Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse für Informatik UE 2021W

Übung 1

Feedback: 80/80
Alles korrekt und schön gelöst. Bei Beispiel 4 ist Ihnen ein kleiner Fehler in der allgemeinen Formel für die symmetrischen Differenzen unterlaufen: $(-1)^{i-1}2^i \to (-2)^{i-1}$.

1 Aufgabe 1

1.1 Unteraufgabe (a)

Ein Wahrscheinlichkeitsraum besteht aus der Grundmenge Ω mit den Elementarereignissen $\omega \in \Omega$ sowie einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$.
Werden zwei Würfel, mit einer angenommenen Seitenzahl von 6, geworfen, so kann die Grundmenge Ω wie folgt beschrieben werden.

$$\Omega = \{(x,y) : 1 \leq x,y \leq 6\} = \{(1,1),(1,2),\dots,(1,6),(2,1),\dots,(6,6)\} \tag{1}$$

Angenommen es wird mit zwei fairen Würfeln geworfen, kann das Wahrscheinlichektismaß $\mathbb{P}$ ganz einfach bestimmt werden, da jedes Ergebnis eines Wurfes die selbe Wahrscheinlichkeit besitzt.

$$\mathbb{P}(x,y) = \mathbb{P}(x) \cdot \mathbb{P}(y) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \quad \text{für alle } \ x,y : 1 \leq x,y \leq 6 \tag{2}$$

Weiters wäre das Ereignis *"das Minimum der Augenzahlen ist höchstens 3"* die Menge aller Elementarereignisse $\omega \in \Omega$ in denen mindestens eine Zahl gewürfelt wurde, welche kleiner oder gleich 3 ist.

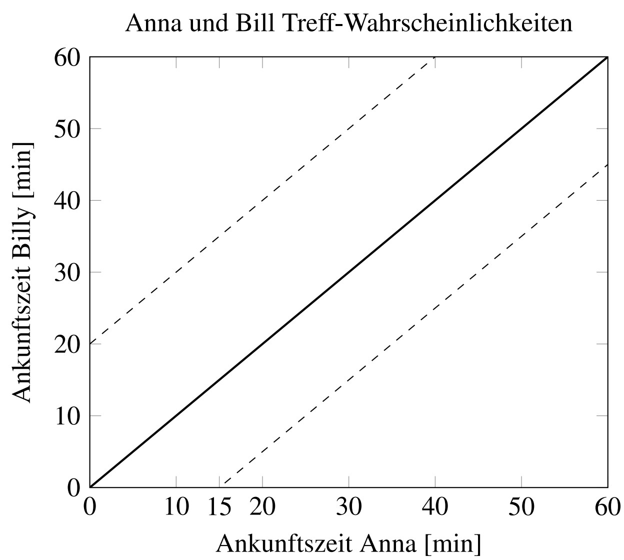
$$A : \text{"Minimum der Augenzahlen} \leq 3\text{"} = \{(x,y) : x \leq 3 \vee y \leq 3 \ \} \tag{3}$$

Das entspricht 27 Ereignissen. Jeweils 6 bei welchen 1, 2 oder 3 als erstes, sowie 9 bei denen eine höhere Zahl gefolgt von 1,2 oder 3 gewürfelt wurde.

1.2 Unteraufgabe (b)

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{3}{6} \cdot \frac{6}{6}\right) + \left(\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6}\right) = \frac{18}{36} + \frac{9}{36} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} \tag{4}$$

2 Aufgabe 2



$$\mathbb{P}(\text{Treffen}) = 1 - \frac{\left(\frac{45}{60}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{40}{60}\right)^2}{2} = 1 - \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2} = 1 - \frac{9}{32} - \frac{4}{18} = 0,4965 \quad (5)$$

3 Aufgabe 3

Die Ereignisse A, B und C erfüllen folgende Bedingungen

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= 0.7 \\
\mathbb{P}(B) &= 0.6 \\
\mathbb{P}(C) &= 0.5 \\
\mathbb{P}(A \cap B) &= 0.4 \\
\mathbb{P}(A \cap C) &= 0.3 \\
\mathbb{P}(B \cap C) &= 0.2 \\
\mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= 0.1
\end{aligned} \tag{6}
$$

