y,z) = 100 - x - y - z \tag{2.7}$$

b) Lagrange-Funktion:

$$L(\lambda, x, y, z) = 10x + 2y^2 + z^2 + 8z + \lambda(100 - x - y - z) \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 100 - x - y - z = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= 10 - \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 4y - \lambda = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 2z + 8 - \lambda = 0
\end{aligned}$$

=>

$$\begin{aligned}
\lambda &= 10 \\
x &= 96.5 \\
y &= 2.5 \\
z &= 1
\end{aligned}$$

Optimaler Produktionsplan:

$$P = \begin{pmatrix} 96.5, & 2.5, & 1 \end{pmatrix}' \tag{2.9}$$

c) Grenzkosten:

$$\lambda = 10 \tag{2.10}$$

d)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = -1$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = ... = \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} n &= 3 \text{ ... Anzahl Variablen} \\ m &= 1 \text{ ... Anzahl Nebenbedingungen} \\ (n-m) &= 2 \\ (-1)^m &= (-1)^1 = -1 \ < 0 \\ B_3 &= -4 \\ B_4 &= -8 \end{aligned}$$

=> globales Minimum (Lagrange Bedingungen 1. Ordnung geben eindeutige Lösung, Hessematrix unabhängig von Variablen, entlang der Nebenbedingung bedingt konvex)

2.3 Beispiel 7 (Beispiel 6 Fortsetzung)

Das Unternehmen Solid AG soll 100 Stück eines Produktes mit einer oder mehreren von drei zur Verfügung stehenden Technologien herstellen. Die Produktion von x bzw. y bzw. z Stück des Produktes mit Technologie A bzw. B bzw. C kostet $10x$ bzw. $2y^2$ bzw. $z^2 + 8z$.

Aus Gründen der Auslastung soll mit den beiden Technologien B und C in Summe exakt 60 Stunden produziert werden. Die Herstellung mit den Technologien B bzw. C dauert jeweils 4 bzw. 2 Stunden pro Stück. Wie lautet in diesem Fall der optimale Produktionsplan?

a) Formulieren Sie das nichtlineare Programm für die Produktion von 100 Stück mit minimalen Kosten.

b) Formulieren Sie die Lagrange Funktion und bestimmen Sie den optimalen Produktionsplan.

c) Wie hoch sind die Grenzkosten der Produktion? Wie ändern sich die Kosten, wenn die Zeitrestriktion für die Technologien B und C um eine marginale Zeiteinheit auf $60 + dt$ Stunden geändert wird?

d) Überprüfen Sie ihr(e) Ergebniss(e) hinsichtlich der gefundenen Extremstellen.

Lösung

a) Kostenfunktion:

$$K(x, y, z) = 10x + 2y^2 + z^2 + 8z \tag{2.11}$$

Nebenbedingungen:

$$g_1(x, y, z) = 100 - x - y - z \tag{2.12}$$

$$g_2(x, y, z) = 60 - 4y - 2z \tag{2.13}$$

b) Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_2, x, y, z) &= 10x + 2y^2 + z^2 + 8z \\ &\quad +\lambda_1(100 - x - y - z) + \lambda_2(60 - 4y - 2z) \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 100 - x - y - z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= 60 - 4y - 2z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 10 - \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 4y - \lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 2z + 8 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

=>

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 10 \\ \lambda_2 &= 8 \\ x &= 80.5 \\ y &= 10.5 \\ z &= 9 \end{aligned}$$

Optimaler Produktionsplan:

$$P = \begin{pmatrix} 80.5 & 10.5 & 9 \end{pmatrix}' \tag{2.15}$$

c) Grenzkosten:

$$\lambda_1 = 10 \tag{2.16}$$

Schattenpreis für die zweite Restriktion:

$$\lambda_2 = 8 \tag{2.17}$$

Wenn um eine marginale Zeiteinheit länger produziert wird (mit Technologien B,C), ändern sich die Produktionskosten um 8 marginale Einheiten.

d)

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_1 \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2 \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2 \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2 \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_2 \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \lambda_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial \lambda_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} n &= 3 \text{ ... Anzahl Variablen} \\ m &= 2 \text{ ... Anzahl Nebenbedingungen} \\ (n-m) &= 1 \\ (-1)^m &= (-1)^2 = 1 \ > 0 \\ B_5 &= 48 \end{aligned}$$

=> Globales Minimum (Lagrange Bedingungen 1. Ordnung geben eindeutige Lösung, Hessematrix unabhängig von Variablen, entlang der Nebenbedingungen bedingt konvex)

2.4 Beispiel 8

Die AvE KG bietet ihren Kunden drei verschiedene Waren X, Y und Z zum Verkauf an, wobei variable Produktionsgesamtkosten von $3x^2$ bzw. $2y^2$ bzw. $3z^2$ anfallen. Weiters fallen Fixkosten in der Höhe von 20 000 EUR an. Da die Produktion staatlich gefördert wird, erhält das Unternehmen 5 EUR pro produziertem Gut X bzw. 3 EUR pro Y-Gut bzw. 2 EUR pro Z-Gut.

Aufgrund begrenzter Produktionskapazitäten können jährlich nur 3 000 Stück verkauft werden. Weiters schreibt der Gesetzgeber vor, dass von Y und Z in Summe genau 500 Stück produziert werden müssen. Wie produziert das Unternehmen unter der Voraussetzung, dass die Kosten minimiert werden?

a) Formulieren Sie das nichtlineare Programm.

b) Formulieren Sie die Lagrange-Funktion.

c) Wie lautet der optimale Produktionsplan?

d) Wie hoch sind die jährlichen Produktionsausgaben?

e) Überprüfen Sie ihr(e) Ergebniss(e) hinsichtlich der gefundenen Extremstellen.

f) Was sind die Grenzkosten der Produktion?

g) Welchen Kosteneffekt hätte es, wenn die zweite Restriktion dahingehend geändert würde, dass von den Gütern Y und Z in Summe $500 + dp$ Einheiten produziert werden müssen?

Lösung

a) Kostenfunktion:

$$K(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 5x - 3y - 2z + 20\,000 \tag{2.18}$$

Nebenbedingungen:

$$g_1(x,y,z) = 3\,000 - x - y - z \tag{2.19}$$

$$g_2(x,y,z) = 500 - y - z \tag{2.20}$$

b) Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L(\lambda_1,\lambda_2,x,y,z) &= 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 5x - 3y - 2z + 20\,000 \\ &\quad +\lambda_1(3\,000 - x - y - z) + \lambda_2(500 - y - z) \end{aligned} \tag{2.21}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 3000 - x - y - z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= 500 - y - z = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= 6x - 5 - \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 4y - 3 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 6z - 2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

=>

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 14995 \\ \lambda_2 &= -13797.6 \\ x &= 2500 \\ y &= 300.1 \\ z &= 199.9 \end{aligned}$$

Optimaler Produktionsplan:

$$P = \Big(2\,500, \quad 300.1, \quad 199.9\Big)' \tag{2.22}$$

d)

$$\begin{aligned} K(2500, 300.1, 199.9) &= 3(2500)^2 + 2(300.1)^2 + 3(199.9)^2 \\ &\quad -5 * 2500 - 3 * 300.1 - 2 * 199.9 + 20000 \\ &= 19\,056\,200 \end{aligned} \tag{2.23}$$

e)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} n &= 3 \text{ ... Anzahl Variablen} \\ m &= 2 \text{ ... Anzahl Nebenbedingungen} \\ (n-m) &= 1 \\ (-1)^m &= (-1)^2 = 1 \; > 0 \\ B_5 &= 10 \end{aligned}$$

=> Globales Minimum (Lagrange Bedingungen 1. Ordnung geben eindeutige Lösung, Hessematrix unabhängig von Variablen, entlang der Nebenbedingungen bedingt konvex)

f) Grenzkosten:

$$\lambda_1 = 14\,995 \tag{2.24}$$

g)

$$\lambda_2 = -13\,797.6 \tag{2.25}$$

Es käme zu einer Reduktion der Kosten im Ausmaß von EUR 13 797.6 dp.

2.5 Beispiel 9

Die Produktionsfunktion einer Firma mit gegebenen Budget von $K = 78\,000.00$ EUR ist gegeben durch die Cobb-Douglas Funktion

$$x = f(r_1, r_2, r_3) = 36 r_1^{\frac{1}{2}} r_2^{\frac{1}{3}} r_3^{\frac{1}{4}} \tag{2.26}$$

wobei x die Ausbringungsmenge pro Zeiteinheit und r_1,r_2,r_3 die Faktoreinsatzmengen pro Zeiteinheit der Produktionsfaktoren 1, 2 und 3 bezeichnet. Die Faktorpreise betragen $q_1 = 25$ EUR/EH, $q_2 = 20$ EUR/EH und $q_3 = 10$ EUR/EH.

Das Unternehmen hat das Ziel, eine möglichst hohe Ausbringungsmenge bei gegebenem Produktionsbudget zu erreichen.

a) Berechnen Sie die Grenzproduktivitäten aller Produktionsfaktoren.

b) Berechnen Sie den optimalen Expansionspfad.

c) Berechnen Sie die Kostenfunktion in Abhängigkeit der Produktionsmenge.

d) Berechnen Sie die Faktorkombination die den Output maximiert.

e) Überprüfen Sie ihr(e) Ergebniss(e) hinsichtlich der gefundenen Extremstellen.

f) Berechnen Sie die approximative Steigerung der Outputmenge, wenn das Budget auf $K = 80\,000.00$ EUR erhöht wird.

