330.227 Betriebswirtschaftliche Optimierung
ao.Univ.Prof. Mag. DDr. Thomas Dangl

Vorname: . . . .

Nachname: . . . .

Matrikelnummer: . . . .

Studienkennzahl: . . . .

Aufgabe 1 (25 Punkte):

Portfoliotheorie: Betrachte die beiden Projekte 1 und 2, deren Renditen folgende Eigenschaften haben:

$$\mu = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0.09 & 0.02 \\ 0.02 & 0.01 \end{pmatrix},$$

mit

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & -40 \\ -40 & 180 \end{pmatrix},$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Das globale Minimum-Varianz-Portfolio hat die Gewichte

$$w^{\text{gmv}} = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 7/6 \end{pmatrix}$$

b) Die Portfolio-Transaktion

$$\Delta = p_2 - p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist unkorreliert zum Portfolio

$$\begin{pmatrix} -1/6 \\ 7/6 \end{pmatrix}$$

c) Die Standardabweichung der Rendite des globalen Minimum-Varianz Portfolios ist $1/\sqrt{120}$.

d) Die erwartete Rendite des globalen Minimum-Varianz Portfolios ist 1/6.

e) Das Portfolio

$$w = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

hat zum Projekt p_1 die Korrelation 88.5%.

f) Das Portfolio

$$w = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

hat eine Rendite mit Varianz von 0.0164.

Aufgabe 2 (25 Punkte): (Achtung: Stoff zu diesem Beispiel kommt in der Vorlesung vom 15.3.2019)

Betrachte folgendes Maximierungsproblem:

$$f(x_1, x_2) = 30 - (16 - 2x_1)^2 - (8 - x_2)^2 \rightarrow_{x_1,x_2} \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g1: \quad 4x_1 &\geq 50 - x_2, \\ g2: \quad x_2 &\geq -14 + 4x_1. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Die erste partielle Ableitung der Lagrangefunktion nach x_1 ist $4(16-2x_1) + 4\lambda_1 - 4\lambda_2$.

b) Die optimale Lösung ist $x_1 = 8,\ x_2 = 18,\ \lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = 10$, der optimale Zielfunktionswert ist -70.

c) Die zur zweiten Randbedingung gehörende "complementary slackness" - Bedingung lautet: $(14 - 4x1 + x2)\lambda_2 = 0$

d) Betrachten Sie den Lösungsversuch, wo angenommen wird, dass nur die zweite Nebenbedingung g_2 bindend ist. Dann ist die Lösung $x_1 = 6,\ x2 = 10,\ \lambda_2 = 4$, der Zielfunktionswert ist 10. Allerdings ist an dieser Stelle die Nebenbedingung g_1 verletzt.

e) Ändert man die Nebenbedingung g_2 marginal in

$$x_2 \geq -(14 + dp) + 4x_1$$

dann steigt die optimale Zielfunktion um $10dp$.

f) Die optimale Lösung des unbeschränkten Problems ist $x_1 = 8,\ x_2 = 8$, der Zielfunktionswert an dieser Stelle ist gleich 30.

Aufgabe 3 (25 Punkte):

Wie in der Vorlesung nehmen wir an, dass Zielfunktionen zwei Mal stetig differenzierbar sind und auf offenen und konvexen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ definiert sind.

Welche der folgende Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Eine symmetrische Matrix ist negativ-definit genau dann, wenn alle Eigenwerte der Matrix negativ sind.

b) Optimierung ohne Nebenbedingungen: Wenn $f(x)$ ein (lokales) Minimum bei x^* erreicht, dann folgt daraus, dass f_{xx} bei x^* positiv-semidefinit ist.

c) Optimierung ohne Nebenbedingungen: Ist die Zielfunktion konkav und gilt $f_x(x^*) = 0$, dann ist x^* ein globales Maximum.

d) Optimierung mit Nebenbedingungen: Eine Nebenbedingung g_i ist in einem Punkt $\tilde{x}$ genau dann bindend, wenn $g_i(\tilde{x}) = 0$.

e) Maximierungsproblem mit Nebenbedingungen: Lagrange-Multiplikatoren sind immer nicht-negativ.

f) Produktionstheorie: Als Substitutionseffekt bezeichnet man die Verschiebung der optimalen Faktorkombination als Reaktion auf eine Veränderung der relativen Faktorpreise bei konstantem Output.

Aufgabe 4 (25 Punkte):

Eine Firma will ein Gut X produzieren. Die zugrundeliegende Produktionsfunktion lautet

$$x = f(r_1, r_2) = 4r_1^{(3/6)}r_2^{(2/6)},$$

wobei x die Ausbringungsmenge pro Zeiteinheit und r_1, r_2 die Faktoreinsatzmengen pro Zeiteinheit der Produktionsfaktoren 1 und 2 bezeichnet. Die Faktorpreise betragen $q_1 = 9$ EUR/EH und $q_2 = 3$ EUR/EH.
Die Produktion soll auf eine Ausbringung von 512 Einheiten pro Zeiteinheit ausgelegt werden.

Welche der folgende Aussagen sind richtig (alle richtig):

a) Die Grenzproduktivität des Produktionsfaktors 1 ist $MP_1 = \dfrac{2r_2^{(1/3)}}{\sqrt{r_1}}$.

b) Die Grenzproduktivität des Produktionsfaktors 2 ist $MP_2 = \dfrac{4\sqrt{r_1}}{3r_2^{(2/3)}}$.

c) Der optimale Expansionspfad lautet $r_2 = 2r_1$.

d) Die Kostenfunktion lautet $K(x) = \dfrac{15x^{(6/5)}}{(4 \cdot 2^{(1/3)})^{(6/5)}} = \dfrac{15}{4}\dfrac{x^{(6/5)}}{2^{(4/5)}}$.

e) Bei einer Ausbringung von $x = 512$ ist die optimale Einsatzmenge des Faktors 1 gleich $r_1 = 256$.

f) Bei optimaler Produktion von $x = 512$ sind die Grenzkosten gleich 9 EUR/EH.