Runde 2, Beispiel 10

LVA 118.181, Übungsrunde 2, 27.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 13.02.2007

1 Angabe

Man ermittle für die Dgl.

$$4xy + 3y^4 + (2x^2 + 5xy^3)y' = 0$$

Konstante α und β, sodaß der integrierende Faktor $M(x,y) = x^\alpha y^\beta$ diese Differentialgleichung in eine exakte überführt und gebe sodann die allgemeine Lösung derselben an.

2 Theoretische Grundlagen: Integrierender Faktor

Eine nicht exakte Differentialgleichung in der Form

$$A(x,y) + B(x,y)y' = 0$$

geht durch die Multiplikation mit einer Funktion $M(x,y)$ in die exakte Differntialgleichung

$$M(x,y) \cdot A(x,y) + M(x,y) \cdot B(x,y)y' = 0$$

über. $M(x,y)$ ist der **integrierende Faktor** oder **Euler-Multiplikator**.
Allgemein lautet der Lösungsweg für $A(x,y) + B(x,y)y' = 0$ mit integrierendem Faktor vom Typ $M(x,y) = m(u(x,y))$:

1. Berechnung von $A_y - B_x$. Wenn 0 herauskommt, dann liegt eine exakte Differentialgleichung vor, die wie gehabt gelöst werden kann. (siehe 2.2.)

2. Wenn $u(x,y)$ nicht explizit vorgegeben so versuchen wir ausgehend von folgender Konstellation:

$$A(x,y) + B(x,y)y' = 0$$

   - Wir prüfen, ob

   $$\frac{A_y - B_x}{B}$$

   nur von x abhängt. Sollte das der Fall sein, setzen wir

   $$\mu_x = \frac{A_y - B_x}{B}\mu$$

   und erhalten als Lösung dieser Differentialgleichung einen nur von x abhängigen integrierenden Faktor μ.

- Wir prüfen, ob
$$\frac{A_y - B_x}{A}$$
nur von y abhängt. Sollte das der Fall sein, setzen wir
$$\mu_y = \frac{A_y - B_x}{A}\mu$$
und erhalten als Lösung dieser Differentialgleichung einen nur von y abhängigen integrierenden Faktor μ.
- Sollte keiner der beiden o.g. Punkte zutreffen, so bleibt nur die Auswahl verschiedener Funktionen $u(x, y)$ und dazu Berechnung von
$$H(x, y) := \frac{Ay - Bx}{BU_x - Au_y}$$
Wenn $H(x, y) = h(u(x, y))$ weiter mit nächstem Schritt, ansonsten anderes $u(x, y)$ wählen.
Standard-Ansätze für $u(x, y)$:

$\mathbf{u(x,y)}$	$\mathbf{H(x,y)}$
x	$\frac{A_y-B_x}{B}$
y	$\frac{A_y-B_x}{-A}$
$x+y$	$\frac{A_y-B_x}{B-A}$
$x-y$	$\frac{A_y-B_x}{B+A}$
xy	$\frac{A_y-B_x}{yB-yA}$
y^2+y^2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{A_y-B_x}{xB-yA}$
x^2-y^2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{A_y-B_x}{xB+yA}$

3. Berechne $m(u) = e^{\int h(u)\,du}$. $M(x, y) = m(u(x, y))$ ist der Euler-Multiplikator
4. Lösung der exakten Differentialgleichung $M(x, y) \cdot A(x, y) + M(x, y) \cdot B(x, y)y' = 0$

3 Theoretische Grundlagen: Exakte Differentialgleichungen

Exakte Differentalgleichungen stellen eine spezielle Form der Differentialgleichungen 1. Ordnung dar und entstehen durch Differentiation nach der Kettenregel aus $U(x, y) = const.$. Ihre implizite Form lautet
$$U_x(x, y) + U_y(x, y)y' = 0,$$
und die explizite für $U_y \neq 0$:
$$y' = -\frac{U_x(x, y)}{U_y(x, y}$$