Lösung

a)

$$MP_1 = \frac{\partial x}{\partial r_1} = 36 r_2^{\frac{1}{3}} r_3^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} r_1^{\frac{-1}{2}} = \frac{18 r_2^{\frac{1}{3}} r_3^{\frac{1}{4}}}{r_1^{\frac{1}{2}}} \tag{2.27}$$

$$MP_2 = \frac{\partial x}{\partial r_2} = 36 r_1^{\frac{1}{2}} r_3^{\frac{1}{4}} \frac{1}{3} r_2^{\frac{-2}{3}} = \frac{12 r_1^{\frac{1}{2}} r_3^{\frac{1}{4}}}{r_2^{\frac{2}{3}}} \tag{2.28}$$

$$MP_3 = \frac{\partial x}{\partial r_3} = 36 r_1^{\frac{1}{2}} r_2^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} r_3^{\frac{-3}{4}} = \frac{9 r_1^{\frac{1}{2}} r_2^{\frac{1}{3}}}{r_3^{\frac{3}{4}}} \tag{2.29}$$

(MP = Marginal Productivity = Grenzproduktivität)

b)

$$L(\lambda, r_1, r_2, r_3) = f(r_1, r_2, r_3) + \lambda(K - q_1 r_1 - q_2 r_2 - q_3 r_3) = \tag{2.30}$$

$$36 r_1^{\frac{1}{2}} r_2^{\frac{1}{3}} r_3^{\frac{1}{4}} + \lambda \cdot (K - q_1 r_1 - q_2 r_2 - q_3 r_3) \tag{2.31}$$

$$\nabla L = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial r_1} \\ \frac{\partial L}{\partial r_2} \\ \frac{\partial L}{\partial r_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K - q_1 r_1 - q_2 r_2 - q_3 r_3 \\ MP_1 - \lambda q_1 \\ MP_2 - \lambda q_2 \\ MP_3 - \lambda q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{MP_1}{q_1} = \frac{MP_2}{q_2} = \frac{MP_3}{q_3} \tag{2.33}$$

$$\frac{MP_1}{q_1} = \frac{MP_2}{q_2} \Rightarrow r_2 = \frac{5}{6} r_1 \tag{2.34}$$

$$\frac{MP_1}{q_1} = \frac{MP_3}{q_3} \Rightarrow r_3 = \frac{5}{4} r_1 \tag{2.35}$$

c)

$$x = 36 r_1^{\frac{1}{2}} r_2^{\frac{1}{3}} r_3^{\frac{1}{4}} \Rightarrow r_1 = \left(\frac{x}{36(\frac{5}{6})^{\frac{1}{3}} (\frac{5}{4})^{\frac{1}{4}}} \right)^{\frac{12}{13}} \tag{2.36}$$

$$K = r_1 q_1 + r_2 q_2 + r_3 q_3 \Rightarrow K(x) = 1,991 x^{\frac{12}{13}} \tag{2.37}$$

d) aus b):

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = K - q_1 r_1 - q_2 r_2 - q_3 r_3 = 0 \tag{2.38}$$

$$K = r_1 \cdot (q_1 + \frac{5}{6} q_2 + \frac{5}{4} q_3) \Rightarrow r_1 \quad = \quad 1440 \tag{2.39}$$

$$r_2 \quad = \quad \frac{5}{6} r_1 = 1200 \tag{2.40}$$

$$r_3 \quad = \quad \frac{5}{4} r_1 = 1800 \tag{2.41}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1\,440, & 1\,200, & 1\,800 \end{pmatrix}' \tag{2.42}$$

e) globales Maximum (durch Hessematrix händisch sehr aufwendig zu bestimmen)

f) Eine “kleine” Änderung des Produktionsbudgets um marginale dK ändert die optimale Ausbringungsmenge um λdK. Daher ist die näherungsweise Steigerung der Menge gleich:

$$\Delta x = \lambda^* \Delta K = 1.3133 * 2000 = 2626.6 \tag{2.43}$$

(Der exakte Wert – durch Neuberechnung des Problems ermittelt – ist $\Delta x = 2629.38$)

3 Portfoliooptimierung

3.1 Beispiel 10

Betrachten Sie die drei Projekte 1, 2 und 3, deren Renditen folgende Eigenschaften haben:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.06 \\ 0.09 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

a) Berechnen Sie das globale Minimum-Varianz Portfolio.

b) Berechnen Sie die erwartete Rendite des globalen Minimum-Varianz Portfolios.

c) Berechnen Sie die Varianz und Standardabweichung des Minimum-Varianz Portfolios.

d) Berechnen Sie das optimal diversifizierte Portfolio aus den Projekten 1 und 2.

e) Berechnen Sie das Minimum-Varianz Portfolio bei einer gegebenen Renditeerwartung von $\bar{\mu} = 0.09$.

Lösung

a)

$$
\begin{aligned}
w^{\text{gmv}} &= \frac{1}{\mathbf{1}' \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1}} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} = && (3.4)\\
&= \frac{1}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = && (3.5)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} && (3.6)
\end{aligned}
$$

b)

$$
\mu^{\text{gmv}} = w^{gmv\prime} \cdot \mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.06 \\ 0.09 \end{pmatrix} = 0.056667 \tag{3.7}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(w^{\text{gmv}}) &= w^{gmv\prime} \cdot \Sigma \cdot w^{gmv} = && (3.8)\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = && (3.9)\\
&= 0.0133 && (3.10)
\end{aligned}
$$

$$
\sigma(w^{\text{gmv}}) = \sqrt{\mathrm{Var}(w^{\text{gmv}})} = 0.11547 \tag{3.11}
$$

d)

$$
p = p_2 - \frac{\mathrm{Cov}(p_2, \Delta_{p_1,p_2})}{\mathrm{Var}(\Delta_{p_1,p_2})} \cdot \Delta_{p_1,p_2} \tag{3.12}
$$

$$
\Delta_{p_1,p_2} = p_2 - p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(p_2, \Delta_{p_1,p_2}) &= p_2' \cdot \Sigma \cdot \Delta_{p_1,p_2} = && (3.14)\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = && (3.15)\\
&= 0.04 && (3.16)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\Delta_{p_1,p_2}) &= \Delta'_{p_1,p_2} \cdot \Sigma \cdot \Delta_{p_1,p_2} = & (3.17)\\
&= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = & (3.18)\\
&= 0.08 & (3.19)
\end{aligned}$$

$$p^{\mathrm{od}} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3.20)$$

e)

$$w^{\mathrm{mv}}(\bar{\mu}) = \frac{C - \bar{\mu}B}{|M|} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} + \frac{\bar{\mu}A - B}{|M|} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu} \qquad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
A &= \mathbf{1}' \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} = & (3.22)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = & (3.23)\\
&= 75 & (3.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \mathbf{1}' \cdot \Sigma^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu} = & (3.25)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.06 \\ 0.09 \end{pmatrix} = & (3.26)\\
&= 4.25 & (3.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \boldsymbol{\mu}' \cdot \Sigma^{-1} \cdot \boldsymbol{\mu} = & (3.28)\\
&= \begin{pmatrix} 0.02 & 0.06 & 0.09 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.06 \\ 0.09 \end{pmatrix} = & (3.29)\\
&= 0.3025 & (3.30)
\end{aligned}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 75 & 4.25 \\ 4.25 & 0.3025 \end{vmatrix} = 4.625 \tag{3.31}$$

$$w^{\mathrm{mv}}(0.09) = \begin{pmatrix} -0.162 \\ 0.378 \\ 0.784 \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

3.2 Beispiel 11

Betrachten Sie die drei Projekte 1, 2 und 3, deren Renditen folgende Eigenschaften haben:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.24 \\ 0.06 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.0036 & 0.0030 & 0.0020 \\ 0.0030 & 0.0100 & 0.0050 \\ 0.0020 & 0.0050 & 0.0100 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 375 & -100 & -25 \\ -100 & 160 & -60 \\ -25 & -60 & 135 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

a) Berechnen Sie das globale Minimum-Varianz Portfolio.

b) Berechnen Sie die erwartete Rendite des globalen Minimum-Varianz Portfolios.

c) Berechnen Sie die Varianz und Standardabweichung des Minimum-Varianz Portfolios.

d) Man zerlegt das folgende Portfolio in zwei Komponenten:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Überprüfen Sie die beiden Komponenten auf Korrelation.

e) Gegeben ist folgendes Portfolio:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

Berechnen Sie den Erwartungswert der Rendite.

f) Gegeben ist folgendes Portfolio:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{3.38}$$

Berechnen Sie die Varianz der Rendite.

Lösung

a)

$$\mathbf{1}' \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 375 & -100 & -25 \\ -100 & 160 & -60 \\ -25 & -60 & 135 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 300 \tag{3.39}$$

$$\Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 375 & -100 & -25 \\ -100 & 160 & -60 \\ -25 & -60 & 135 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

$$w^{\text{gmv}} = \frac{1}{\mathbf{1}' \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1}} \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mathbf{1} = \frac{1}{300} \cdot \begin{pmatrix} 250 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

b)

$$\mu^{\text{gmv}} = w^{\text{gmv}'} \cdot \mu = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.24 \\ 0.06 \end{pmatrix} = 0.16 \ (= \frac{4}{25}) \tag{3.42}$$

c)

$$\text{Var}(w^{\text{gmv}}) = w^{\text{gmv}'} \cdot \Sigma \cdot w^{\text{gmv}} = \frac{1}{300} = 0.00333 \tag{3.43}$$

$$\sigma(w^{\text{gmv}}) = \sqrt{\frac{1}{300}} = 0.0577 \tag{3.44}$$

d)

$$w_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \tag{3.45}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{3.46}$$

$$\text{Cor}(w_1, w_2) = \frac{\text{Cov}(w_1, w_2)}{\sqrt{\text{Var}(w_1) \cdot \text{Var}(w_2)}} \tag{3.47}$$

$$\text{Cov}(w_1, w_2) = w_1' \cdot \Sigma \cdot w_2 = \tag{3.48}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.0036 & 0.0030 & 0.0020 \\ 0.0030 & 0.0100 & 0.0050 \\ 0.0020 & 0.0050 & 0.0100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \tag{3.49}$$

