Name: Matrikelnummer:

2. Übungstest Analysis für Informatik und Wirtschaftsinformatik

Gruppe 5 (Fischl)

Lorenz Fischl

1. Gegeben Sie die Funktion f:

$$f : \mathbb{R} \to W : x \mapsto xe^{-x^2}.$$

Bestimmen Sie

i) den Wertebereich W,

ii) 1. und 2. Ableitung der Funktion f,

iii) relative Extrema der Funktion f, und geben Sie an ob diese Minima oder Maxima sind.

(7 Punke)

ii) $f'(x) = e^{-x} - 2x^2 e^{-x^2} = (1-2x^2)\, e^{-x^2}$

$f''(x) = 4x\, e^{-x^2} - (1-2x^2)\, 2x e^{-x^2} = 2x\, e^{-x^2}(-3 + 2x^2)$

iii) $f'(x) = 0$ (da $e^{-x^2} > 0$) $\Leftrightarrow$ $(1-2x^2) = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$f''\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) = \underbrace{2\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) e^{-x^2}}_{\neq 0} \underbrace{\left(-3 + 2\left(\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^2\right)}_{\underbrace{-3+1}_{=-2} \neq 0} \Rightarrow$$

$f''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) < 0$ für max.

$f''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) > 0$ für min.

< 0 für $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ > 0 für $+\sqrt{\frac{1}{2}}$

i) da $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \text{"}\pm\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$

d'Hospital $\quad \to \pm\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$ ist $+\sqrt{\frac{1}{2}}$ glob max und

$-\sqrt{\frac{1}{2}}$ glob min.

$\Rightarrow W = \left[f\left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right), f\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)\right] = \left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}}, \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}(-1, 1)$

2. Gegeben sei die Funktion f:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}.$$

Bestimmen Sie

i) die ersten 3 Ableitungen der Funktion f,

ii) einen allgemeinen Ausdruck für die n-te Ableitung (zeigen Sie durch vollständiger Induktion, dass dieser stimmt),

iii) das Taylerpolynom n-ter Ordnung an der Entwicklungsstelle 1.

(6 Punkte)

Analog zur anderen Gruppe, nur VZ anders.

3. Gegeben ist die Funktion

$$f : D \to W : x \mapsto 2e^{-x} - 2$$

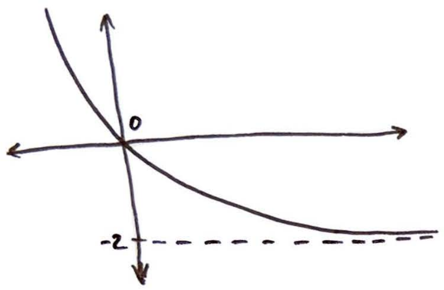
i) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen f.

ii) Bestimmen Sie Definitionsbereich D und Wertebereich W,

iii) Wie ist die Stammfunktion F von f definiert? Berechnen Sie diese.

iv) Überprüfen Sie per definition ob die Stammfunktion F tatsächlich die Stammfunktion von f ist.

(7 Punkte)

i) 

ii) $D = \mathbb{R}$

$W = (-2, \infty)$

iii) $F' = f$ $\quad F(x) = -2e^{-x} - 2x + c$

iv) $F'(x) = \frac{d}{dx}\left[-2e^{-x} - 2x + c\right] = -2e^{-x}(-1) - 2 = f(x)$