Übung 2

Aufgabe 1

Die Poissonverteilung $P(\lambda)$ hat die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$p(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \ (x \geq 0)$$

Zeigen Sie, dass dies als Grenzwert der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung mit

$$p = \frac{\lambda}{n}, n \to \infty$$

erhalten werden kann.

Binomialverteilung

Münzbeispiel: Bezeichnen wir die Wahrscheinlichkeit von **Kopf mit p**, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit von **Zahl mit $1 - p$**.
Ist X die Anzahl der Kopfwürfe bei n Würfen, so tritt das Ereignis $X = k$ genau dann auf, wenn in einer Wurfsequenz (… K … Z … Z …) genau k-mal K auftritt und daher auch (n-k) mal Z. Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Sequenz ist

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

Dabei kann die Reihenfolge egal sein. Wir müssen also noch wissen, wie viele Möglichkeiten es gibt, aus n Würfen, k auszuwählen:

$$\binom{n}{k}$$

Damit haben wir die Binomialverteilung definiert:

$$B_n(p): \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad für\ k = 0,1,2, \dots, n$$

Poissonverteilung

Eine Zufallsvariable mit der Verteilung

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda}$$

heißt Poisson-verteilt mit dem Parameter λ. Ist $X \sim PV(\lambda)$, dann ist:

$$E(X) = Var(X) = \lambda$$

Betrachten wir also unsere Binomialverteilung und ersetzen p mit $\frac{\lambda}{n}$. Dabei spalte ich die Verteilung in vier Faktoren auf.

$$B_n(p) = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k (1-p)^{n-k} = \left[\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right] [\lambda^k][(1-p)^n][(1-p)^{-k}]$$

Der erste Faktor konvergiert gegen $\frac{1}{k!}$, denn:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} * \left(\frac{n}{n} * \frac{n-1}{n} * \dots * \frac{n-k+1}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right] = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-j}{n}\right) = \frac{1}{k!} * 1$$

Der zweite Faktor λ^k können wir so belassen.

Für den dritten Faktor müssen wir die Definition der Exponentialfunktion ansehen:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Auf unser Beispiel angewandt:

$$\lim_{n\to\infty}(1-p)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

Der letzte Faktor konvergiert gegen 1, denn:

$$p = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$$

Somit erhalten wir schließlich als Grenzwert:

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Aufgabe 2

Es sei

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x < 0} \\ \boldsymbol{\frac{x^2}{4}}, & \boldsymbol{0 \leq x < 1} \\ \boldsymbol{\frac{x}{2}}, & \boldsymbol{1 \leq x < 2} \\ \boldsymbol{1}, & \boldsymbol{x \geq 2} \end{cases}$$

Definition der Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Verteilungsfunktion $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ der Zufallsvariablen X definiert durch:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

---

a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.

Damit F eine Verteilungsfunktion ist, müssen folgende Eigenschaften gegeben sein:

1) $0 \leq F(x) \leq 1 \quad \forall x$

Gilt direkt aus der Definition.

2) F ist monoton steigend

…Graphik

3) F ist rechtsseitig

Durch die strikte Ungleichung $x < 1$ und $x < 2$ wird bei Sprungstellen der rechtsseitige Wert verwendet.

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Laut Definition.

5) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

Laut Definition.

b) X sei nach F verteilt. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(\boldsymbol{X < 1}), \mathbb{P}(\boldsymbol{X \leq 1}), \mathbb{P}(\boldsymbol{X = 0}), \mathbb{P}(\boldsymbol{X = 1}), \mathbb{P}(\boldsymbol{X = 2})$.

$$\mathbb{P}(X < 1) = F_x(1) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(X \leq 1) = F_x(1) = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X = 0) = 0$$
$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \ (diskrete\ Werte!)$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = 0$$

Die letzten drei Werte ergeben sich aus folgender Überlegung:

Ein spezieller Wert wie 1 muss man sich als 1,00000000… vorstellen. Bei nicht abzählbar vielen reellen Zahlen, besitzt jede Zahl eine verschwindend geringe Häufigkeit. Die statistische Wahrscheinlichkeit ist 0.

Aufgabe 3

X und Y seien unabhängig poissonverteilt mit Parameter λ und μ. Bestimmen Sie die Verteilung von $X+Y$.