$$= -0.0112 \tag{3.50}$$

$$\mathrm{Var}(w_1) = w_1' \cdot \Sigma \cdot w_1 = \tag{3.51}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.0036 & 0.0030 & 0.0020 \\ 0.0030 & 0.0100 & 0.0050 \\ 0.0020 & 0.0050 & 0.0100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \tag{3.52}$$

$$= 0.0164 \tag{3.53}$$

$$\mathrm{Var}(w_2) = w_2' \cdot \Sigma \cdot w_2 = \tag{3.54}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.0036 & 0.0030 & 0.0020 \\ 0.0030 & 0.0100 & 0.0050 \\ 0.0020 & 0.0050 & 0.0100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \tag{3.55}$$

$$= 0.0096 \tag{3.56}$$

$$\rho = \mathrm{Cor}(w_1, w_2) = \frac{-0.0112}{\sqrt{0.0164 \cdot 0.0096}} = -0.8926 \tag{3.57}$$

e)

$$\mu^{p_1} = p_1' \cdot \mu = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.18 \\ 0.24 \\ 0.06 \end{pmatrix} = 0.14 \; (= \frac{7}{50}) \tag{3.58}$$

f)

$$\mathrm{Var}(w^{p_1}) = p_1' \cdot \Sigma \cdot p_1 = \tag{3.59}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.0036 & 0.0030 & 0.0020 \\ 0.0030 & 0.0100 & 0.0050 \\ 0.0020 & 0.0050 & 0.0100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \tag{3.60}$$

$$= 0.0036 \; (= \frac{9}{2500}) \tag{3.61}$$

3.3 Beispiel 12

Betrachte die drei Projekte 1, 2 und 3, deren Renditen folgende Eigenschaften haben:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.13 \\ 0.04 \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{12}{1045} & \frac{7}{1045} & \frac{5}{836} \\ \frac{7}{1045} & \frac{43}{2090} & \frac{8}{1045} \\ \frac{5}{836} & \frac{8}{1045} & \frac{87}{8360} \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 130 & -20 & -60 \\ -20 & 70 & -40 \\ -60 & -40 & 160 \end{pmatrix} \tag{3.64}$$

a) Berechnen Sie globale Minimum-Varianz Portfolio.

b) Berechnen Sie die erwartete Rendite des globalen Minimum-Varianz Portfolios.

c) Berechnen Sie Varianz und Standardabweichung des Minimum-Varianz Portfolios.

d) Berechnen Sie das optimal diversifizierte Portfolio aus den Projekten 2 und 3.

e)Überprüfen Sie das Minimum-Varianz Portfolio und das optimal diversifizierte Portfolio auf Korrelation.

Lösung

a)

$$w^{\text{gmv}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.417 \\ 0.083 \\ 0.500 \end{pmatrix} \tag{3.65}$$

b)

$$\mu^{\text{gmv}} = \frac{77}{1200} = 0.064 \tag{3.66}$$

c)

$$\text{Var}(w^{\text{gmv}}) = \frac{1}{120} = 0.008 \tag{3.67}$$

$$\sigma(w^{\text{gmv}}) = \frac{1}{2\sqrt{30}} = 0.0913 \tag{3.68}$$

d)

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.69}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

$$\Delta_{p_2,p_3} = p_3 - p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(p_3, \Delta_{p_2,p_3}) =& p_3' \cdot \Sigma \cdot \Delta_{p_2,p_3} = \\
=& \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{1045} & \frac{7}{1045} & \frac{5}{836} \\ \frac{7}{1045} & \frac{43}{2090} & \frac{8}{1045} \\ \frac{5}{836} & \frac{8}{1045} & \frac{87}{8360} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
=& \frac{23}{8360}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\Delta_{p_2,p_3}) =& \Delta'_{p_2,p_3} \cdot \Sigma \cdot \Delta_{p_2,p_3} = \\
=& \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{1045} & \frac{7}{1045} & \frac{5}{836} \\ \frac{7}{1045} & \frac{43}{2090} & \frac{8}{1045} \\ \frac{5}{836} & \frac{8}{1045} & \frac{87}{8360} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
=& \frac{131}{8360}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^{\mathrm{od}} &= p_3 - \frac{\mathrm{Cov}(p_3, \Delta_{p_2,p_3})}{\mathrm{Var}(\Delta_{p_2,p_3})} \cdot \Delta_{p_2,p_3} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{23}{131} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{23}{131} \\ \frac{108}{131} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0.176 \\ 0.824 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e)

$$\rho = 0.9164 \tag{3.72}$$

4 Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen

4.1 Beispiel 13 (Beispiel 5 Fortsetzung)

Peters Spielwaren GmbH produziert Spielzeugsoldaten und Miniaturzüge. Die Soldaten können für einen Preis von 27 EUR und die Züge für 21 EUR verkauft werden. Für die Produktion werden Materialkosten von 10 EUR bzw. 9 EUR und Herstellungskosten von 14 EUR bzw. 10 EUR fällig.

Bei der Produktion durchlaufen die Spielwaren die Abteilungen Montage und Lackiererei. Für die Fertigstellung eines Spielzeugsoldaten werden in der Montage 1 h und in der Lackiererei 2 h benötigt, für die eines Miniaturzuges je 1 h. Das Unternehmen besitzt eine Kapazität von 80 h in der Montage und 100 h in der Lackiererei.

a) Formulieren Sie das nichtlineare Programm für die Maximierung des Gewinns unter den gegebenen Nebenbedingungen.

b) Formulieren Sie die Lagrange Funktion und bestimmen Sie den optimalen Produktionsplan.

c) Wie viel wäre das Unternehmen maximal für eine Erweiterung der Kapazität in der Montage bereit zu bezahlen? Wie viel wäre das Unternehmen maximal für eine Erweiterung der Kapazität in der Lackiererei bereit zu bezahlen?

d) Worin unterscheidet sich das Beispiel von Part 1?

kompakte Lösung

a) Gewinnfunktion:

$$G(x_S, x_Z) = 3x_S + 2x_Z \tag{4.1}$$

Nebenbedingungen:

$$g_1\colon x_S + x_Z \leq 80 \tag{4.2}$$

$$g_2\colon 2x_S + x_Z \leq 100 \tag{4.3}$$

$$g_3\colon x_S \geq 0 \tag{4.4}$$

$$g_4\colon x_Z \geq 0 \tag{4.5}$$

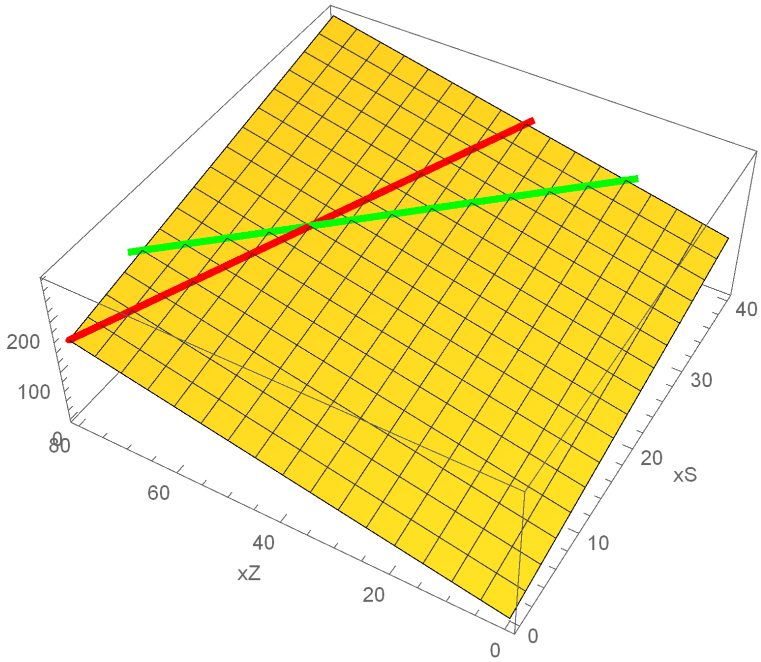


Abbildung 4.1: Zielfunktion mit Nebenbedingungen

b) Lagrange-Funktion:

$$L(\lambda_1, \lambda_2, x_S, x_Z) = 3x_S + 2x_Z + \lambda_1(80 - x_S - x_Z) + \lambda_2(100 - 2x_S - x_Z) \tag{4.6}$$

Optimaler Produktionsplan:

$$P = \begin{pmatrix} 20 & 60 \end{pmatrix}' \tag{4.7}$$

c) Grenzkosten:

$$\lambda_1 = 1 \tag{4.8}$$

$$\lambda_2 = 1 \tag{4.9}$$

d)

i) Nebenbedingungen mit Ungleichheitsbedingungen

ii) Vorgehensweise bei der Lösung -> Überprüfung aller möglichen Positionen für Extrema notwendig

iii) Kuhn-Tucker-Bedingungen anstatt Lagrange-Bedingungen

4.1.1 systematische Lösung (Lösungsweg)

Übersicht

Menge	Benennung	VP	Material und Herstellung	Montage	Lack.
x_S	Spielzeugsoldat	je 27 €	je (10 + 14) = 24 €	je 1 h	je 2 h
x_Z	Miniaturzüge	je 21 €	je (9 + 10) = 19 €	je 1 h	je 1 h

a) Maximierung des Gewinns unter Nebenbedingungen

Zielfunktion = Gesamtgewinn: In jeder der Perioden errechnet sich der Gewinn aus Erlösen minus Produktionskosten. Fixkosten sind in diesem Beispiel keine zu berücksichtigen, da diese nicht angegeben sind.

$$\begin{aligned} G(x_S, x_Z) =& x_S * (27 - 10 - 14) + x_Z * (21 - 9 - 10) = \\ =& 3x_S + 2x_Z = \\ =& 3x_S + 2x_Z \rightarrow_{x_Z, x_S} max \end{aligned}$$

Wir haben nun die Zielfunktion des Unternehmens ermittelt. Diese soll maximiert werden.

