Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 1 (2022W)
Lösungsvorschlag

Anmerkung: Zeichen mit reinem Symbolcharakter sind im Folgenden unterstrichen. Sie können, müssen das aber nicht in Ihrer Ausarbeitung beibehalten.

Aufgabe 1.1 Gegeben sei folgende (deterministische) Turingmaschine M:

$$M = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 7\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{\underline{0}, \underline{1}, B\}, \delta, q_0, B, \{q_7\})$$

wobei

δ	$\underline{0}$	$\underline{1}$	B
q_0	(q_1, B, R)	$(q_6, \underline{1}, R)$	
q_1	$(q_1, \underline{0}, R)$	$(q_2, \underline{1}, R)$	
q_2	$(q_3, \underline{0}, R)$	$(q_2, \underline{1}, R)$	
q_3	$(q_3, \underline{0}, R)$		(q_4, B, L)
q_4	(q_5, B, L)		
q_5	$(q_5, \underline{0}, L)$	$(q_5, \underline{1}, L)$	(q_0, B, R)
q_6		$(q_6, \underline{1}, R)$	(q_7, B, S)
q_7			

a) Geben Sie $L(M)$ (also die Sprache, die von M akzeptiert wird) an.

b) Geben Sie eine Turingmaschine M' nach der Definition von Folie 72 an, welche dieselbe Sprache akzeptiert ($L(M') = L(M)$). Ihre Maschine M' sollte dabei die Kellerautomatenbedingung erfüllen. Erläutern Sie auch kurz verbal die Arbeitsweise Ihrer Maschine.

Lösung

a) $L(M) = \{\underline{0}^n \underline{1}^k \underline{0}^n \mid n \geq 0, k \geq 1\}$.

b) Wir definieren eine (deterministische) Turingmaschine

$$M' = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \{A, Z_0, B\}, \delta, q_0, \{Z_0, Z_1, Z_2\}, B, \{q_f\})$$

welche $L = \{\underline{0}^n \underline{1}^k \underline{0}^n \mid n \geq 0, k \geq 1\}$ akzeptiert; die Übergangsfunktion δ kann z.B. folgendermaßen definiert werden:

$1: \quad \delta(q_0, \underline{0}, B) = (q_0, A, R, R)$
$2: \quad \delta(q_0, \underline{1}, B) = (q_1, B, R, S)$
$3: \quad \delta(q_1, \underline{1}, B) = (q_1, B, R, S)$
$4: \quad \delta(q_1, Z_2, B) = (q_2, B, S, L)$
$5: \quad \delta(q_1, \underline{0}, B) = (q_2, B, S, L)$
$6: \quad \delta(q_2, \underline{0}, A) = (q_2, B, R, L)$
$7: \quad \delta(q_2, Z_2, Z_0) = (q_f, Z_0, S, S)$

Erläuterung:

1 : Für jedes eingelesene Symbol $\underline{0}$ wird ein Symbol A in den Keller (bzw. auf das Arbeitsband) geschrieben.

$2, 3$: Die Symbole $\underline{1}$ werden überlesen.

4 : Das Wort endet nach den Symbolen $\underline{1}$.

5, 6 : Für jedes eingelesene Symbol $\underline{0}$ wird ein Symbol A im Keller (bzw. auf dem Arbeitsband) gelöscht.

7 : Wird Z_2 auf dem Eingabeband (d.h., das Ende der Eingabe) erreicht, so sollte das Arbeitsband leer sein. M' geht dann in den (einzigen) Endzustand q_f über und akzeptiert somit die Eingabe.

Aufgabe 1.2 Im Folgenden bezeichnet PCP das Post'sche Korrespondenzproblem (s. Folie 65 f.)

a) Geben Sie für die folgenden PCPs eine Lösung an, oder begründen Sie deren Nichtlösbarkeit:
   (1) $K_1 = ((0, 101), (10101, 10), (11, 00000), (1, 01))$
   (2) $K_2 = ((1, 110), (111, 0), (01, 1))$
   (3) $K_3 = ((100, 1), (0, 100), (1, 00))$
   (4) $K_4 = ((1, 011), (011, 1), (01, 011))$

b) Sei PCP_x eine Variante des PCP, wobei in der Lösung einer Instanz jedes Wortpaar höchstens einmal vorkommen darf. Ist PCP_x entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

a) (1) K_1 besitzt die Lösung (2,1,4)
   (2) K_2 ist nicht lösbar. Eine zielführende Sequenz müsste mit 1,1,3,1,3,1,1,3,... beginnen, wobei der linke String immer kürzer als der rechte bleibt.
   (3) K_3 besitzt die Lösung (1,3,1,1,3,2,2)
   (4) K_4 ist nicht lösbar. Es gibt nur zwei mögliche Anfänge, die beide nicht zielführend sind:
   - 3,1,2,1,2,1,...
   - 3,1,3,1,...