Aus den Axiomen von Kolmogorov ergeben sich folgende elementare Folgerungen:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= 0.7 + 0.6 - 0.4 = 0.9 \\
\mathbb{P}(A \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) \\
&= 0.7 + 0.5 - 0.3 = 0.9 \\
\mathbb{P}(B \cup C) &= \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\
&= 0.6 + 0.5 - 0.2 = 0.9 \\
\mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&= 0.7 + 0.6 + 0.5 - 0.4 - 0.3 - 0.2 + 0.1 = 1.0
\end{aligned} \tag{7}
$$

4 Aufgabe 4

Die symmetrische Differenz von zwei Mengen („exklusives Oder “) ist

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \tag{8}$$

$\mathbb{P}(A \triangle B)$ als Wahrscheinlichkeit von Durchschnitten

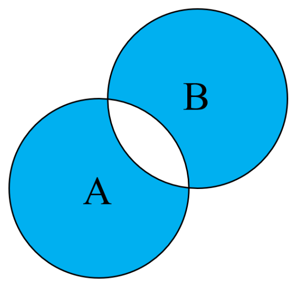


Abbildung 1: Symmetrische Differenz: $A \triangle B$

Symmetrische Differenz von zwei Mengen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \triangle B) &= \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) \\
\mathbb{P}(A \setminus B) &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
\mathbb{P}(B \setminus A) &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
\mathbb{P}(A \triangle B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2 * \mathbb{P}(A \cap B)
\end{aligned} \tag{9}$$

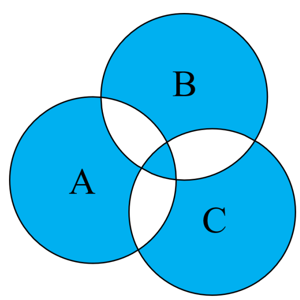


Abbildung 2: Symmetrische Differenz: $A \triangle B \triangle C$

Symmetrische Differenz von drei Mengen:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \triangle B \triangle C) = \mathbb{P}(A \setminus (B \cup C)) + \mathbb{P}(B \setminus (A \cup C)) + \mathbb{P}(C \setminus (A \cup B)) + \mathbb{P}(A \cap B \cap B)) \\
&\mathbb{P}(A \setminus (B \cup C)) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&\mathbb{P}(B \setminus (A \cup C)) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&\mathbb{P}(C \setminus (A \cup B)) = \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&\mathbb{P}(A \triangle B \triangle C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 2 * \mathbb{P}(A \cap B) - 2 * \mathbb{P}(A \cap C) - 2 * \mathbb{P}(B \cap C) + 4 * \mathbb{P}(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Symmetrische Differenz von n Mengen:

$$
\mathbb{P}(\triangle_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} * 2^i * \sum_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_i \leq n} \mathbb{P}(A_{j1} \cap \ldots \cap A_{ji}) \tag{11}
$$

5 Aufgabe 5

Eine Münze wird so lange geworfen, bis Kopf erscheint. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Würfe durch drei teilbar ist.

Damit die Anzahl der Würfe n ist, muss n-1 mal Zahl kommen und danach Kopf. Es wird genau eine der 2^n möglichen Folgen der Länge n benötigt, also

$$p(n) = \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^n} \tag{12}$$

Daraus erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Würfe durch drei teilbar ist.

$$\mathbb{P}(Die\ Anzahl\ ist\ durch\ drei\ teilbar) = \mathbb{P}(\{3,6,9,...\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} \tag{13}$$

Diese Summe entspricht einer konvergierenden geometrischen Reihe, da $|q| \leq 1$ gilt.

$$\sum_{n \geq 1} q^n = q + q^2 + ... + q^n = \frac{q}{1-q} \tag{14}$$

Daraus ergibt sich folgender Wert für die zuvor angegebene Summe.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^{3n}} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{8}\right)^n = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7} \tag{15}$$

Wird eine Münze so lange geworfen bis Kopf erscheint, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Würfe durch drei teilbar ist somit $\frac{1}{7}$.

6 Aufgabe 6

Ein Würfel wird drei mal geworfen. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der ersten beiden Augenzahlen 4 ist, wenn die Summe aus zweiter und dritter Augenzahl 8 ist.

A...Die Summe der zweiten und dritten Augenzahl ist 8
B...Die Summe der ersten beiden Augenzahlen ist 4

$$A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36} \tag{16}$$

$$A \cap B = \{(1,3,5),(2,2,6)\} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6^3} = \frac{2}{216} = \frac{1}{108} \tag{17}$$

Daraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für B unter der Bedingung A.