Nebenbedingungen Bei der Gewinnmaximierung müssen folgende Nebenbedingungen eingehalten werden:
- Montage: $g_1 : x_S + x_Z \leq 80 \rightarrow g_1(x_S, x_Z) = 80 - x_S - x_Z \geq 0$
- Lackiererei: $g_2 : 2x_S + x_Z \leq 100 \rightarrow g_2(x_S, x_Z) = 100 - 2x_S - x_Z \geq 0$
- Stückzahl darf nicht kleiner als 0 sein: $x_S \geq 0$ und $x_Z \geq 0$

Grafische Interpretation In Abbildung 4.1 auf Seite 37 erkennt man, dass die beiden Nebenbedingungen sich in einem Punkt in der Ebene der Zielfunktion schneiden ($x_S = 20;\ x_Z = 60;\ G(20, 60) = 180$).
Ohne Nebenbedingungen würde das Maximum der Zielfunktion (Ebene) im Punkt (∞, ∞) liegen und beide Nebenbedingungen verletzen.
Das Optimierungsziel ist es, mit einer zulässigen Lösung ein möglichst hohes Gewinnniveau zu erreichen. In der Abbildung sieht man, dass der höchste zulässig erreichbare Punkt im Schnittpunkt der Nebenbedingungen liegt.

systematische Lösung des Problems mit Hilfe des Kuhn-Tucker-Formalismus

Die Lagrange-Funktion des Problems lautet:

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_2, x_S, x_Z) =& G(x_S, x_Z) + \lambda_1 * g_1(x_S, x_Z) + \lambda_2 * g_2(x_S, x_Z) = \\ =& 3x_S + 2x_Z + \lambda_1 * (80 - x_S - x_Z) + \lambda_2 * (100 - 2x_S - x_Z) \end{aligned}$$

Kuhn-Tucker-Bedingungen: Ist ein Punkt $(\lambda^*, x^*) = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, x_S^*, x_Z^*)$ eine optimale Lösung des Produktionsproblems, dann müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(1) $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(\lambda^*, x^*) = 80 - x_S - x_Z \geq 0$ (Nebenbedingung 1)
(2) $\lambda_1^* \geq 0$ (Schattenpreis, Kuhn-Tucker-Bedingung)
(3) $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(\lambda^*, x^*) * \lambda_1^* = (80 - x_S - x_Z) * \lambda_1^* = 0$ (Com. Slack.)

(4) $\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(\lambda^*, x^*) = 100 - 2x_S - x_Z \geq 0$ (Nebenbedingung 2)
(5) $\lambda_2^* \geq 0$ (Schattenpreis, Kuhn-Tucker-Bedingung)
(6) $\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(\lambda^*, x^*) * \lambda_2^* = (100 - 2x_S - x_Z) * \lambda_2^* = 0$ (Com. Slack.)

(7) $\frac{\partial L}{\partial x_S}(\lambda^*, x^*) = 3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0$ (rel. DB, Kuhn-Tucker-Bedingung)
(8) $x_S^* \geq 0$ (Nebenbedingung 3)
(9) $\frac{\partial L}{\partial x_S}(\lambda^*, x^*) * x_S^* = (3 - \lambda_1 - 2\lambda_2) * x_S^* = 0$ (Com. Slack.)

(10) $\frac{\partial L}{\partial x_Z}(\lambda^*, x^*) = 2 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0$ (rel. DB, Kuhn-Tucker-Bedingung)
(11) $x_Z^* \geq 0$ (Nebenbedingung 4)
(12) $\frac{\partial L}{\partial x_Z}(\lambda^*, x^*) * x_Z^* = (2 - \lambda_1 - \lambda_2) * x_Z^* = 0$ (Com. Slack.)

Jeweils drei (Un-)Gleichungen stehen in direkter Relation zueinander (durch Absätze gekennzeichnet).

- Ungleichung (1) ist die erste Nebenbedingung, Ungleichung (2) ist die Vorzeichenrestriktion für den zugehörigen Schattenpreis λ_1^*. Die Complementary Slackness-Bedingung (3) stellt den Zusammenhang her: Wenn die linke Seite von (1) echt größer als 0 ist (d.h. die Nebenbedingung ist nicht bindend), dann muss der zugehörige Schattenpreis λ_1^* gleich 0 sein, denn ansonsten ist (3) verletzt. Umgekehrt kann der Schattenpreis nur dann ungleich 0 sein, wenn die Nebenbedingung bindend ist. Welcher der beiden Fälle nun zutrifft, ist nicht von vornherein klar und muss getestet werden.
- Die (Un-)Gleichungen (4), (5) und (6) stellen das entsprechende System von (Un-)Gleichungen rund um die zweite Nebenbedingung und ihren Schattenpreis dar.
- Ungleichung (8) gibt an, dass die Produktionsmengen nicht negativ sein dürfen. Die linke Seite der Ungleichung (7) stellt den relativen Deckungsbeitrag einer

(marginalen) zusätzlich produzierten Einheit vom Produkt *Soldaten*, auch relativer Grenz-Deckungsbeitrag genannt, dar. Würde man x_S^* um dx_S^* erhöhen, dann ändert sich der Gewinn gemäß Grenzgewinn, d.h. entlang der partiellen Ableitung der Gewinnfunktion um den Betrag $3dx_S^*$. Gleichzeitig erhöht sich aber auch der Ressourcenverbrauch (Verbrauch der zur Verfügung stehenden Einheiten Gesamtproduktion). Der Wert dieses zusätzlichen Verbrauchs ist $(\lambda_1^* + 2\lambda_2^*)dx_S^*$ und muss vom Grenzgewinn abgezogen werden, um den relativen, marginalen Deckungsbeitrag oder relativen Grenzdeckungsbeitrag zu erhalten. Die Complementary Slackness-Bedingung (9) verbindet die Ungleichungen (7) und (8). Wird vom Produkt *Spielzeugsoldat* produziert, $x_S^* > 0$, dann muss der relative Grenzdeckungsbeitrag gleich 0 sein, denn sonst kann die gewählte Produktionsmenge $x_S^* > 0$ nicht optimal gewählt sein. Wenn vom Produkt *Spielzeugsoldat* nichts produziert wird ($x_S^* = 0$), dann kann der relative Grenzdeckungsbeitrag echt negativ sein. Denn der besagt dann, dass jede produzierte Einheit den Lösungswert verschlechtern würde, deshalb ist in diesem Fall $x_S^* = 0$ optimal. - Das System (10), (11) und (12) verbindet Produktionsmenge und relativen Grenzdeckungsbeitrag für die Miniaturzüge.

$$\begin{array}{rrrr}
 & & \text{bindend (B):} & \text{nicht bindend (NB):} \\
\text{I.} & (80 - x_S - x_Z) * \lambda_1 = 0 \rightarrow & 80 - x_S - x_Z = 0 & \lambda_1 = 0 \\
\text{II.} & (100 - 2x_S - x_Z) * \lambda_2 = 0 \rightarrow & 100 - 2x_S - x_Z = 0 & \lambda_2 = 0 \\
\text{III.} & (3 - \lambda_1 - 2\lambda_2) * x_S = 0 \rightarrow & x_S = 0 & 3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\
\text{IV.} & (2 - \lambda_1 - \lambda_2) * x_Z = 0 \rightarrow & x_Z = 0 & 2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0
\end{array}$$

Entweder der Term in der Klammer oder der rechte Faktor muss 0 sein. Dadurch ergeben sich

$$2^4 = 16$$

Kombinationen.

Ist bei einer Nebenbedingung $\lambda_i > 0$, so muss diese bindend sein (B), d.h., der zugehörige Term der Nebenbedingung g^i muss dann gleich 0 sein. Andernfalls kann die Nebenbedingung nicht bindend sein, $g^i \geq 0$. Ist eine Positivitätsbedingung einer Variable x_i nicht bindend ($x_i > 0$, NB), dann muss der relative Deckungsbeitrag gleich 0 sein. Andernfalls kann er auch kleiner als 0 sein.

Wie die nun folgenden Berechnungen zeigen, ergibt nur Kombination 1 eine Lösung und erfüllt die Kuhn-Tucker-Bedingungen. Es ergeben sich folgende Kombinationen:

Kombination	I	II	III	IV	GLS lösbar[1]	KTB erfüllt[2]
1	B	B	NB	NB	Ja	Ja
2	B	B	NB	B	-	-
3	B	B	B	NB	-	-
4	B	B	B	B	-	-
5	B	NB	NB	NB	-	-
6	B	NB	NB	B	Ja	-
7	B	NB	B	NB	Ja	-
8	B	NB	B	B	-	-
9	NB	B	NB	NB	-	-
10	NB	B	NB	B	Ja	-
11	NB	B	B	NB	Ja	-
12	NB	B	B	B	-	-
13	NB	NB	NB	NB	-	-
14	NB	NB	NB	B	-	-
15	NB	NB	B	NB	-	-
16	NB	NB	B	B	Ja	-

Wie die Berechnungen auf den folgenden Seiten zeigen werden, ist Kombination 1 die einzige Kombination, bei der sich das Gleichungssystem lösen lässt und alle Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt sind. Daher ist diese Kombination die einzige Lösung dieses Problems.

