54. Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & = & -9 \\ 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 8 \end{array}$$

unter Anwendung des Gesamtschrittverfahrens von Jacobi, wobei man zunächst die einzelnen Gleichungen derart umordne, dass das entstehende System das Zeilensummenkriterium erfüllt.

Das Zeilensummenkriterium besagt ja: $\sum_{j\neq i}|a_{ij}| < |a_{ii}| \quad \forall i$, also überprüfen wir es

$$\begin{array}{rrrcrl} -x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 3 & \quad i=1 \quad 5+2<1 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & = & -9 \Rightarrow & i=2 \quad 1+4<1 \\ 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 8 & \quad i=3 \quad 4+1<2 \end{array}$$

also wird das Zeilensummenkriterium nicht erfüllt, wir müssen schauen, dass in der Hauptdiagonale große Zahlen stehen. Also reihen wir das ganze System um, indem wir die Zeilen so verändernd: Zeile 3, Zeile 1, Zeile 2

$$\begin{array}{rrrcrl} 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 8 & \quad i=1 \quad 1+2<4 \\ -x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 3 \Rightarrow & i=2 \quad 1+2<5 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & = & -9 & \quad i=3 \quad 1+1<9 \end{array}$$

jetzt stimmt das Zeilensummenkriterium und wir können mit dem Gesamtschrittverfahren von Jacobi beginnen, welches lautet:

$$x_{k+1}^{[i]} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(-\sum_{i\neq j} a_{ij} x_k^{[j]} + b_i \right) \text{ für } i=1,\ldots,n \text{ und } k=0,1,2,\ldots$$

so ergibt sich z. B für $k=0$:

$$i=1:\ x_{k+1}^{[1]} = \frac{1}{a_{11}} \cdot \left(-\sum_{1\neq j} a_{1j} x_k^{[j]} + b_1 \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(-\underbrace{\left((-1)\cdot 0 + 2\cdot 0\right)}_{\sum_{1\neq j} a_{1j} x_k^{[j]}} + 8 \right) = \frac{1}{4} \cdot (8) = 2$$

$$i=2:\ x_{k+1}^{[2]} = \frac{1}{a_{22}} \cdot \left(-\sum_{2\neq j} a_{2j} x_k^{[j]} + b_2 \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(-\left((-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 0\right) + 3 \right) = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$i=3:\ x_{k+1}^{[3]} = \frac{1}{a_{33}} \cdot \left(-\sum_{3\neq j} a_{3j} x_k^{[j]} + b_3 \right) = \frac{1}{-4} \cdot \left(-(1\cdot 0 + 1\cdot 0) - 9 \right) = +\frac{9}{4} = 2{,}25$$

für $k=1$:

$$i=1:\ x_{k+1}^{[1]} = \frac{1}{a_{11}} \cdot \left(-\sum_{1\neq j} a_{1j} x_k^{[j]} + b_1 \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(-\left((-1)\cdot 0{,}6 + 2\cdot 2{,}25\right) + 8 \right) = \frac{1}{4} \cdot 4{,}1 = 1{,}025$$

$$i=2:\ x_{k+1}^{[2]} = \frac{1}{a_{22}} \cdot \left(-\sum_{2\neq j} a_{2j} x_k^{[j]} + b_2 \right) = \frac{1}{5} \cdot \left(-\left((-1)\cdot 2 + (-2)\cdot 2{,}25\right) + 3 \right) = \frac{1}{5} \cdot 9{,}5 = 1{,}9$$

$$i=3:\ x_{k+1}^{[3]} = \frac{1}{a_{33}} \cdot \left(-\sum_{3\neq j} a_{3j} x_k^{[j]} + b_3 \right) = \frac{1}{-4} \cdot \left(-(1\cdot 2 + 1\cdot 0{,}6) - 9 \right) = \frac{1}{-4} \cdot (-11{,}6) = 2{,}9$$

Hier sind die restlichen Werte für die einzelnen Variablen und Iterationen:

x_1	x_2	x_3	b
4	-1	2	8
-1	5	-2	3
1	1	-4	-9

Iterationen	x_1	x_2	x_3
x_0	0,00000000	0,00000000	0,00000000
x_1	2,00000000	0,60000000	2,25000000
x_2	1,02500000	1,90000000	2,90000000
x_3	1,02500000	1,96500000	2,98125000
x_4	1,00062500	1,99750000	2,99750000
x_5	1,00062500	1,99912500	2,99953125
x_6	1,00001563	1,99993750	2,99993750
x_7	1,00001563	1,99997813	2,99998828
x_8	1,00000039	1,99999844	2,99999844
x_9	1,00000039	1,99999945	2,99999971
x_{10}	1,00000001	1,99999996	2,99999996