Analysis für Informatik & Wirtschaftsinformatik (WS 2021/22 - Pinsker)

Prüfung am 28.2.2022

Name: Matrikelnummer:

Nickname:

Prüfungsbogen: 101

Ihre Antworten - bitte 1 (=WAHR), 0 (=FALSCH), oder 2 (=WEISS NICHT) eintragen!

Aufgabe	Antwort A	Antwort B	Antwort C
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			

- Bitte wählen Sie einen beliebigen Nickname - die Ergebnisse werden als für alle einsehbare Liste unter den Nicknamen veröffentlicht.
- Es sind 15 Aufgaben zu lösen, und jede Aufgabe besteht aus drei Teilfragen (A,B,C), welche jeweils mit 1 (=WAHR), 0 (=FALSCH), oder 2 (=WEISS NICHT) zu beantworten sind.
- **WICHTIG:** 1 (=WAHR) bedeutet, daß die jeweilige Behauptung für ALLE $X, f, K, \ldots$ aus der gegebenen Annahme folgt. Das heißt, daß die Behauptung notwendig ist (und nicht nur möglich).
- Sie bekommen für eine Aufgabe 4 Punkte, wenn Sie **ALLE** drei Teilfragen der Aufgabe richtig beantworten.
- Wenn Sie mindestens eine Teilfrage einer Aufgabe falsch beantworten, so bekommen Sie 0 Punkte.
- In allen anderen Fällen (also Aufgabe entweder gar nicht oder korrekt, aber unvollständig gelöst) bekommen Sie 1 Punkt.

(1) Gegeben sei $f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$.

(A) f ist unbeschränkt.

(B) f lässt sich an der Stelle 0 stetig fortsetzen, d.h. so definieren, dass die erweiterte Funktion stetig ist.

(C) Der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to 0$ existiert.

(2) Sei $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch $x \mapsto x \cdot \ln x$.

(A) Die Fläche unter f über dem Intervall $[1, c]$ ist gleich $o(c^3)$ für $c \to \infty$.

(B) Die Fläche unter f über dem Intervall $[1, 2]$ ist gleich 0.

(C) $x \mapsto x^2 \ln x$ ist eine Stammfunktion von f.

(3) Sei $x \in \mathbb{R}$.

(A) Es existiert eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ von rationalen Zahlen, deren Grenzwert x ist.

(B) Es existiert eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ von ganzen Zahlen, deren Grenzwert x ist.

(C) Es existiert eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ von rationalen Zahlen mit $a_n = O(\frac{1}{2^n})$, deren zugehörige Reihe den Grenzwert x hat.

(4) Gegeben sei die Folge $a_n = (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n}$

(A) Die zugehörige Reihe ist konvergent.

(B) $a_n = O(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

(C) Die zugehörige Reihe ist absolut konvergent.

(5) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^+$ stetig, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Für jedes $c \in [a,b]$ sei $g(c)$ die Fläche unter f zwischen a und c.

(A) g ist differenzierbar und $g'(c) = f(c)$ für alle $c \in (a,b)$.

(B) Ist f elementar, so ist g elementar.

(C) g is stetig.

(6) Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $(x,y,z) \mapsto e^{x^2} \cdot e^{y^2} \cdot e^{z^2}$.

(A) Die Richtung des größten Anstiegs von f an der Stelle $(1,1,1)$ ist $(1,1,1)$.

(B) Jede Richtungsableitung von f an der Stelle $(0,0,0)$ existiert und ist endlich.

(C) f hat bei $(0,0,0)$ ein lokales Maximum.

(7) Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{(2x)^n}{n!}$, wobei $n \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$.

(A) Der Konvergenzradius der zugehörigen Reihe ist $\frac{1}{2}$.

(B) Für $x = \frac{1}{3}$ gilt $a_n = o(\frac{1}{2^n})$.

(C) Die zugehörigen Reihe konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{R}$.

(8) Gegeben sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto \ln(1 + \frac{1}{x})$.

(A) f ist auf $[1, \infty)$ monoton fallend.

(B) Die Reihe $\sum_{n \geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n})$ konvergiert eigentlich.

(C) Das Integral $\int_1^\infty f(x)\,dx$ ist eigentlich konvergent.

(9) Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{1}{n} + \cos(\frac{\pi}{7} \cdot n)$, wobei $n \geq 1$.

(A) a_n hat mehr als 7 Häufungspunkte.

(B) a_n ist monoton.

(C) a_n ist beschränkt.

(10) Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $(x,y) \mapsto x \cdot e^y$.

(A) f hat bei $(0,0)$ einen Sattelpunkt.

(B) f hat bei $(0,0)$ ein lokales Extremum.

(C) f ist partiell differenzierbar.

(11) Gegeben sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $x \mapsto \frac{x}{e^x}$.

(A) f ist stetig.

(B) f ist beschränkt.

(C) f hat unendlich viele lokale Maxima.

(12) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge rationaler Zahlen.

(A) Ist die Folge beschränkt, so konvergiert sie.

(B) Ist die Folge monoton und beschränkt, so konvergiert sie.

(C) Konvergiert die Folge, so ist sie beschränkt.

(13) Gegeben sei die Differentialgleichung $y'' - 4 \cdot y' + 3 \cdot y = 0$.

(A) Ist f eine nichtkonstante Lösung der Differentialgleichung, so ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(B) Ist f eine nichtkonstante Lösung der Differentialgleichung, so ist f unbeschränkt.

(C) Die Funktion $y = e^{3x}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung.

(14) Gegeben sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ falls $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) = 0$.

(A) $\lim_{t\to 0+} f(t,t) = \lim_{t\to 0+} f(2t,t)$.

(B) f ist an der Stelle $(0,0)$ stetig.

(C) Für die Funktion $t \mapsto f(t,t)$ stimmen links-und rechtsseitiger Grenzwert an der Stelle 0 überein.

(15) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar.

(A) Ist f auf einem Intervall um die Stelle 0 konkav, so ist $f''(0) \geq 0$.

(B) Hat f an der Stelle 0 ein lokales Extremum, so ist $f'(0) = 0$ und $f''(0) \neq 0$.

(C) Ist $f'(0) = 0$ und $f''(0) \neq 0$, so hat f an der Stelle 0 ein lokales Extremum.