

Beispiel 451 (MA1 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 4, 03.04.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 04/2006

1 Angabe

Man berechne:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

2 Theoretische Grundlagen - partielle Integration

Wenn $u(x)$ und $v(x)$ in $[a; b]$ stetig differenzierbar sind, so gilt dort:

$$\int u(x) \cdot v'(x) \, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \, dx$$

3 Lösung des Beispiels

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \cos x \, dx \\ u' &= \cos x \Rightarrow u = \sin x; \quad v = \cos x \Rightarrow v' = -\sin x \\ \int_0^{\pi/2} (u' \cdot v) &= u \cdot v - \int_0^{\pi/2} (u \cdot v') = \sin x \cdot \cos x + \int_0^{\pi/2} (\sin x \cdot \sin x) \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos x + \int_0^{\pi/2} 1 \, dx - \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \\ &= \sin x \cdot \cos x + x - \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir das Ergebnis des partiellen Integrierens mit unserer Angabe gleich:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx &= \sin x \cdot \cos x + x - \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \\ \text{wir addieren das } \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x) \, dx \\ 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx &= \sin x \cdot \cos x + x \\ \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx &= \frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} \end{aligned}$$