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{108}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{15} \tag{18}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der ersten beiden Augenzahlen 4 ist, unter der Bedingung, dass die Summe der letzten beiden Augenzahlen 8 ist, beträgt $\frac{1}{15}$

7 Aufgabe 7

Aus einer Urne mit drei weißen und zwei schwarzen Kugeln wird dreimal mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln

7.1 Unteraufgabe (a)

3 weiße sind.
Wahrscheinlichkeit das bei einem Zug eine weiße Kugel gezogen wird:

$$P(w) = \frac{3}{5} \tag{19}$$

Wahrscheinlichkeit das bei drei Zügen hintereinander eine weiße Kugel gezogen wird:

$$P(3*w) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} = 0.216 \tag{20}$$

7.2 Unteraufgabe (b)

2 weiße sind.
Die Wahrscheinlichkeit das zwei gezogene Kugeln weiß sind und eine schwarz ist, ist zusammengesetzt aus den verschiedenen Möglichkeiten zu welchem Zeitpunkt man welche Kugel zieht. Zunächst die Wahrscheinlichkeit der Farben bei einem einzelnen Zug:

$$\mathbb{P}(w) = \frac{3}{5} \tag{21}$$

$$\mathbb{P}(s) = \frac{2}{5} \tag{22}$$

Nun die Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Möglichkeiten:

$$\mathbb{P}(2w1b) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 * \frac{2}{5} \tag{23}$$

$$\mathbb{P}(1w1b1w) = \frac{3}{5} * \frac{2}{5} * \frac{3}{5} \tag{24}$$

$$\mathbb{P}(1b2w) = \frac{2}{5} * \left(\frac{3}{5}\right)^2 \tag{25}$$

Diese drei Möglichkeiten müssen nun addiert werden. Am Ende vereinfacht sich die Formel zu:

$$\mathbb{P}(2w1b) = 3 * \left(\frac{3}{5}\right)^2 * \frac{2}{5} = \frac{54}{125} = 0.432 \tag{26}$$

8 Aufgabe 8

Von einer Krankheit sind 1% der Bevölkerung betroffen. Ein Test gibt bei einem Kranken mit Wahrscheinlichkeit 0.99 ein positives Ergebnis, bei einem Gesunden mit Wahrscheinlichkeit 0.02.

8.1 Unteraufgabe (a)

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person positiv getestet wird.
Hier für gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder die Person wird korrekt positiv getestet was eine Wahrscheinlichkeit von 0.99 hat. Oder eine Person wird falsch positiv getestet, ist also gesund aber trotzdem positiv. Dies hat eine Wahrscheinlichkeit von 0.02. Die Wahrscheinlichkeit das eine Person Krank ist ist wiederum bei 0.01. Gegengleich beträgt die Wahrscheinlichkeit das die Person gesund ist 0.99.

$$\mathbb{P}(korrekt\,pos) = 0.01 * 0.99 = 0.0099 \tag{27}$$

$$\mathbb{P}(inkorrekt\,pos) = 0.99 * 0.02 = 0.0198 \tag{28}$$

$$\mathbb{P}(inkorrekt\,pos) + \mathbb{P}(korrekt\,pos) = 0,0297 \tag{29}$$

8.2 Unteraufgabe (b)

Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person Krank ist wenn ein positiver Test vorliegt.
Dafür muss die Wahrscheinlichkeit das eine Person richtig positiv getestet wurde mit der Wahrscheinlichkeit, dass eine Person falsch positiv getestet wurde, in Relation auf die Größe der Gruppen Krank und Gesund, in Bezug zueinander gesetzt werden.
Dafür wird der Satz von Bayes herangezogen, welcher in diesem Fall folgende Formel ergibt:

$$\mathbb{P}(krank|positiv) = \frac{\mathbb{P}(korrekt\,pos)}{\mathbb{P}(korrekt\,pos) + \mathbb{P}(inkorrekt\,pos)} = \frac{0.01 * 0.99}{(0.01 * 0.99) + (0.99 * 0.02)} = \frac{1}{3} \tag{30}$$

Beachtlicher Weise ergibt sich, dass Aufgrund der geringen Verbreitung der Krankheit in der Bevölkerung nur jeder 3. Test eine tatsächliche Infektion anzeigt, obwohl nur eine 2 prozentige Wahrscheinlichkeit für ein Falsch positives Ergebnis vorliegt.