Definition der Unabhängigkeit

X und Y heißen unabhängig, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ die Ereignisse $X \le x$ und $Y \le y$ unabhängig sind. Das heißt, es muss gelten

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P(X = x_i) * P(Y = y_i)$$

Die Formel für die Poissonverteilung lautet:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Wir haben also die zwei Formeln:

$$p_\lambda(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$
$$p_\mu(Y = y) = \frac{\mu^y e^{-\mu}}{y!}$$

Sind zwei Zufallsvariablen unabhängig, können diese getrennt multipliziert werden:

$$P\left(X = x_i, Y = y_j\right) = P(X = x_i) * P(Y = y_i)$$

Wir führen jedoch noch eine neue Zufallsvariable ein:

$$Z = X + Y \Rightarrow Y = Z - X$$

Und betrachten zusätzlich den Sonderfall:

$$p_\lambda(x) = p_\mu(x) = 0 \quad \forall x < 0$$

$$P(Z = z) = \sum_{x=0}^{z} p(x) * q(z - x) = \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} * \frac{\mu^{z-x} e^{-\mu}}{(z - x)!} = e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{x=0}^{z} \frac{\lambda^x}{x!} * \frac{\mu^{z-x}}{(z - x)!} * \frac{z!}{z!}$$

Wir wenden nun den Binomischen Lehrsatz an:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$P(Z = z) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} \sum_{x=0}^{z} \frac{z!}{x!\,(z - x)!} * \lambda^x \mu^{y-x} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{z!} (\lambda + \mu)^z$$

Aufgabe 4

X und Y seien unabhängig gleichverteilt auf [0,1]. Bestimmen Sie die Verteilung von X + Y.

Die stetige Gleichverteilung im Intervall [a, b] lautet:

$$U(a,b) = \frac{1}{b-a} \qquad a \leq x \leq b$$

Die zwei Gleichverteilungen können beschrieben werden mit:

$$U_x(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$$U_y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Laut Skriptum: Wenn die gemeinsame Verteilung diskret bzw. stetig ist, kann man in dieser Definition die Verteilungsfunktion durch die Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion ersetzen.

$$f_x(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & sonst \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1] \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Satz 2.6: X und Y seien unabhängig mit Dichte f_X und f_Y. Dann ist Dichte von X + Y die Faltung von f_X und f_Y.

$$z = x + y \Rightarrow y = z - x \Rightarrow z \in [0,2]$$

$$f_{X+Y}(z) = f_X \star f_Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

Wir betrachten dabei nur Werte von 0 bis 1, da ansonsten $f_x(x) = 0 \quad \forall x \notin [0,1]$ gilt. Wenn wir jedoch nur Werte aus diesem Intervall nehmen, ergibt $f_x(x)$ immer 1.

$$f_{X+Y}(z) = \int_0^1 f_Y(z-x)\,dx$$

Wir haben $y = z - x$ definiert. Da $y \in [0,1]$ gilt, folgt automatisch $(z-x) \in [0,1]$. Wenn wir das Integral lösen wollen, müssen wir zwischen zwei Fällen unterscheiden:

Fall 1: $z \in [0,1]$

$$z - x \geq 0 \Rightarrow z \geq x$$

Da z größer gleich x sein muss, integrieren wir in diesem Fall nur von 0 bis z.

$$f_{(X+Y)_1}(z) = \int_0^z 1\,dx = z$$

Fall 2: $z \in [1,2]$

$$z - x \leq 1 \Rightarrow z - 1 \leq x$$

$z - 1$ muss kleiner gleich x sein, wir setzen die Integrationsgrenzen von $z - 1$ bis 1.

$$f_{(X+Y)_2}(z) = \int_{z-1}^1 1\,dx = 1 - (z-1) = 2 - z$$

Die Dichtefunktion für $X + Y$ lautet:

$$f_{X+Y}(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - z, & 1 \leq z < 2 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Aufgabe 5

X sei gleichverteilt auf [0, 1]. Bestimmen Sie die Verteilung von $-\boldsymbol{log}\ \boldsymbol{X}$.

Laut Skriptum: Wenn die gemeinsame Verteilung diskret bzw. stetig ist, kann man in dieser Definition die Verteilungsfunktion durch die Wahrscheinlichkeits- bzw. Dichtefunktion ersetzen.

