Runde 9, Beispiel 57

LVA 118.181, Übungsrunde 9, 12.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 13.01.2007

1 Angabe

Seien $y, z \in \mathbb{C}^N$ und $c, d \in \mathbb{C}^N$ ihre Spektralwerte. Außerdem bezeichne $(x_k)_k$ die "N"-periodische Fortsetzung des Vektors $x \in \mathbb{C}^N$ sowie $\omega = e^{2\pi i/N}$. Zeigen Sie, daß die sogenannte periodische Faltung gilt:

$$y \cdot z := (\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} y_{\updownarrow} z_{k-\updownarrow})_k \overbrace{\longrightarrow}^{\text{DFT}} (c_k \cdot d_k)_k$$

2 Lösung des Beispiels

Gegeben seien die periodischen Folgen $\tilde{x}_1[n]$ und $\tilde{x}_2[n]$ mit der Periodendauen N. Ihre diskreten Fouriertransformierten (DFT) sind gegeben durch:

$$\tilde{X}_1(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] W_N^{mk}$$

$$\tilde{X}_2(k) = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}_2[r] W_N^{rk}$$

Wir definieren eine neue Folge $\tilde{x}_3[n]$, die sich wie folgt bildet:

$$\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

$\tilde{x}_3[n]$ ergibt sich durch die IDFT

$$\tilde{x}_3[n] = IDFT\{\tilde{X}_3(k)\}$$

$$\tilde{x}_3[...... \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k) W_N^{-nk}$$

Durch Einsetzen der ersten beiden Gleichungen und Umordnen der Summen ergibt sich:

$$\tilde{x}_3[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}_2[r] \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-(n-m-r)k}$$

Der letzte Term läßt sich wie folgt auswerten:

$$\sum e^{j2\pi k(n-m-r)/N} = \begin{cases} N, & r = m - m + p \cdot N, \ p \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit p als ganzer Zahl vereinfacht sich Gleichung 8.20 zu:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_3[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \cdot \tilde{x}_2[n-m+p\cdot N] \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m] \cdot \tilde{x}_2[n-m]\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ergibt sich durch die Periodizität von $\tilde{x}_2[n]$. Bis auf die Summationsgrenzen, die hier nur über eine Periode laufen, ist er identisch mit der Faltungssumme. $\tilde{x}_3[n]$ ist selber auch periodisch. Gleichung 8.21 wird daher als periodische Faltung bezeichnet.

Runde 9, Beispiel 58

LVA 118.181, Übungsrunde 9, 12.01.2007

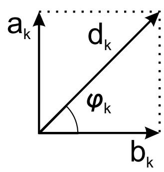
Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.01.2007

1 Angabe

Man berechne die Spektralkoeffzienten des N-periodischen diskreten Rechteckimpulses $(x_k)_k$ mit $> x_0 = x_{N-1} = 1$ und $x_j = 0$ für $j = 1, 2, ..., N-2$.

2 Theoretische Grundlagen: Spektraldarstellung der Fourier-Reihe

$$f(x) = s(x) = \frac{a_0}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cdot \sin(k \cdot x + \varphi_k)$$



mit der gemeinsamen Fourier-Amplitude

$$d_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} \ \forall\, b_k > 0$$

Die **komplexe Form der Fourier-Reihe** lautet:

$$f(x) = s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j \cdot k \cdot x}, \qquad T = 2 \cdot \pi$$

Mit dem **Spektrum** der Funktion $f(x)$ (komplexe Fourier-Koeffizienten bzw. **Spektralkoeffizienten** c_k)

$$c_k = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(x) \cdot e^{-j \cdot k \cdot x} \,\mathrm{d}\, x = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & \text{wenn } k = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (a_k - j \cdot b_k), & \text{wenn } k > 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (a_{-k} + j \cdot b_{-k}), & \text{wenn } k < 0 \end{cases}$$

Beziehungen:

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = k \cdot (c_k - c_{-k})$$

Zeitfunktion (Elektrotechnik): $x := \omega \cdot t$

- Bezugs- (Grund-) Kreisfrequenz: $\omega_0 = \frac{2\dot{\pi}}{T}$
- Kreisfrequenz: $\omega_k = k \cdot \omega_0$
- Periodemdauer: T
- (Linien-) Spektrum von $f(x)$: $2 \cdot \pi \cdot c_k$ bzw. $T \cdot c_k$
- Frequenzabstand zweier Spektrallinien: $\triangle\omega_0 = \frac{2\cdot\pi}{T}$

$$f(t) = s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\cdot k\cdot\omega_0\cdot t}$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot r^{-j\cdot k\cdot\omega_0\cdot t} \,\mathrm{d}\,t$$

3 Lösung des Beispiels

$$x_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^{-k\cdot j\cdot\frac{2\cdot\pi}{N}} \qquad \text{wegen}$$

$$c_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^0 = \frac{2}{N}$$

$$c_1 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^{-j} = \frac{1}{N} \cdot (1 + \omega^{-(N-1)})$$

$$c_2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^{-2\cdot j} = \frac{1}{N} \cdot (1 + \omega^{-2\cdot(N-1)})$$

$$\vdots$$

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^{-k\cdot j} = \frac{1}{N} \cdot (1 + \omega^{-k\cdot(N-1)})$$