[1] Gleichungssystem lösbar (Gleichungssystem ist grundsätzlich lösbar, jedoch sind nicht alle Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt)

[2] Kuhn-Tucker-Bedingungen erfüllt und daher eine Lösung des Problems

1. Kombination (B, B, NB, NB) $80 - x_S - x_Z = 0$ $100 - 2x_S - x_Z = 0$ $3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$ $2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ Lösen des Gleichungssystems ergibt folgende Werte: $x_S = 20;\ x_Z = 60;\ \lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 1$ $G(x_S, x_Z) = G(20, 60) = 180$ Kuhn-Tucker-Bedingungen: $\lambda_1 \geq 0$ ✓; $\lambda_2 \geq 0$ ✓; $x_S \geq 0$ ✓; $x_Z \geq 0$ ✓ $\rightarrow$ Ergebnis erfüllt alle Kuhn-Tucker-Bedingungen (daher lokales Maximum und auch Kandidat für globales Maximum)	**2. Kombination** (B,B,NB,B) $80 - x_S - x_Z = 0$ $100 - 2x_S - x_Z = 0$ $3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$ $x_Z = 0$ Ergebnis: keine Lösung (Gleichungssystem nicht lösbar.)
3. Kombination (B, B, B, NB) $80 - x_S - x_Z = 0$ $100 - 2x_S - x_Z = 0$ $x_S = 0$ $2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ Ergebnis: Keine Lösung (Gleichungssystem nicht lösbar.)	**4. Kombination** (B, B, B, B) $80 - x_S - x_Z = 0$ $100 - 2x_S - x_Z = 0$ $x_S = 0$ $x_Z = 0$ Ergebnis: Keine Lösung (Gleichungssystem nicht lösbar.)
5. Kombination (B, NB, NB, NB) $80 - x_S - x_Z = 0$ $\lambda_2 = 0$ $3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$ $2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ Ergebnis: Keine Lösung (Gleichungssystem nicht lösbar.)	**6. Kombination** (B, NB, NB, B) $80 - x_S - x_Z = 0$ $\lambda_2 = 0$ $3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$ $x_Z = 0$ Lösen des Gleichungssystems ergibt folgende Werte: $x_S = 80;\ x_Z = 0;\ \lambda_1 = 3;\ \lambda_2 = 0$ Kuhn-Tucker-Bedingungen: $\lambda_1 \geq 0$ ✓; $100 - 2x_S - x_Z \geq 0$ X; $x_S \geq 0$ ✓; $2 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0$ ✓ $\rightarrow$ Ergebnis erfüllt nicht alle Kuhn-Tucker-Bedingungen (2. Nebenbedingung verletzt)

7. Kombination (B, NB, B, NB)
$80 - x_S - x_Z = 0$
$\lambda_2 = 0$
$x_S = 0$
$2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

Lösen des Gleichungssystems ergibt folgende Werte: $x_S = 0$; $x_Z = 80$; $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 0$

Kuhn-Tucker-Bedingungen:
$\lambda_1 \geq 0$ ✓; $100 - 2x_S - x_Z \geq 0$ ✓;
$3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0$ X; $x_Z \geq 0$ ✓
→ Ergebnis erfüllt nicht alle Kuhn-Tucker-Bedingungen (3. Nebenbedingung verletzt)

8. Kombination (B, NB, B, B)
$80 - x_S - x_Z = 0$
$\lambda_2 = 0$
$x_S = 0$
$x_Z = 0$

Ergebnis: Keine Lösung (Gleichungssystem nicht lösbar.)

9. Kombination (NB, B, NB, NB)
$\lambda_1 = 0$
$100 - 2x_S - x_Z = 0$
$3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$
$2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

Ergebnis: Keine Lösung (Gleichungssystem nicht lösbar.)

10. Kombination (NB, B, NB, B)
$\lambda_1 = 0$
$100 - 2x_S - x_Z = 0$
$3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$
$x_Z = 0$

Lösen des Gleichungssystems ergibt folgende Werte: $x_S = 50$; $x_Z = 0$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \frac{3}{2}$

Kuhn-Tucker-Bedingungen:
$80 - x_S - x_Z \geq 0$ ✓; $\lambda_2 \geq 0$ ✓;
$x_S \geq 0$✓; $2 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0$ X
→ Ergebnis erfüllt nicht alle Kuhn-Tucker-Bedingungen (4. Nebenbedingung verletzt)

11. Kombination (NB, B, B, NB)
$\lambda_1 = 0$
$100 - 2x_S - x_Z = 0$
$x_S = 0$
$2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

Lösen des Gleichungssystems ergibt folgende Werte: $x_S = 0$; $x_Z = 100$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 2$

Kuhn-Tucker-Bedingungen:
$80 - x_S - x_Z \geq 0$ X; $\lambda_2 \geq 0$ ✓;
$3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0$ ✓; $x_Z \geq 0$✓
→ Ergebnis erfüllt nicht alle Kuhn-Tucker-Bedingungen (1. Nebenbedingung verletzt)

12. Kombination (NB, B, B, B)
$\lambda_1 = 0$
$100 - 2x_S - x_Z = 0$
$x_S = 0$
$x_Z = 0$

Ergebnis: Keine Lösung (Gleichungssystem nicht lösbar.)

13. Kombination (NB, NB, NB, NB)
$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 0$
$3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$
$2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

Ergebnis: Keine Lösung (Gleichungssystem nicht lösbar.)

14. Kombination (NB, NB, NB, B)
$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 0$
$3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$
$x_Z = 0$

Ergebnis: Keine Lösung (Gleichungssystem nicht lösbar.)

15. Kombination (NB, NB, B, NB)
$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 0$
$x_S = 0$
$2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

Ergebnis: Keine Lösung (Gleichungssystem nicht lösbar.)

16. Kombination (NB, NB, B, B)
$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 0$
$x_S = 0$
$x_Z = 0$

Lösen des Gleichungssystems ergibt folgende Werte: $x_S = 0$; $x_Z = 0$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$

Kuhn-Tucker-Bedingungen:
$80 - x_S - x_Z \geq 0$ ✓;
$100 - 2x_S - x_Z \geq 0$ ✓;
$3 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0$ X; $2 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 0$ X
→ Ergebnis erfüllt nicht alle Kuhn-Tucker-Bedingungen (3. und 4. Nebenbedingung verletzt)

b) Lagrange Funktion und optimaler Produktionsplan In Punkt a) wurde als optimale Produktionsentscheidung folgende Lösung ermittelt: $x_S = 20, x_Z = 60$. Es ist also optimal, vom Spielzeugsoldaten 20 Einheiten zu produzieren und von den Miniaturzügen 60 Einheiten. Die zu den zwei Nebenbedingungen gehörenden Lagrange Multiplikatoren sind:
- Stundenbeschränkung in der Montage auf 80 h: $\lambda_1 = 1$
- Stundenbeschränkung in der Lackiererei auf 100 h: $\lambda_2 = 1$

Die Lagrange Multiplikatoren heißen auch Schattenpreise der Nebenbedingungen. Sie geben Auskunft über die (ökonomische) Konsequenz der Beschränkung, die sie vermitteln. Die Dimension des Schattenpreises ist wichtig, um ihn richtig zu interpretieren. Der Schattenpreis hat die Dimension [Dimension der Zielfunktion / Dimension der Beschränkung]. Im gegebenen Produktionsproblem ist die Dimension der Zielfunktion (=Unternehmensgewinn) gleich [EUR] und die Dimension der Beschränkungen ist [h]. Daher ist die Dimension der Lagrange Multiplikatoren gleich [EUR / h]. Das ist notwendig, damit die Lagrange Funktion von den Dimensionen her richtig definiert ist.

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_2, x_S, x_Z) =& G(x_S, x_Z) + \lambda_1 * g_1(x_S, x_Z) + \lambda_2 * g_2(x_S, x_Z) = \\ =& 3x_S + 2x_Z + \lambda_1 * (80 - x_S - x_Z) + \lambda_2 * (100 - 2x_S - x_Z) \end{aligned}$$

Wie in den Lehrveranstaltungsunterlagen beschrieben, haben die Nebenbedingungen die Form $h_j(x_S, x_Z) \leq p_j$ bzw. entsprechend umgeformt $g_j(x_S, x_Z) = p_j - h_j(x_S, x_Z) \geq 0$. Wir wissen, dass die Sensitivität des optimalen Zielfunktionswertes (also im Punkt x^*) gegenüber der Beschränkung p durch den Lagrange Multiplikator der Nebenbedingung vermittelt wird.
$\frac{dG(x_S^*, d_Z^*)}{dp_j} = \frac{\partial L(\lambda^*, x^*)}{\partial p_j} = \lambda_j$
D.h., wenn die Beschränkung dp_j der Nebenbedingung j marginal gelockert wird, also dann pj+dp lautet, dann verschiebt sich die optimale Lösung so, dass der optimale Zielfunktionswert sich um $\lambda_j * dp$ ändert.

c) Wie viel wäre das Unternehmen für eine Kapazitätserweiterung bereit zu bezahlen?
Die Nebenbedingung 1 ist bindend, d.h., $80 - x_S - x_Z = 80 - 20 - 60 = 0$, der dazugehörige Lagrange Multiplikator $\lambda_1 = 1$. Wenn man die Produktionsbeschränkung geringfügig lockert und mehr Produktion zulässt, $80 + dp, dp > 0$, dann ändert sich dadurch die optimale Produktionsentscheidung und als Konsequenz auch der optimale Gesamtgewinn. Die Änderung ist positiv und beträgt $\lambda_1 * dp = 1dp$.

Die Nebenbedingung 2 ist bindend, d.h., $100 - 2x_S - x_Z = 80 - 40 - 60 = 0$, der dazugehörige Lagrange Multiplikator $\lambda_2 = 1$. Wenn man die Produktionsbeschränkung geringfügig lockert und mehr Produktion zulässt, $100 + dp, dp > 0$, dann ändert sich dadurch die optimale Produktionsentscheidung und als Konsequenz auch der optimale Gesamtgewinn. Die Änderung ist positiv und beträgt $\lambda_2 * dp = 1dp$.

Der Schattenpreis von $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$ gibt an, wieviel das Unternehmen pro zusätzlicher Einheit für eine geringfügige Lockerung der Produktionsbeschränkung maximal zu zahlen bereit wäre. Das Unternehmen wäre bereit für je eine weitere Stunde Montage bzw Lackiererei 1 EUR zu bezahlen. Dies lässt sich an den Schattenpreisen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1$ ablesen.

d) Worin unterscheidet sich das Beispiel von Part 1?
Die Berechnung erfolgte nicht nach Lagrange sondern nach Kuhn-Tucker. Diese Methode ist deutlich aufwändiger, dafür ist man nicht auf Gleichheitsnebenbedingungen eingeschränkt. Das Ergebnis unterscheidet sich in unserem Fall nicht von der Lagrange Methode, da beide Kapazitäten voll ausgeschöpft werden. Grundsätzlich müssen bei Kuhn-Tucker nicht alle Nebenbedingungen bindend sein. Durch das Aufstellen aller Kombinationen kann dies überprüft werden.