   In beiden Fällen ist der linke String immer kürzer als der rechte.

b) PCP_x ist entscheidbar. Bei n Wortpaaren gibt es $2^n - 1$ mögliche (nicht leere) Sequenzen, in denen jedes Wortpaar höchstens einmal vorkommt. Für jede dieser Sequenzen gibt es wiederum höchstens $n!$ Möglichkeiten, die Wortpaare anzuordnen. Die Anzahl der möglichen Kombinationen ist also endlich, und dementsprechend entscheidbar.

Aufgabe 1.3 Geben Sie an, ob folgende Probleme (un)entscheidbar sind, und begründen Sie jeweils Ihre Antwort. Sofern möglich, verwenden Sie dafür den *Satz von Rice* und geben Sie, im Falle einer nicht trivialen Eigenschaft, auch immer ein Beispiel und ein Gegenbeispiel an. Das Alphabet ist dabei jeweils $\Sigma = \{\underline{0}, \underline{1}\}$.

a) Enthält die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L zu jedem Wort $w \in L$ auch sein Spiegelbild w^r?

b) Gilt für die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L über Σ, dass sie endlich, aber nicht regulär ist?

c) Wird die rekursiv aufzählbare Sprache L von einer Turingmaschine akzeptiert, die eine gerade Anzahl von Zuständen hat?

d) Ist die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache eine Teilmenge von Σ^*?

e) Gilt für die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache L über Σ, dass $|L^*|$ endlich ist?

Lösung

a) **Nicht entscheidbar**, Satz von Rice: Die Eigenschaft $P = \{L \mid w, w^r \in L\}$ ist nicht trivial, denn es gilt z.B.: $\{\underline{0}\underline{1}\} \notin P$ aber $\{\underline{1}\} \in P$. Daher ist P aufgrund des Satzes von Rice nicht entscheidbar.

b) **Entscheidbar.** Hierbei handelt es sich um eine triviale Eigenschaft: Es trifft auf keine rekursiv aufzählbare Sprache L zu, dass sie endlich, aber nicht regulär ist. (Jede endliche Sprache ist regulär.) Die Frage kann also immer mit "nein" beantwortet werden, und ist somit entscheidbar.

c) **Entscheidbar**. Der Satz von Rice ist hier nicht anwendbar, da es sich nicht um eine Eigenschaft der von Turingmaschinen akzeptierten Sprachen handelt, sondern um die Turingmaschinen selbst. In der Tat gibt es zu jeder rekursiv aufzählbaren Sprache L eine Turingmaschine mit einer geraden Anzahl von Zuständen, welche L akzeptiert. Diese Frage kann also immer mit "ja" beantwortet werden.

d) **Entscheidbar**. Es handelt sich hier um eine triviale Eigenschaft: Die Eigenschaft, eine Teilmenge von Σ^*, also eine Menge von Wörtern zu sein, trifft auf alle rekursiv aufzählbaren Sprachen zu. Diese Frage kann daher immer mit "ja" beantwortet werden, und ist somit entscheidbar.

e) **Nicht entscheidbar**, Satz von Rice: Die Eigenschaft $P = \{L \mid |L^*| \text{ ist endlich}\}$ ist nicht trivial, denn es gilt z.B.: $\{\} \in P$ (da $\{\}^* = \{\varepsilon\}$ und somit endlich) aber $\{\underline{1}\} \notin P$ (da $\{\underline{1}\}^*$ unendlich ist). Daher ist P aufgrund des Satzes von Rice nicht entscheidbar.

Aufgabe 1.4 Sind folgende Aussagen korrekt? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) Jede Sprache, die von einer Turingmaschine akzeptiert wird, ist entscheidbar.

b) Jede unentscheidbare Sprache enthält eine entscheidbare Teilmenge.

c) Entscheidbare Sprachen sind unter Vereinigung abgeschlossen.

d) Jede Sprache über einem einelementigen Alphabet ist entscheidbar.

e) Falls $A \leq L_u$ und $\overline{A} \leq L_u$, dann ist A entscheidbar. (L_u bezeichnet das Halteproblem.)

f) Jede Teilmenge einer regulären Sprache ist regulär.

