Panholzer Prüfung Analysis – 4.7.2014

(1) [8 Punkte] Gegeben ist die Potenzreihe

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n^2+1)\, 2^{2n}}.$$

Man zeige unter Verwendung geeigneter Konvergenzkriterien, dass die Reihe $F(x)$ für alle reellen x mit $|x| < 4$ konvergiert und für alle $|x| > 4$ divergiert. Man untersuche weiters das Konvergenzverhalten von $F(x)$ für $x = 4$ und $x = -4$.

(2) [8 Punkte] Bestimmen Sie alle lokalen Extrema, deren Typ sowie alle Sattelpunkte der reellen Funktion

$$f(x, y) = 3x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 12y^2 + 1.$$

(3) [8 Punkte] Man berechne das Bereichsintegral

$$\iint_B (x+1)y\, dxdy,$$

wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Dreiecksbereich sei, welcher durch die Eckpunkte $(1,0)$, $(-1,0)$ und $(0,1)$ gebildet wird.

(4) [8 Punkte]

(a) Definieren Sie den Begriff **Häufungspunkt einer Folge** $(a_n)_{n\geq 0}$.

(b) Definieren Sie den Begriff **Grenzwert einer Folge** $(a_n)_{n\geq 0}$.

(c) Formulieren Sie den **Hauptsatz über monotone Folgen**. (Wie hängen monotone Folgen mit konvergenten Folgen zusammen.)

(d) Geben Sie eine Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ an, welche folgendes asymptotische Verhalten zeigt:

$$c_n = o\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big), \quad \text{aber} \quad \frac{1}{n} = o(c_n).$$

[redacted] (5) [8 Punkte] Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen zum Thema "Differential- und Integralrechnung in einer Variablen" (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein; für jede vollständig richtige Antwort gibt es einen Punkt; es werden für falsche Antworten KEINE Punkte abgezogen):

Für welche der unten angegebenen reellen Funktionen $f(x)$ existiert das bestimmte Integral $\int_0^{10} f(x)dx$? (Der Ganzteil $\lfloor x \rfloor$ von x: $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$) [redacted]

[redacted] $f(x) = \lfloor x \rfloor$ [redacted] $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{N}, \\ 1, & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$ [redacted] $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Wenn eine Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ monoton ist, ist sie dann in diesem Intervall auf jeden Fall integrierbar?

[redacted] ja [redacted] nein

Wenn eine Funktion f auf $[a, b]$ nicht stetig ist, ist es dann möglich, daß $f(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar ist?

[redacted] ja [redacted] nein

Welche der folgenden Funktionen ist/sind differenzierbar an der Stelle 0? ($|x|$: Betrag von x) [redacted]

[redacted] $|x|^2$ [redacted] $|x|$ [redacted] $x \cdot |x|$

Wenn eine Funktion $f(x)$ auf $[a, b]$ differenzierbar ist, was gilt dann für $f(x)$ auf jeden Fall noch [redacted]

[redacted] $f(x)$ auf $[a, b]$ monoton [redacted] $f(x)$ auf $[a, b]$ integrierbar [redacted] $f(x)$ auf $[a, b]$ stetig

Im folgenden betrachten wir immer die Funktion $g(x) = xe^{-x}$.
Um die folgenden Fragen zu beantworten, können Sie natürlich Nebenrechnungen machen, gewertet wird aber nur, was hier angekreuzt wurde!

Wo besitzt $g(x)$ lokale Extremwerte?

[redacted] $-e$ [redacted] -2 [redacted] -1 [redacted] 0 [redacted] 1 [redacted] 2 [redacted] e [redacted] keine Extrema [redacted]

Wo besitzt $g(x)$ Wendepunkte?

[redacted] $-e$ [redacted] -2 [redacted] -1 [redacted] 0 [redacted] 1 [redacted] 2 [redacted] e [redacted] keine Wendepu[redacted]

Was ist der Wert des bestimmten Integrals $\int_0^{\infty} g(x)dx$?

[redacted] $-e$ [redacted] -2 [redacted] -1 [redacted] 0 [redacted] 1 [redacted] 2 [redacted] [redacted] $-\infty$ [redacted] $+\infty$ [redacted]