Runde 9, Beispiel 59

LVA 118.181, Übungsrunde 9, 12.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.01.2007

1 Angabe

Man zeige, daß für die Fouriermatrix F_N, gegeben durch

$$F_N := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

mit $\omega = e^{2\pi i/N}$ gilt:

$$F_N \cdot \overline{F_N} = N \cdot E_N$$

Dabei bezeichnet $\overline{F_N}$ die konjugierte Matrix und E_N die $N \times N$-Einheitsmatrix.
Dabei bezeichnet $\overline{F_N}$ die konjugierte Matrix und E_N die N-te Einheitsmatrix.
Anmerkung: Das Element in der r-ten Zeile und s-ten Spalte der Matrix $F_N \cdot \overline{F_N}$ berechnet sich durch

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(r-1)} \cdot \omega^{-k(s-1)}$$

Man unterscheide zwischen $r = s$ und $r \neq s$.

2 Theoretische Grundlagen: Fourier-Matrix

Durch Bilden von Potenzen der Einheitswurzel

$$\omega_n = e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i}{n}}$$

erhält man die Fourier-Matrix.

3 Lösung des Beispiels

3.1 $r = s$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k\cdot(r-1)} \cdot \omega^{-k\cdot(r-1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k\cdot(r-1)-\cdot(r-1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^0 = N$$

3.2 $r \neq s$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k\cdot(r-1)} \cdot \omega^{-k\cdot(s-1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k\cdot(r-1)-\cdot(s-1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k\cdot r-k-k\cdot s+k} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k\cdot(r-s)}$$

Dabei gilt: $\omega^{r-s} := z$, wobei z eine von 1 verschiedene N-te Einheitswurzel ist ($z^N = 1$).

$$z^{N-1} + z^{N-2} + \cdots + z + 1 = \frac{z^N - 1}{z - 1} = 0$$

Beweis für $z^N = 1$ (Moivre-Formeln,n-ten Wurzeln in $\mathbb{C}$):

$z^N = \omega^{N\cdot(r-s)} = e^{\frac{2\cdot\pi\cdot i}{N}\cdot N\cdot(r-s)} = e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot(r-s)} = \cos(2\cdot\pi\cdot(r-s)) + i\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot(r-s)) = 1$

Runde 9, Beispiel 61

LVA 118.181, Übungsrunde 9, 12.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.01.2007

1 Angabe

Berechnen Sie die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2 Theoretische Grundlagen: Diskrete Fourier-Transformation.

Die **Fourier-Transformation** ist eine Integraltransformation, die einer Funktion eine andere Funktion (ihre Fouriertransformierte) zuordnet. Sie ist eng mit der Laplace-Transformation verbunden. In vielen Einsatzgebieten wird sie dazu verwendet, um für zeitliche Signale (z. B. ein Sprachsignal oder einen Spannungsverlauf) das Frequenzspektrum zu berechnen (vgl. Fourieranalyse).
Allgemein umfasst der Begriff Fourier-Transformation eine Reihe sehr ähnlicher Transformationen, welche Funktionen (auch endliche und unendliche Folgen sind Funktionen) in Frequenzkomponenten oder Elementarschwingungen zerlegen.
Die **Diskrete Fourier-Transformation** oder DFT ist die Fourier-Transformation eines zeitdiskreten endlichen oder periodischen Signals und somit ein Spezialfall der Z-Transformation mit Werten auf dem Einheitskreis für z. Die DFT ist das wichtigste Werkzeug in der Praxis der digitalen Signalverarbeitung, da es schnelle Algorithmen zum Durchführen der Transformation gibt. Am bekanntesten ist die FFT (Fast Fourier Transformation), die schnelle Fourier-Transformation.
Die diskrete Fourier-Transformierte $\hat{a} = (\hat{a}_0, ..., \hat{a}_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ eines komplexen Vektors $a = (a_0, ..., a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ hat die Koeffizienten

$$\hat{a}_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{jk}{N}} \cdot a_j, \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

Dabei nennt man die $\hat{a}_k$ auch Fourierkoeffizienten oder Fourierkomponenten.
Die inverse DFT (iDFT) a von $\hat{a} \in \mathbb{C}^N$ hat die Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{jk}{N}} \cdot \hat{a}_j, \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \dot{e}^{-i \cdot \omega \cdot t} \,\mathrm{d}\, t$$

3 Lösung des Beispiels

$$F(\omega) = \int_0^1 e^{-i\cdot\omega\cdot t} f(t)\,\mathrm{d}\,t = -\frac{1}{\omega\cdot i}\cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t}|_0^1 = 1\frac{1}{i\cdot\omega}$$

- Für $\omega \neq 0$ gilt:

$$F(\omega) = \frac{i}{\omega}\cdot(e^{-i\cdot\omega} - 1$$

- Für $\omega = 0$ gilt: $F(\omega) = 1$.