4.2 Beispiel 14

Ein Unternehmen produziert zwei Produkte: ein Standard-Produkt A und ein etwas hochwertigeres Produkt B. Wenn das Management einen Preis p_A für eine Einheit des Produktes A und einen Preis p_B für eine Einheit des Produktes B setzt, kann das Unternehmen q_A Einheiten von A und q_B von B verkaufen, mit

$$q_A = 400 - 2p_A + p_B \tag{4.10}$$

$$q_B = 200 + p_A - p_B \tag{4.11}$$

Die Herstellung des Produktes A erfordert 2 Stunden Arbeit und eine Einheit Rohstoff, für eine Einheit von B 4 Stunden Arbeit und 8 Einheiten des Rohstoffes. Zur Zeit stehen 800 Stunden Arbeit und 600 Einheiten des Rohstoffes zur Verfügung, eine Einheit Rohstoff kostet EUR 2.-, eine Stunde Arbeit kostet EUR 15.-

a) Wie lauten Gewinnfunktion und Nebenbedingungen in Abhängigkeit von q_A und q_B?

b) Ermitteln Sie die gewinnoptimale Preispolitik mithilfe der Kuhn-Tucker Bedingungen.

c) Wie viel würde das Unternehmen maximal für
   - i) die Ausweitung der Arbeitszeitbeschränkung
   - ii) eine weitere (marginale) Einheit des Rohstoffes zahlen?

d) Welchen Gewinn erzielt das Unternehmen im Optimum?

kompakte Lösung

a)

$$G(q_A, q_B) = q_A(600 - q_A - q_B) - 32q_A + q_B(800 - q_A - 2q_B) - 76q_B \tag{4.12}$$

$$g_1 : 2q_A + 4q_B \leq 800 \tag{4.13}$$

$$g_2 : q_A + 8q_B \leq 600 \tag{4.14}$$

b)

$$q_A = 233.6,\ p_A = 320.6 \tag{4.15}$$

$$q_B = 45.8,\ p_B = 474.8 \tag{4.16}$$

c)

i)

$$\lambda_1 = 0 \tag{4.17}$$

ii)

$$\lambda_2 = 9.2 \tag{4.18}$$

d)

$$G(q_A = 233.6, q_B = 45.8) = 85\,682 \tag{4.19}$$

systematische Lösung (Lösungsweg)

a) $G = U - K$
$K(q_A, q_B) = 2 * 15q_A + 2q_A + 4 * 15q_B + 8 * 2q_B = 32q_A + 76q_B$
$U(q_A, q_B) = q_A * p_A + q_B * p_B$

Gleichung aus der Angabe umformen nach p_B:
$p_B = 200 + p_A - q_B$
$\rightarrow q_A = 400 - 2p_A + 200 + p_A - q_B = 600 - p_A - q_B$

Die letzte Gleichung umformen nach p_A:
$\rightarrow p_A = 600 - q_B - q_A$
$\rightarrow p_B = 800 - 2q_B - q_A$

Einsetzen in die Gewinnfunktion $G = U - K$:
$G(q_A, q_B) = q_A(600 - q_B - q_A) - 32q_A + q_B(800 - q_A - 2q_B) - 76q_B$

Folgende Nebenbedingungen müssen eingehalten werden:
Arbeit in Stunden: $g_1 : 2q_A + 4q_B \leq 800$
Rohstoffbeschränkung: $g_2 : q_A + 8q_B \leq 600$

b) Die Lagrange-Funktion des Problems lautet:

$L(\lambda_1, \lambda_2, q_A, q_B) = q_A(600 - q_A - q_B) - 32q_A + q_B(800 - q_A - 2q_B) - 76q_B + \lambda_1(800 - 2q_A - 4q_B) + \lambda_2(600 - q_A - 8q_B)$

Kuhn-Tucker-Bedingungen: Ist ein Punkt $(\lambda^*, q^*) = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, q_A^*, q_B^*)$ eine optimale Lösung des Problems, dann müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

(1) $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(\lambda^*, q^*) = 800 - 2q_A - 4q_B \geq 0$ (Nebenbedingung 1)
(2) $\lambda_1^* \geq 0$ (Kuhn-Tucker-Bedingung)
(3) $\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}(\lambda^*, q^*) * \lambda_1^* = (800 - 2q_A - 4q_B) * \lambda_1^* = 0$ (Com. Slack)

(4) $\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(\lambda^*, q^*) = 600 - q_A - 8q_B \geq 0$ (Nebenbedingung 2)
(5) $\lambda_2^* \geq 0$ (Kuhn-Tucker-Bedingung)
(6) $\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}(\lambda^*, q^*) * \lambda_2^* = (600 - q_A - 8q_B) * \lambda_2 = 0$ (Com. Slack.)

(7) $\frac{\partial L}{\partial q_A}(\lambda^*, q^*) = 568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0$ (Kuhn-Tucker-Bedingung)
(8) $q_A \geq 0$ (Nebenbedingung 3)
(9) $\frac{\partial L}{\partial q_A}(\lambda^*, q^*) * q_A = (568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2) * q_A = 0$ (Com. Slack.)

(10) $\frac{\partial L}{\partial q_B}(\lambda^*, q^*) = 724 - 2q_A - 4q_B - 4\lambda_1 - 8\lambda_2 \leq 0$ (Kuhn-Tucker-Bedingung)

(11) $q_B \geq 0$ (Nebenbedingung 4)

(12) $\frac{\partial L}{\partial q_B}(\lambda^*, q^*) * q_B = (724 - 2q_A - 4q_B - 4\lambda_1 - 8\lambda_2)q_B = 0$ (Com. Slack.)

Nach Aufstellen der (Com. Slack) Bedingungen lassen sich nun die Formeln für die möglichen Kombinationen für KT ermitteln:

		Bindend(B):	Nicht Bindend(NB):
I:	$(800 - 2q_A - 4q_B)\lambda_1 = 0$	$800 - 2q_A - 4q_B = 0$	$\lambda_1 = 0$
II:	$(600 - q_A - 8q_B)\lambda_2 = 0$	$600 - q_A - 8q_B = 0$	$\lambda_2 = 0$
III:	$(568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2)q_A = 0$	$q_A = 0$	$568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
IV:	$(724 - 2q_A - 4q_B - 4\lambda_1 - 8\lambda_2)q_B = 0$	$q_B = 0$	$724 - 2q_A - 4q_B - 4\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0$

Da entweder der Term in der Klammer oder der rechte Faktor 0 sein müssen, ergeben sich $2^4 = 16$ Kombinationen.

Kombination	I	II	III	IV	GLS Lösbar	KTB Erfüllt
1	B	B	B	B	-	-
2	B	B	B	NB	-	-
3	B	B	NB	B	-	-
4	B	B	NB	NB	Ja	-
5	B	NB	B	B	-	-
6	B	NB	B	NB	Ja	-
7	B	NB	NB	B	Ja	-
8	B	NB	NB	NB	Ja	-
9	NB	B	B	B	-	-
10	NB	B	B	NB	Ja	-
11	NB	B	NB	B	Ja	-
12	NB	B	NB	NB	Ja	Ja
13	NB	NB	B	B	Ja	-
14	NB	NB	B	NB	Ja	-
15	NB	NB	NB	B	Ja	-
16	NB	NB	NB	NB	Ja	-

Wie die Berechnungen auf den folgenden Seiten zeigen werden, ist Kombination 12 die einzige Lösung dieses Problems.

1.Kombination (B,B,B,B):
I: $800 - 2q_A - 4q_B = 0$
II: $600 - q_A - 8q_B = 0$
III: $q_A = 0$
IV: $q_B = 0$

Gleichungssystem nicht lösbar

2.Kombination (B,B,B,NB):
I: $800 - 2q_A - 4q_B = 0$
II: $600 - q_A - 8q_B = 0$
III: $q_A = 0$
IV: $724 - 2q_A - 4q_B - 4\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0$

Gleichungssystem nicht lösbar

3.Kombination (B,B,NB,B):
I: $800 - 2q_A - 4q_B = 0$
II: $600 - q_A - 8q_B = 0$
III: $568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
IV: $q_B = 0$

Gleichungssystem nicht lösbar

4.Kombination (B,B,NB,NB):
I: $800 - 2q_A - 4q_B = 0$
II: $600 - q_A - 8q_B = 0$
III: $568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
IV: $724 - 2q_A - 4q_B - 4\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0$

$q_A = 600 - 8q_B$
Einsetzen in I:
$800 - 2(600 - 8q_B) - 4q_B = 0 = -400 + 12q_B \rightarrow q_B = \frac{400}{12} \rightarrow q_A = 333,\dot{3} = \frac{1000}{3}$
III Umformen nach λ_2:
$\lambda_2 = 568 - 2\frac{1000}{3} - 2\lambda_1 - 2\frac{400}{12}$
Einsetzen in IV und Umformen auf λ_1:
$724 - 2\frac{1000}{3} - 4\frac{400}{12} - 4\lambda_1 - 8(568 - 2\frac{1000}{3} - 2\lambda_1 - 2\frac{400}{12}) \rightarrow \lambda_1 = \frac{1246{,}667}{-12} \rightarrow$ Bedingung $\lambda_1 \geq 0$ verletzt.

5.Kombination (B,NB,B,B):
I: $800 - 2q_A - 4q_B = 0$
II: $\lambda_2 = 0$
III: $q_A = 0$
IV: $q_B = 0$
Gleichungssystem nicht lösbar

6.Kombination (B,NB,B,NB):
I: $800 - 2q_A - 4q_B = 0$
II: $\lambda_2 = 0$
III: $q_A = 0$
IV: $724 - 2q_A - 4q_B - 4\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0$

I Umformen nach q_B:
$\rightarrow q_B = 200 \rightarrow \lambda_1 = -19 \rightarrow$ Bedingung $\lambda_1 \geq 0$ verletzt.