Normalerweise ist die Exaktheit einer Differentialgleichung nicht auf den ersten Blick ersichtlich. Eine Differentialgleichung der Form

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0$$

ist dann exakt, wenn es eine Funktion U gibt, so dass gilt:

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x} = A, \qquad U_y = \frac{\partial U}{\partial y} = B$$

$\mathbf{U}$ ist dann die **Stammfunktion von** $\mathbf{A(x, y) + B(x, y)y' = 0}$ (und ist nichts anderes als die Stammfunktion des Vektorfeldes

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} A(x, y) \\ B(x, y) \end{pmatrix}$$

Der **Exaktheitstest** ergibt für $A(x, y) + B(x, y)y' = 0$ genau dann ein positives Resultat, wenn folgende **Integrabilitätsbedingung** erfüllt ist:

$$\frac{\partial}{y} A(x, y) = \frac{\partial}{x} B(x, y)$$

Allgemein lautet die **Lösungsmethode für exakte Differentialgleichung der Form A(x,y) + B(x,y)y' = 0**:

1. Bestätigen von

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

2. Bestimmung einer Stammfunktion über den Ansatz $u_x = A$, $U_y = B$:

   a) A unbestimmt nach x integrieren

$$U(x, y) = \int A(x, y)\, dx + c(y)$$

   b) y partiell nach y differenzieren, mit B gleichsetzen:

$$U_y(x, y) = (\int A(x, y)\, dx)_y + c'(y) = B$$

   c) $c(y)$ durch Integration nach y bestimmen

   Allgemeine implizite Lösung: $U(x, y) = const.$

3. Implizite Lösung ist $U(x, y) = U(x_0, y_0)$ - wenn möglich nach y auflösen und Definitionsbereich bestimmen.

4 Lösung des Beispiels

Die Differentialgleichung (nicht exakt) hat die allgemeine Form $A(x,y) + B(x,y)y' = 0$ und wird durch die Multiplikation mit einem Faktor $\mu(x,y)$ zu einer exakten Differentialgleichung:

$$\mu(x,y)A(x,y) + \mu(x,y)B(x,y)y' = 0$$
$$\mu(x,y)A(x,y) = p(x,y) = F_x$$
$$\mu(x,y)B(x,y) = q(x,y) = F_y$$

Ich sehe nicht, wo die Differentialgleichung kein nicht zusammenhängendes Gebiet umfasst und kann daher sagen:

$$F_{xy} = F_{yx} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu_y A + \mu A_y = \mu_x B + \mu B_x$$

Das wäre eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, die zu lösen wäre - aber der Hinweis ist ja da: $\mu = x^\alpha y^\beta$.
Konkret sieht die Lösung wie folgt aus:

$$F_x = \mu \cdot A = 4x^{\alpha+1} \cdot y^{\beta+1} + 3x^\alpha \cdot y^{\beta+4}$$
$$F_y = \mu \cdot B = 2x^{\alpha+2} \cdot y^\beta + 5x^{\alpha+1} \cdot y^{\beta+3}$$
$$F_{xy} = F_{yx} \qquad \Rightarrow$$
$$4 \cdot (\beta+1) \cdot x^{\alpha+1} \cdot y^\beta + 3 \cdot (\beta+4) \cdot x^\alpha \cdot y^{\beta+3} = 2 \cdot (\alpha+2) \cdot x^{\alpha+1} \cdot y^\beta + 5 \cdot (\alpha+1) \cdot x^\alpha \cdot y^{\beta+3}$$

Durchführung des Koeffizientenvergleichs (Lösung des Gleichungssystems):

$$4 \cdot (\beta+1) = 2 \cdot (\alpha+2)$$
$$3 \cdot (\beta+4) = 5 \cdot (\alpha+1)$$
$$\alpha = 2, \qquad \beta = 1, \qquad M_x = 4x^3y^2 + 3y^2y^4, \qquad M_y = 2x^4y + 5x^3y^4$$
$$\mathbf{F(x,y) = x^4y^2 + x^3y^5 + C}$$