Satz 2.5 Transformationssatz für Dichten:

X sei stetig verteilt mit der Dichte f_X und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar und eindeutig umkehrbar. $Y = g(X)$ ist dann ebenfalls stetig verteilt mit der Dichte

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\big(g^{-1}(y)\big)\left|\frac{\delta g^{-1}}{\delta y}(y)\right| = f_X\big(g^{-1}(y)\big)\frac{1}{\left|\frac{\delta g}{\delta x}\big(g^{-1}(y)\big)\right|}, & wenn\ y \in g(\mathbb{R}^n) \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Dabei ist

$$\frac{\delta g}{\delta x} = \det\left(\left(\frac{\delta g_i}{\delta x_j}\right)_{n\times n}\right)$$

die Funktionaldeterminante.

$$Y = g(X) = -\log X \ \ (= -\ln X)$$
$$-Y = \ln X$$
$$\Rightarrow X = e^{-Y} = g^{-1}(Y)$$
$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(-\ln X \le y) = \mathbb{P}(X \ge e^{-Y}) = e^{-Y}$$

Nun wenden wir den Transformationssatz für Dichten an:

$$f_Y(y) = f_X\big(g^{-1}(y)\big)\frac{1}{\left|\frac{\delta g}{\delta x}\big(g^{-1}(y)\big)\right|} = f_X\big(g^{-1}(y)\big)\frac{1}{\left|\frac{\delta g}{\delta x}(e^{-Y})\right|} = f_X\big(g^{-1}(y)\big)\left|\frac{-1}{\frac{1}{X}}\right| = f_X\big(g^{-1}(y)\big)|-e^{-Y}|$$
$$= f_X\big(g^{-1}(y)\big)e^{-Y}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-Y}, & 0 \le g^{-1}(y) \le 1 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Aufgabe 6

X und Y haben eine gemeinsame Verteilung mit der Dichte

$$\boldsymbol{f(x,y)=\begin{cases} c(x+y), & f\text{ür } 0\le x,y\le 1 \\ 0, & sonst \end{cases}}$$

Bestimmen Sie c und die Randdichten von X und Y.

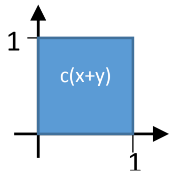
Randdichten

Die Randichtefunktionen von X und Y sind definiert durch

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$$

Wir beschränken uns auf folgenden Bereich



Gesucht ist die Variable c

Die gemeinsame Dichtefunktion $f_{XY}(x,y)$ zweier Zufallsvariablen X, Y besitzt folgende Eigenschaften:

$$f_{XY}(x,y)\ge 0 \quad \forall x,y$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy=1$$

$$\mathbb{P}(\{a\le X\le b, c\le Y\le d\})=\int_a^b\int_c^d f_{XY}(x,y)\,dy\,dy$$

$\forall Paare\ (a,b)\ und\ (c,d)\ c\le d\ und\ a\le b$

Somit berechnen wir c:

$$\int_0^1\int_0^1 c(x+y)\,dx\,dy=1$$

$$1=c\int_0^1\int_0^1 x+y\,dx\,dy=c\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)|_0^1 dy=c\int_0^1\left(\frac{1}{2}+y\right)dy=c\left(\frac{y}{2}+\frac{y^2}{2}\right)|_0^1=c\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=c$$

Die Randdichten ergeben sich durch Einsetzen und Integrieren:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy=c*\int_0^1(x+y)\,dy=c*\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)|_0^1=c\left(x+\frac{1}{2}\right)=x+\frac{1}{2}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx=c*\int_0^1(x+y)\,dx=c*\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)|_0^1=c\left(\frac{1}{2}+y\right)=y+\frac{1}{2}$$

Aufgabe 7

Ein Würfel wird dreimal geworfen. X sei die größte der drei Augenzahlen, Y die kleinste. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y und die beiden Randverteilungen.

Wenn wir dreimal Würfeln, entstehen die drei Zufallsvariablen X, Y und Z:

$$Y \leq Z \leq X$$

Die Beziehung zwischen den Zufallsvariablen kann in vier Fälle unterteilt werden:

1. Fall: $Y = Z = X$ 1 Permutation

2. Fall: $Y = Z < X$ $\binom{3}{2} = 3$ Permutationen

3. Fall: $Y < Z = X$ $\binom{3}{2} = 3$ Permutationen

4. Fall: $Y < Z < X$ $3! = 6$ Permutationen

Bestimmen wir nun die Wahrscheinlichkeit für X:

X	**Fall 1**	**Fall 2**	**Fall 3**	**Fall 4**	**Summe**
1	1	0	0	0	**1**
2	1	1	1	0	**7**
3	1	2	2	1	**19**
4	1	3	3	3	**37**
5	1	4	4	$3+2+1=6$	**61**
6	1	5	5	$4+3+2+1=10$	**91**
Gesamt					**216**