7.Kombination (B,NB,NB,B):
I: $800 - 2q_A - 4q_B = 0$
II: $\lambda_2 = 0$
III: $568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
IV: $q_B = 0$

$\rightarrow q_A = 400 \rightarrow \lambda_1 = -116 \rightarrow$ Bedingung $\lambda_1 \geq 0$ verletzt.

8.Kombination (B,NB,NB,NB):
I: $800 - 2q_A - 4q_B = 0$
II: $\lambda_2 = 0$
III: $568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
IV: $724 - 2q_A - 4q_B - 4\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0$

$q_A = 206$, $q_B = 97$, $\lambda_1 = -19 \rightarrow$ Bedingung $\lambda_1 \geq 0$ verletzt.

9.Kombination (NB,B,B,B):
I: $\lambda_1 = 0$
II: $600 - q_A - 8q_B = 0$
III: $q_A = 0$
IV: $q_B = 0$

Gleichungssystem nicht lösbar

10.Kombination (NB,B,B,NB):
I: $\lambda_1 = 0$
II: $600 - q_A - 8q_B = 0$
III: $q_A = 0$
IV: $724 - 2q_A - 4q_B - 4\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0$

$q_B = \frac{600}{8} = 75$
$\rightarrow \lambda_2 = 53$
I: $800 - 2q_A - 4q_B = 500 \geq 0 \checkmark$
II: $\lambda_2 \geq 0 \checkmark$
III: $568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 365 \leq 0$ **X**, nicht erfüllt

11.Kombination (NB,B,NB,B):
I: $\lambda_1 = 0$
II: $600 - q_A - 8q_B = 0$
III: $568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
IV: $q_B = 0$

$q_A = 600 \rightarrow \lambda_2 = 568 - 2 * 600 = -632 \ \lambda_2 \geq 0$ **X**, nicht erfüllt

12.Kombination (NB,B,NB,NB):
I: $\lambda_1 = 0$
II: $600 - q_A - 8q_B = 0$
III: $568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
IV: $724 - 2q_A - 4q_B - 4\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0$

$q_A = 233,6$, $q_B = 45,8$, $\lambda_2 = 9,2$, $\lambda_1 = 0$

I: $800 - 2q_A - 4q_B = 800 - 2 * 233,6 - 4 * 45.8 = 149,6 \geq 0$✓
II: $\lambda_2 = 9.2 \geq 0$✓
III: $q_A = 233.6 \geq 0$✓
IV: $q_B = 45.8 \geq 0$✓

→Lösung des Problems.

13.Kombination (NB,NB,B,B):
$\lambda_1 = \lambda_2 = q_A = q_B = 0$
Bedingung $568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 568 \leq 0$ **X** nicht erfüllt

14.Kombination (NB,NB,B,NB):
I: $\lambda_1 = 0$
II: $\lambda_2 = 0$
III: $q_A = 0$
IV: $724 - 2q_A - 4q_B - 4\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0$

$\rightarrow q_B = \frac{724}{4} = 181$
Bedingung $600 - q_A - 8q_B = 600 - 0 - 8 * 181 \geq 0$ X nicht erfüllt

15.Kombination (NB,NB,NB,B):
$\lambda_1 = \lambda_2 = q_B = 0$
III: $568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \rightarrow q_A = \frac{568}{2} = 284$

I: $800 - 2q_A - 4q_B = 800 - 2 * 284 - 4 * 0 = 232 \geq 0$✓
II: $600 - q_A - 8q_B = 600 - 284 \geq 0$✓
III: $q_A \geq 0$✓
IV: $724 - 2 * q_A - 4q_B - 4\lambda_1 - 8\lambda_2 = 724 - 2 * 284 = 156 \leq 0$ X nicht erfüllt

16.Kombination (NB,NB,NB,NB):
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
III: $568 - 2q_A - 2q_B - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0$
IV: $724 - 2q_A - 4q_B - 4\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0$

$\rightarrow q_A = 362 - 2q_B$
Einsetzen in III:
$568 - 2 * (362 - 2q_B) - 2q_B = 568 - 724 - 2q_B = 0$
$\rightarrow q_B = 78 \rightarrow q_A = 206$

I: $800 - 2q_A - 4q_B = 800 - 2 * 206 - 4 * 78 = 76 \geq 0$✓
II: $600 - q_A - 8q_B = 600 - 206 - 8 * 78 = -230 \geq 0$ X nicht erfüllt

Die 12. Kombination ist somit die einzige Lösung des Problems.
Jetzt muss noch der Preis berechnet werden:
$p_A = 600 - q_B - q_A = 600 - 45.8 - 233.6 = 320.6$
$p_B = 800 - 2q_B - q_A = 800 - 2 * 45.8 - 233.6 = 474.8$

c)
   i) Da die Nebenbedingung 1 nicht bindend ist, wäre das Unternehmen nicht bereit, für eine Ausweitung zu bezahlen $\rightarrow \lambda_1 = 0$
   ii) Die Nebenbedingung 2 ist bindend und der dazugehörige Lagrange-Multiplikator $\lambda_2 = 9.2$. Wenn man die Rohstoffbeschränkung lockert, dann ändert sich auch die optimale Produktionsentscheidung und daher auch der optimale Gesamtgewinn (positiv).

d) Einsetzen in die Gewinnfunktion:
$G(q_A = 233.6, q_B = 45.8) = 233.6(600 - 233.6 - 45.8) - 32 * 233.6 + 45.8(800 - 233.6 - 2 * 45.8) - 76 * 45.8 = 85\,682$

4.3 Beispiel 15

Ein Auftragsfertiger fertigt täglich maximal 800 Autos aus den drei verschiedenen Klassen A, C und E. Der Verkaufswert, die Fertigungskosten und die Fertigungszeiten sind in nachfolgender Tabelle beschrieben.

	Einheit	A	C	E
Verkaufswert	EUR/Stk	25 000	35 000	45 000
Fertigungskosten	EUR/Stk	21 000	30 500	39 600
Fertigungszeiten	$Personenstunden$	50	70	100

Aufgrund begrenzter Mitarbeiterkapazitäten und regulatorischer Bestimmungen stehen täglich nur 54 000 Personenstunden zur Verfügung.

a) Stellen Sie die Gewinnfunktion (= Deckungsbeitragsfunktion) und die Nebenbedingungen des Problems auf.

b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion auf.

c) Implementieren Sie das Problem in R und lösen Sie es mit Hilfe des Packages "lpSolve". Wie lautet der optimale Produktionsplan?

d) Welche Nebenbedingungen sind bindend?

e) Welchen Preis würde der Auftragsfertiger maximal für eine weitere Personenstunde zahlen?

f) Interpretieren Sie die relativen Deckungsbeiträge der drei verschiedenen Klassen?

g) Wie hoch ist der optimale Gesamtdeckungsbeitrag des Unternehmens?

Lösung

a)

$$f(a,c,e) = 4\,000a + 4\,500c + 5\,400e \tag{4.20}$$

$$g_1 : a + c + e \leq 800 \tag{4.21}$$

$$g_2 : 50a + 70c + 100e \leq 54\,000 \tag{4.22}$$

b)

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_2, a, c, e) = {} & 4\,000a + 4\,500c + 5\,400e \\ & + \lambda_1(800 - a - c - e) \\ & + \lambda_2(54\,000 - 50a - 70c - 100e) \end{aligned} \tag{4.23}$$

c)

$$a = 520 \tag{4.24}$$

$$c = 0 \tag{4.25}$$

$$e = 280 \tag{4.26}$$

d) Beide Nebenbedingungen sind bindend.

e)

$$\lambda_2 = 28 \tag{4.27}$$

f) Die relativen Deckungsbeiträge der drei Klassen sind 0, -60, 0. D.h., der Deckungsbeitrag der Klasse C ist um 60 EUR zu niedrig (relativ zu den beiden anderen Klassen), daher wird die Klasse C nicht produziert.

g)

$$f = 3\,592\,000.00 EUR \tag{4.28}$$

5 Optimierung unter Ungleichheitsbedingungen - Duales Programm

5.1 Beispiel 16

Firma E.N.T.R.O. GmbH produziert Lupen in drei verschiedenen Qualitäten Q_1, Q_2 und Q_3. Für die Produktion durchlaufen die Produkte die Stationen „Schleiferei" und „Montage", wobei die in den Stationen benötigten Zeiten in nachstehender Tabelle angegeben sind.

	Einheit	Q_1	Q_2	Q_3
Schleiferei	h	1	2	3
Montage	h	1	1	1

Der Deckungsbeitrag je Einheit Q_1, Q_2 bzw. Q_3 beträgt EUR 120, EUR 200 bzw. EUR 250. Aufgrund begrenzter Mitarbeiterkapazitäten und gesetzlicher Bestimmungen stehen täglich nur 1.000 Personenstunden in der Schleiferei und 700 in der Montage zur Verfügung. Das Unternehmen will seinen gesamten Deckungsbeitrag maximieren.

a) Formulieren Sie das Duale Programm.

b) Skizzieren Sie den zulässigen Bereich des Dualen Programms.

c) Implementieren Sie das Duale Programm in R und interpretieren Sie die Lösung. Wie lautet der optimale Produktionsplan? Wo kann man ihn ablesen?

d) Wie viel wäre das Unternehmen bereit, für zusätzliche Personenstunden in der Schleiferei bzw. in der Montage maximal zu bezahlen?

e) Wie hoch ist der Deckungsbeitrag, den das Unternehmen täglich erzielen kann?