Lösung

a) **Falsch**. Es gibt rekursiv aufzählbare Sprachen, die nicht entscheidbar sind, z.B. das Halteproblem.

b) **Richtig.** Jede unentscheidbare Sprache enthält eine endliche Teilmenge, und endliche Mengen sind immer entscheidbar.

c) **Richtig.** L_1 (bzw. L_2) werde durch die stets haltende Turingmaschine M_1 (bzw. M_2) erkannt. Um $L_1 \cup L_2$ zu erkennen, entwerfen wir eine Turingmaschine M, die zuerst M_1 simuliert und dann M_2 simuliert. M wird genau dann akzeptieren, wenn eine der beiden Turingmaschinen akzeptiert. Da M stets hält, ist $L_1 \cup L_2$ entscheidbar.

d) **Falsch**. Auch wenn Σ nur aus einem Element besteht, gilt: Σ^* ist abzählbar (unendlich), die Menge aller Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ ist überabzählbar. Von diesen ist jedoch nur eine abzählbare Menge entscheidbar. (Es gibt ja nur abzählbar (unendlich) viele Turingmaschinen). Dementsprechend gibt es unentscheidbare Sprachen über Σ.

e) **Richtig**. Aus $A \leq L_u$ folgt, dass A rekursiv aufzählbar ist, aus $\overline{A} \leq L_u$ folgt, dass $\overline{A}$ rekursiv aufzählbar ist. Damit ist A laut Definition (Folie 41) entscheidbar.

f) **Falsch**. Diese Aussage gilt sicher nicht im Allgemeinen. Ein Gegenbeispiel: die Sprache $L = \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$ ist regulär, das Halteproblem L_u ist eine Teilmenge von $L = \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$, aber selbst sicher nicht regulär.

Aufgabe 1.5 Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

a) $\{uu \mid u \in \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\}^*\}$

b) $\{uv \mid u, v \in \{\underline{a}, \underline{b}\}^*, |u| = |v|, |u|_{\underline{a}} \geq |v|_{\underline{a}}\}$

c) $\{u\underline{\#}v^r \mid u$ ist Binärdarstellung (ohne führende Nullen) von n, und v jene von $n-1, n > 1\}$. (Wörter in dieser Sprache sind also z.B. $\underline{101\#001}$ und $\underline{11111\#01111}$)

Lösung

a) Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{a}^m \underline{b} \underline{a}^m \underline{b}.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 2 > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{a}^m \underline{b} \underline{a}^m \underline{b}$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{a}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 2$ wählen, müsste auch $xy^2z = \underline{a}^{m+|y|} \underline{b} \underline{a}^m \underline{b}$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

b) Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann p die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$w = \underline{a}^p \underline{b}\underline{b} \underline{a}^p.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2p + 2 > p$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq p$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq p$ und $w = \underline{a}^p \underline{b}\underline{b} \underline{a}^p$, kann xy nur aus den Symbolen $\underline{a}$ der ersten Worthälfte bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 0$ wählen, müsste auch $w_0 = \underline{a}^{p-|y|} \underline{b}\underline{b} \underline{a}^p$ aus L sein, was aber nicht der Fall sein kann:

Ist y ungerade, so ist w_0 nicht in L, da alle Wörter in L eine gerade Anzahl von Symbolen haben. Ist y hingegen gerade, so ist jedenfalls $y \geq 2$. Damit sind nun aber beide Symbole $\underline{b}$ in der ersten Worthälfte, und dementsprechend mehr Symbole $\underline{a}$ in der zweiten Worthälfte als in der ersten. (Es gilt also nicht mehr $|u|_{\underline{a}} \geq |v|_{\underline{a}}$.)

Wir haben einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.

c) Beweis indirekt. Angenommen, L ist regulär. Sei dann m die Konstante aus dem Pumping Lemma und das gewählte Wort z.B.

$$\underline{1}^m \underline{\#} \underline{0} \underline{1}^{m-1}.$$

Dann gilt $w \in L$ und $|w| = 2m + 1 > m$.

Wir teilen nun w in xyz so auf, dass $|xy| \leq m$ und $|y| > 0$. Nachdem $|xy| \leq m$ und $w = \underline{1}^m \underline{\#} \underline{0}^m \underline{1}$, kann xy nur aus Symbolen $\underline{1}$ bestehen.

Nach dem Pumping Lemma muss aber $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$ gelten.

Wenn wir nun z.B. $i = 2$ wählen, müsste auch $\underline{1}^{m+|y|} \underline{\#} \underline{0} \underline{1}^{m-1}$ aus L sein, was aber nicht der Fall ist! Wir haben also einen Widerspruch gefunden, L kann somit keine reguläre Sprache sein.