Somit erhalten wir die Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}(x) = \begin{cases} \frac{1}{216}, & x = 1 \\ \frac{7}{216}, & x = 2 \\ \frac{19}{216}, & x = 3 \\ \frac{37}{216}, & x = 4 \\ \frac{61}{216}, & x = 5 \\ \frac{91}{216}, & x = 6 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{P}(y) = 1 - \mathbb{P}(x) == \begin{cases} \frac{91}{216}, & y = 1 \\ \frac{61}{216}, & y = 2 \\ \frac{37}{216}, & y = 3 \\ \frac{19}{216}, & y = 4 \\ \frac{7}{216}, & y = 5 \\ \frac{1}{216}, & y = 6 \end{cases}$$

Für die Randverteilung verwenden wir die Treppenfunktion:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{216}, & x < 2 \\ \frac{8}{216}, & x < 3 \\ \frac{27}{216}, & x < 4 \\ \frac{64}{216}, & x < 5 \\ \frac{125}{216}, & x < 6 \\ \frac{216}{216}, & x \geq 7 \end{cases} \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ \frac{91}{216}, & y < 2 \\ \frac{152}{216}, & y < 3 \\ \frac{189}{216}, & y < 4 \\ \frac{208}{216}, & y < 5 \\ \frac{215}{216}, & y < 6 \\ \frac{216}{216}, & y \geq 7 \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeitstafel bzw. Kontingenztafel hat folgende Form:

x\y	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Σ**
1	$\frac{1}{216}$	0	0	0	0	0	$\mathbf{\frac{1}{216}}$
2	$\frac{6}{216}$	$\frac{1}{216}$	0	0	0	0	$\mathbf{\frac{7}{216}}$
3	$\frac{12}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{1}{216}$	0	0	0	$\mathbf{\frac{19}{216}}$
4	$\frac{18}{216}$	$\frac{12}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{1}{216}$	0	0	$\mathbf{\frac{37}{216}}$
5	$\frac{24}{216}$	$\frac{18}{216}$	$\frac{12}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{1}{216}$	0	$\mathbf{\frac{61}{216}}$
6	$\frac{30}{216}$	$\frac{24}{216}$	$\frac{18}{216}$	$\frac{12}{216}$	$\frac{6}{216}$	$\frac{1}{216}$	$\mathbf{\frac{91}{216}}$
Σ	$\mathbf{\frac{91}{216}}$	$\mathbf{\frac{61}{216}}$	$\mathbf{\frac{37}{216}}$	$\mathbf{\frac{19}{216}}$	$\mathbf{\frac{7}{216}}$	$\mathbf{\frac{1}{216}}$	

Erklärung für das grau hinterlegte Feld:

$$X = 5; Y = 3$$

Die Reihenfolge lautet:

$$Y \leq Z \leq X$$

$$335 \Rightarrow \binom{3}{2} = 3\ Möglichkeiten$$
$$345 \Rightarrow 3! = 6\ Möglichkeiten$$
$$355 \Rightarrow \binom{3}{2} = 3\ Möglichkeiten$$

Ergibt insgesamt 12 Möglichkeiten.

Die Verteilungsfunktion als Tabelle abgebildet, ergibt:

y	0	$\frac{1}{216}$	$\frac{8}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{64}{216}$	$\frac{125}{216}$	$\frac{216}{216}$
6	0	$\frac{1}{216}$	$\frac{8}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{64}{216}$	$\frac{125}{216}$	$\frac{215}{216}$
5	0	$\frac{1}{216}$	$\frac{8}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{64}{216}$	$\frac{124}{216}$	$\frac{208}{216}$
4	0	$\frac{1}{216}$	$\frac{8}{216}$	$\frac{27}{216}$	$\frac{63}{216}$	$\frac{117}{216}$	$\frac{189}{216}$
3	0	$\frac{1}{216}$	$\frac{8}{216}$	$\frac{26}{216}$	$\frac{56}{216}$	$\frac{98}{216}$	$\frac{152}{216}$
2	0	$\frac{1}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{91}{216}$
1	0	0	0	0	0	0	0
0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**x**

Erklärung für das grau hinterlegte Feld:

$$X < 4, Y < 3$$

Es wird die Summe über die fett umrandeten Felder in der Wahrscheinlichkeitstafel gebildet.

$$X = \{1,2,3\}; Y = \{1,2\}$$