Runde 9, Beispiel 62

LVA 118.181, Übungsrunde 9, 12.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.01.2007

1 Angabe

Berechnen Sie die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2 Theoretische Grundlagen: Diskrete Fourier-Transformation.

Die **Fourier-Transformation** ist eine Integraltransformation, die einer Funktion eine andere Funktion (ihre Fouriertransformierte) zuordnet. Sie ist eng mit der Laplace-Transformation verbunden. In vielen Einsatzgebieten wird sie dazu verwendet, um für zeitliche Signale (z. B. ein Sprachsignal oder einen Spannungsverlauf) das Frequenzspektrum zu berechnen (vgl. Fourieranalyse).
Allgemein umfasst der Begriff Fourier-Transformation eine Reihe sehr ähnlicher Transformationen, welche Funktionen (auch endliche und unendliche Folgen sind Funktionen) in Frequenzkomponenten oder Elementarschwingungen zerlegen.
Die **Diskrete Fourier-Transformation** oder DFT ist die Fourier-Transformation eines zeitdiskreten endlichen oder periodischen Signals und somit ein Spezialfall der Z-Transformation mit Werten auf dem Einheitskreis für z. Die DFT ist das wichtigste Werkzeug in der Praxis der digitalen Signalverarbeitung, da es schnelle Algorithmen zum Durchführen der Transformation gibt. Am bekanntesten ist die FFT (Fast Fourier Transformation), die schnelle Fourier-Transformation.
Die diskrete Fourier-Transformierte $\hat{a} = (\hat{a}_0, ..., \hat{a}_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ eines komplexen Vektors $a = (a_0, ..., a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ hat die Koeffizienten

$$\hat{a}_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{jk}{N}} \cdot a_j, \qquad k = 0, \dots, N-1.$$

Dabei nennt man die $\hat{a}_k$ auch Fourierkoeffizienten oder Fourierkomponenten.
Die inverse DFT (iDFT) a von $\hat{a} \in \mathbb{C}^N$ hat die Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{jk}{N}} \cdot \hat{a}_j, \qquad k = 0, \dots, N-1.$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \dot{e}^{-i \cdot \omega \cdot t} \,\mathrm{d}\, t$$

3 Lösung des Beispiels

$$F(\omega) = \int_0^1 e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot t^2 \cdot f(t)\,\mathrm{d}\,t = \ldots \blacklozenge \cdots = \frac{1}{\omega^3} \cdot (e^{-i\cdot\omega} \cdot (i \cdot \omega^2 + 2 \cdot \omega - 2 \cdot i) + 2 \cdot i)$$

$\blacklozenge$ zweimal partiell integrieren

- Für $\omega \neq 0$:

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^3} \cdot (e^{-i\cdot\omega} \cdot (i \cdot \omega^2 + 2 \cdot \omega - 2 \cdot i) + 2 \cdot i)$$

- Für $\omega = 0$: $F(\omega) = \frac{1}{3}$.

Runde 9, Beispiel 60

LVA 118.181, Übungsrunde 9, 12.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 13.01.2007

1 Angabe

Man zeige unter Verwendung von Bsp. 59, dass zwischen den Funktionswerten $y_j, j = 0, \ldots, N-1$ und den Spektralkoeffzienten $c_k, k = 0, \ldots, N-1$ folgende Beziehung gilt, die sogenannte Parsevalsche-Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |y_i|^2$$

2 Lösung des Beispiels

y_k ist komplex und der Betrag liefert die Länge des Vektors $a+b \cdot i$ mit $\sqrt{a^2+b^2}$. $a-b \cdot i$ ist die kojugiert Komplexe von $a+b \cdot i$.

$$\frac{1}{N} \cdot \sum |y_k|^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum y_k \cdot \overline{y_k}^T$$

Einsetzen von $y = F_n \cdot c$:

$$\frac{1}{N} \cdot (F_n \cdot c) \cdot (\overline{F_n \cdot c})^T = \frac{1}{N} \cdot c \cdot \underbrace{F_n \cdot \overline{F_n}^T}_{N \cdot E_n} \cdot \overline{c}^T = c \cdot \overline{c}^T = |c|^2$$

Runde 9, Beispiel 63

LVA 118.181, Übungsrunde 9, 12.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 13.01.2007

1 Angabe

Zeigen Sie: Falls $f(t)$ eine gerade Funktion ist, dann kann de Fouriertransformierte $F(\omega)$ von $f(t)$ durch

$$F(\omega) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos(\omega t)\, dt$$

berechnet werden.

2 Lösung des Beispiels

Wir verwenden die Defintion des Cosinus:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}}{2}$$

$$F(\omega) \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}\,t + \int_0^\infty e^{-i\omega t} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \ldots = \int_0^\infty f(t) \cdot (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) dt =$$

$$\int_0^\infty f(t) \cdot (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})\,\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty f(t) \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})\,\mathrm{d}\,t = 2 \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot \cos(\omega t)\,\mathrm{d}\,t$$