Beispiel 55 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 7

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 06/2006

1 Angabe

Mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren berechne man die Extrema der Funktion $f(x, y) = x + y <$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

2 Theoretische Grundlagen: Lagrangesches Multiplikatorverfahren

Die Extremwerte einer Funktion $z = f(x, y)$, deren unabhängige Variablen x und y einer Nebenbedingung $\phi(x, y) = 0$ unterworfen sind, lassen sich mit Hilfe des Lagrangeschen Multiplikatorverfahrens wie folgt bestimmen:

1. Aus der Funktionsgleichung $z = f(x, y)$ und deren Nebenbedingung $\phi(x, y) = 0$ wird zunächst die Hilfsfunktion

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \phi(x, y)$$

   gebildet. Der (noch unbekannte) Faktor λ heißt Langrangescher Multiplikationsfaktor.

2. Dann werden die partiellen Ableitungen 1. Ordnung dieser Hilfsfunktion gebildet und gleich Null gesetzt:

$$\begin{cases} F_x = f_x(x, y) + \lambda \cdot \phi_x(x, y) = 0 \\ F_y = f_y(x, y) + \lambda \cdot \phi_y(x, y) = 0 \\ F_\lambda = \phi(x, y) = 0 \end{cases}$$

   Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die Koordinaten der gesuchten Extremwerte sowier der Lagrangesche Multiplikationsfaktor λ berechnen.

3 Lösung des Beispiels

Wir setzen die Lagrange-Funktion zusammen aus

- $f(x, y) = x + y$
- Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ in der Form $x^2 + y^2 - 1 = 0$

Die Lagrange-Funktion ist somit:

$$\Phi(x, y, \lambda) = x + y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1) = x + y + \lambda x^2 + \lambda y^2 - \lambda$$

Berechnen den Gradienten $\operatorname{grad} \Phi = 0$ (alle ersten partiellen Ableitungen sind zu berechnen):

1. $\Phi'(x) = 1 + 2\lambda x = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda = -\frac{1}{2}x$
2. $\Phi'(y) = 1 + 2\lambda y = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda = -\frac{1}{2}y$
3. $\Phi'\lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Da offensichtlich $x = y$ gilt, setzen wir ein in $\Phi'(\lambda)$

$$x^2 + x^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Daraus folgt: $y = x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ - erhalten aus der Kombination von x und y vier Möglichkeiten, die wir auf Extrema hin untersuchen:

1. $P_1(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$, $f(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}) = \sqrt{2}$
2. $P_2(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$, $f(\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}) = 0$
3. $P_3(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}})$, $f(\sqrt{-\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}) = 0$
4. $P_4(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}})$, $f(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}) = -\sqrt{2}$

P_1 und P_4 sind Extrema.