Lösung

a)

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = 1000\lambda_1 + 700\lambda_2 \tag{5.1}$$

$$g_1 : \lambda_1 + \lambda_2 \geq 120 \tag{5.2}$$

$$g_2 : 2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 200 \tag{5.3}$$

$$g_3 : 3\lambda_1 + \lambda_2 \geq 250 \tag{5.4}$$

b)

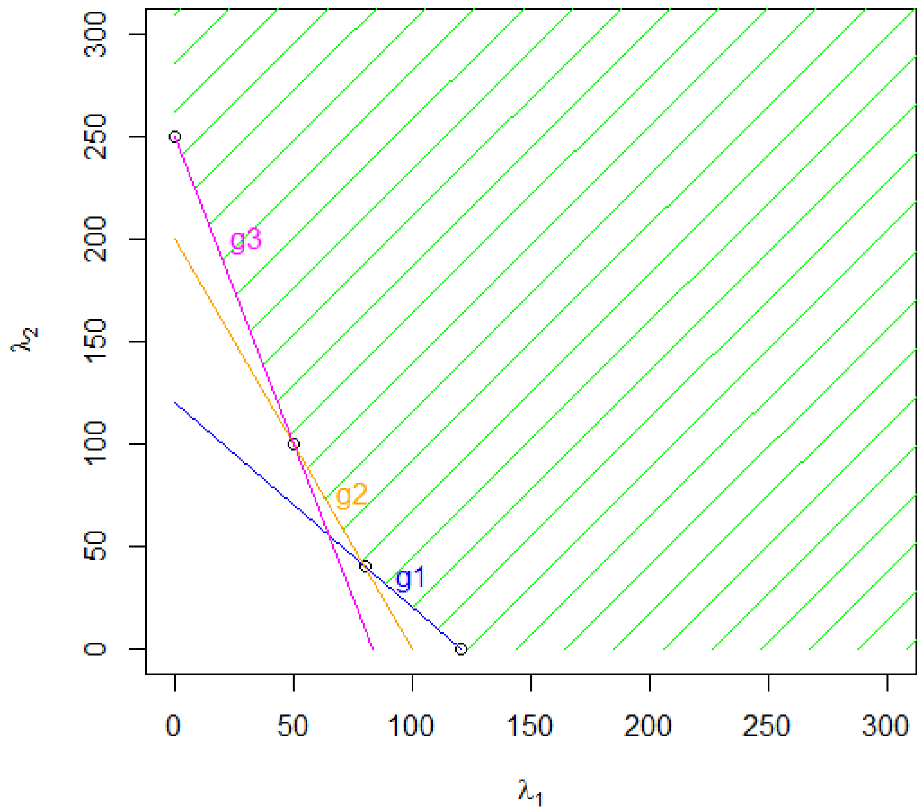


Abbildung 5.1: Zulässiger Bereich des Dualen Programms

Der grüne Bereich widerspricht keiner der drei Bedingungen. Die vier markierten Punkte sind mögliche Kandidaten für ein Optimum. Daher müssen alle vier Punkte untersucht werden.

c) Implementierung des dualen Problems in R:

```
library(lpSolve)

# Koeffizienten der Zielfunktion
obj <- c(1000,700)

# Nebenbedingungen
lhs <- matrix(c(1,2,3,1,1,1),nrow=3)
rhs <- c(120,200,250)
dir <- c(">=",">=",">=")

# Berechnung der Loesung
sol <- lp("min",obj,lhs,dir,rhs,compute.sens=T)
```

sol$duals gibt folgende Ausgabe: 400 300 0 0 0. Daher lautet der optimale Produktionsplan:

$$q_1 = 400 \tag{5.5}$$

$$q_2 = 300 \tag{5.6}$$

$$q_3 = 0 \tag{5.7}$$

d) *sol$solution* gibt aus: 80 40. Daher ist $\lambda_1 = 80$, $\lambda_2 = 40$. Das Unternehmen würde für eine zusätzliche Arbeitsstunde in der Schleiferei EUR 80.-, für eine zusätzliche Stunde in der Montage bis zu EUR 40.- bezahlen.

e) *sol$objval* gibt aus: 108000. Daher ist der maximale Gesamtdeckungsbeitrag $DB =$ 108000 EUR.

6 Dynamische Optimierung

6.1 Beispiel 17

Eine Investition kann entweder zum Zeitpunkt $t = 1$ oder zum Zeitpunkt $t = 2$ getätigt werden. Dabei stehen 2 unterschiedliche Maschinen zur Auswahl, wobei nur eine der beiden gekauft werden kann. Die Investitionskosten betragen EUR 400 000 für Typ 1 und EUR 600 000 für Typ 2.
Im Zeitpunkt $t = 1$ kann die Maschine vom Typ 1 einen Cashflow von EUR 70 000 erwirtschaften, die Maschine vom Typ 2 EUR 90 000 (natürlich nur, wenn bereits zum Zeitpunkt $t = 1$ investiert ist).
Im Zeitpunkt $t = 2$ ergeben sich 2 unterschiedliche Zustände, entweder "u" (mit Wahrscheinlichkeit 60%) oder "d" (mit Wahrscheinlichkeit 40%). Im Zustand "u" erwirtschaftet Typ 1 einen Cashflow von EUR 550 000 (Barwert bis ans Ende der Lebensdauer) und Typ 2 einen Cashflow von EUR 940 000. Im Zustand "d" ist der Cashflow EUR 440 000 für Typ 1 und 515 000 für Typ 2.
Die Diskontrate ist 10%.

a) Wie hoch ist der erwartete $t = 1$-Barwert der Cashflows, wenn in $t = 1$ in Typ 1 investiert wird?

b) Wie lautet die optimale Investitionsstrategie?

c) Wie hoch ist der erwartete Barwert dieser Strategie?

d) Wie lautet die optimale Investitionsstrategie, wenn nur Maschine 2 zur Verfügung steht?

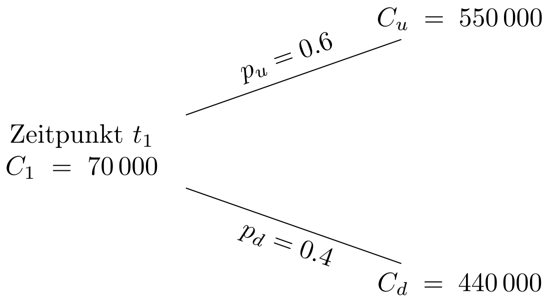
e) Angenommen, die Investitionskosten für Typ 2 betragen EUR 556 000. Was ist dann die optimale Strategie?

f) Wie hoch ist der entsprechende erwartete Barwert?

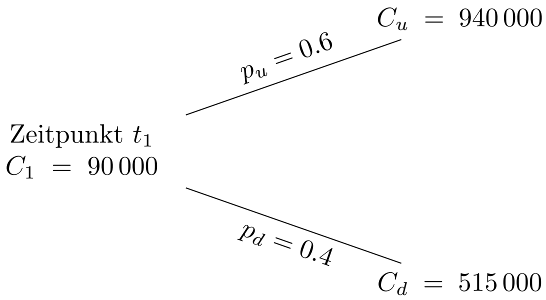
Lösung

a) $-400\,000 + 70\,000 + \frac{550\,000 \cdot 0.6 + 440\,000 \cdot 0.4}{1.1} = \text{EUR } 130\,000$

b) Maschine 1: Investition: 400 000



Maschine 2: Investition: 600 000



t_1-Investition (Plan A):

Maschine 1:

$$V_{A,1}: \quad -400\,000 + 70\,000 + \frac{550\,000 \cdot 0.6 + 440\,000 \cdot 0.4}{1.1} = 130\,000,$$

Maschine 2:

$$V_{A,2}: \quad -600\,000 + 90\,000 + \frac{940\,000 \cdot 0.6 + 515\,000 \cdot 0.4}{1.1} = 190\,000.$$

$$V_A = \max\{V_{A,1}, V_{A,2}\}$$

$\Rightarrow$ man würde in Maschine 2 investieren. $V_A = 190\,000$.

t_2-Investition (Plan B):

Maschine 1:

$$\begin{aligned} C_u &= 550\,000 - 400\,000 &= 150\,000, \quad \text{Barwert:} \quad 136\,363.636 \\ C_d &= 440\,000 - 400\,000 &= 40\,000, \quad \text{Barwert:} \quad 36\,363.636 \end{aligned}$$

Maschine 2:

$$\begin{aligned} C_u &= 940\,000 - 600\,000 &= 340\,000, \quad \text{Barwert:} \quad 309\,090.909 \\ C_d &= \max\{515\,000 - 600\,000\,,\,0\} &= 0, \quad \text{Barwert:} \quad 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Bei günstigem Markt wird Maschine 2 gekauft ($C_u = 340\,000$), bei ungünstigem Markt Maschine 1 ($C_d = 40\,000$).

$$V_B = 0 + \frac{1}{1+0.1}\{0.6 \cdot 340\,000 + 0.4 \cdot 40\,000\} = 200\,000$$

Abschließend der Vergleich zwischen Plan A und Plan B:

$$V = \max\{V_A, V_B\} = V_B = 200\,000$$

$V_A < V_B \Rightarrow$ Es ist optimal, erst zum Zeitpunkt 2 zu investieren. Im günstigen Fall wird zum Zeitpunkt 2 Maschine 2 gekauft. Im ungünstigen Fall Maschine 1.

c) $V_B = 200\,000$

d)

t_1-Investition: $V_A = 190\,000$

t_2-Investition: $V_B = \dfrac{340\,000 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4}{1.1} = 185\,454.546$

$\Rightarrow$ Es wird zum Zeitpunkt 1 investiert. $V = 190\,000$

e)

Barwert gleich investieren: $V_A = 234\,000$
Cashflow Maschine 2 t_2: $C_u = 384\,000$, $C_d = 0$
$V_B = \frac{1}{1.1}\{C_{u,M2} \cdot 0.6 + C_{d,M1} \cdot 0.4\} = 224\,000$
$\Rightarrow$ Man investiert in Periode 1 in Maschine 2

f) $V = \max\{V_A, V_B\} = V_A = 234\,000$