# 4.0 VU Theoretische Informatik und Logik

**Teil 1 + 2 WS 2021 28. Jänner 2022**

Sie haben 90 Minuten zur Bearbeitung der Aufgaben beider Angabenteile.
(Teil1: Aufgaben 1-4, Teil2: Aufgaben 5-8) Viel Erfolg!

**1.)** Sei $L = \{\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{b}}^k \mid k, n \geq 0, n - k = 2022\}$.

**a)** Beweisen Sie mit Hilfe des Pumping Lemmas für reguläre Sprachen, dass $L$ nicht regulär ist. **(6 Punkte)**

**b)** Ist das Komplement von $L$ entscheidbar? Begründen Sie Ihre Antwort. **(2 Punkte)**

**2.)** Sei $L_1 = \{\underline{\mathtt{a}}^n \underline{\mathtt{b}}^{2n} \underline{\mathtt{c}}^{3k} \mid n, k \geq 0\}$ und $L_2 = \{\underline{\mathtt{a}}^{2n} \underline{\mathtt{b}}^k \underline{\mathtt{c}}^{7i} \mid n, k, i \geq 0\}$.

**a)** Geben Sie $L = L_1 \cap L_2$ an. **(2 Punkte)**

**b)** Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die $L = L_1 \cap L_2$ erzeugt. **(2 Punkte)**

**c)** Geben Sie eine entsprechende Zahl $n$ und eine reguläre Menge $R$ sowie einen entsprechenden Homomorphismus $h$ so an, dass gilt: $L = h(D_n \cap R)$.
($D_n$ bezeichnet eine Dyck-Sprache über $n$ verschiedenen Klammerpaaren.)
**(4 Punkte)**

**3.)**

**a)** Argumentieren Sie mit Hilfe des Satzes von Rice, dass folgendes Problem nicht entscheidbar ist:

> Gilt für die von einer Turingmaschine akzeptierte Sprache $L \subseteq \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$, dass $L \cap \{\underline{1}\}^*$ regulär ist ?

Geben Sie dabei insbesondere eine konkrete Sprache $L_1$ an, die die entsprechende Eigenschaft hat, sowie eine konkrete Sprache $L_2$, die die entsprechende Eigenschaft nicht hat.

**(5 Punkte)**

**b)** Geben Sie für die unter a) gefundenen Sprachen $L_1$ und $L_2$ jeweils an, ob diese regulär, kontextfrei, kontextsensitiv, entscheidbar und/oder rekursiv aufzählbar sind.
(Es reicht z.B., *sämtliche* Markierungen in einer der untenstehenden ähnlichen Tabelle vorzunehmen.)

| | regulär | kontextfrei | kontextsensitiv | rekursiv | rekursiv aufzählbar |
|---|---|---|---|---|---|
| $L_1$ | | | | | |
| $L_2$ | | | | | |

**(3 Punkte)**

**4.)** Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung, einen Punkt bei leicht fehlerhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte bzw. fehlende Begründungen.)

- Für jede formale Sprache $L$ über $\Sigma$ gilt: $L \cup \Sigma^* \in \mathbf{NP}$.
- Aus $A \leq_p SAT$ und $SAT \leq_p A$ folgt, dass $A$ **NP**-vollständig ist. ($SAT$ bezeichnet das Satisfiability Problem.)
- Wenn $\mathbf{NP} \neq \mathbf{co\text{-}NP}$ dann gilt: $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$.

**(6 Punkte)**

**5.)** Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln.
Wählen Sie dabei zunächst eine geeignete Signatur – gemeinsam für beide Sätze – und geben Sie die Kategorie und die intendierte Bedeutung aller Symbole vollständig an.

(1) Die Mutter von Adas Vater hat genau eine Schwester, aber Adas Vater kennt diese nicht.
(*The mother of Ada's father has exactly one sister, but Ada's father doesn't know her.*)

(2) Ada kennt keinen Bruder und keine Schwester ihrer Mutter.
(*Ada doesn't know any brothers or sisters of her mother.*)

**(7 Punkte)**

**6.)** Geben Sie ein Modell und ein Gegenbeispiel zu folgender Formel an:
$\forall x[(Q(x,y) \supset \forall z P(c, f(z))) \vee (R(z,c) \supset \forall y Q(x,y))]$
Beachten Sie dabei die in der Vorlesung eingeführten Schreibkonventionen. Spezifieren Sie beide Interpretationen vollständig und begründen Sie die Richtigkeit Ihrer Lösung informell. Geben Sie auch an welche Variablen frei und welche gebunden vorkommen. **(7 Punkte)**

**7.)** Zeigen Sie mit dem Tableau-Kalkül:
Aus der Annahme $\forall x\, g(x) = x$, folgt logisch $\exists x[Q(g(x), x) \supset \forall y Q(y,y)]$.
Kennzeichnen Sie alle $\gamma$- und $\delta$-Formeln als solche und nummerieren Sie alle auftretenden Formeln. **(8 Punkte)**

**8.)** Beurteilen Sie die Richtigkeit folgender Aussagen und begründen Sie Ihre Antworten.
(Punkte gibt es nur für hinreichend begründete und korrekte Antworten.)
*Hinweis:* Sie müssen nicht auf den Hoare-Kalkül verweisen, aber in jedem Fall möglichst genau und vollständig für die Richtigkeit Ihrer Antwort argumentieren.

- Das Programm $\{\, x > 1 \,\}$ `while` $y < 2x$ `do` $y \leftarrow 2y + x$ $\{\, y \geq x \,\}$ ist bezüglich der angegebenen Spezifikation über dem Datentyp $\mathbb{Z}$ partiell, aber nicht total korrekt.
- Folgende Aussage gilt für alle $P$, $Q$ und $\alpha$ bezüglich partieller, aber nicht bezüglich totaler Korrektheit: $\{\, \neg(P \supset Q) \,\}$ `while` $\neg Q$ `do` $\alpha$ $\{\, Q \wedge P \,\}$.

**(8 Punkte)**