Übung 2

Feedback: 68/80
Die Lösungen der Beispiele 1, 3-4 und 6-8 sind richtig. Die Lösung von Beispiel 2 ist falsch, hat elementare Fehler. Die Lösung des Beispiels 5 ist teilweise richtig, aber der Satz von Bayes ist falsch eingesetzt (im Nenner soll überall die ganze P(Kind AB) stehen, nicht nur ein Teil davon!). Beispiel 6 ist sehr originell gelöst mit guter Idee ! Allerdings sollte man noch zeigen, dass alle Punkte in der grünen Fläche wirklich die Zusammensetzung eines Dreiecks erlaubt. Bei Beispiel 8 sind die Farben dunkelblau und grün vertauscht (Kleinigkeit).

9 Aufgabe 1

Aus einer Urne mit drei weißen und zwei schwarzen Kugeln wird dreimal mit Zurücklegen gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den gezogenen Kugeln

9.1 Unteraufgabe (a)

3 weiße sind.
Wahrscheinlichkeit das bei einem Zug eine weiße Kugel gezogen wird:

$$P(w) = \frac{3}{5} \tag{31}$$

Wahrscheinlichkeit das bei drei Zügen hintereinander eine weiße Kugel gezogen wird:

$$P(3*w) = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} = 0.216 \tag{32}$$

9.2 Unteraufgabe (b)

2 weiße sind.
Die Wahrscheinlichkeit das zwei gezogene Kugeln weiß sind und eine schwarz ist, ist zusammengesetzt aus den verschiedenen Möglichkeiten zu welchem Zeitpunkt man welche Kugel zieht. Zunächst die Wahrscheinlichkeit der Farben bei einem einzelnen Zug:

$$\mathbb{P}(w) = \frac{3}{5} \tag{33}$$

$$\mathbb{P}(s) = \frac{2}{5} \tag{34}$$

Nun die Wahrscheinlichkeiten für die jeweiligen Möglichkeiten:

$$\mathbb{P}(2w1b) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 * \frac{2}{5} \tag{35}$$

$$\mathbb{P}(1w1b1w) = \frac{3}{5} * \frac{2}{5} * \frac{3}{5} \tag{36}$$

$$\mathbb{P}(1b2w) = \frac{2}{5} * \left(\frac{3}{5}\right)^2 \tag{37}$$

Diese drei Möglichkeiten müssen nun addiert werden. Am Ende vereinfacht sich die Formel zu:

$$\mathbb{P}(2w1b) = 3 * \left(\frac{3}{5}\right)^2 * \frac{2}{5} = \frac{54}{125} = 0.432 \tag{38}$$

10 Aufgabe 2

Die Ereignisse A, B und C sind (vollständig) unabhängig. Zeigen Sie, dass dann auch A^c, B^c und C^c unabhängig sind.
Hierfür werden zwei Axiome herangezogen. Zunächst ist die Wahrscheinlichkeit eines Komplements folgend mit der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses verknüpft:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) \tag{39}$$

Weiters sind mehrere Ereignisse dann voneinander Unabhängig, wenn folgende Aussage zutrifft:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B) * \mathbb{P}(C) \tag{40}$$

In Formel (10) lässt sich das Axiom (9) einsetzten, es ergibt sich:

$$1 - \mathbb{P}\left((A \cap B \cap C)^c\right) = (1 - \mathbb{P}(A^c)) * (1 - \mathbb{P}(A^c)) * (1 - \mathbb{P}(A^c)) \tag{41}$$

Durch herausheben ergibt sich:

$$1 - \mathbb{P}\left((A \cap B \cap C)^c\right) = 1 - (\mathbb{P}(A^c) * \mathbb{P}(B^c) * \mathbb{P}(C^c)) \tag{42}$$

Nun lässt sich der Term -1 auf beiden Seiten der Gleichung streichen und es ergibt sich jene Formel die den Beweis für unsere Aussage liefert:

$$\mathbb{P}\left((A \cap B \cap C)^c\right) = (\mathbb{P}(A^c) * \mathbb{P}(B^c) * \mathbb{P}(C^c)) \tag{43}$$

Wenn die Ereignisse A, B und C (vollständig) unabhängig sind, dann sind auch A^c, B^c und C^c unabhängig.

11 Aufgabe 3

In einer Urne liegen jeweils k Kugeln mit der Zahl $k, k = 1, \ldots, 10$ (also eine Kugel mit der Zahl 1, zwei mit 2, ...). Eine Kugel wird gezogen, X sei die Zahl, die darauf steht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Verteilungsfunktion von X.

In einer Urne liegen jeweil k Kugeln mit der Zahl k, $k = 1, 2, \ldots, 10$.
Daher gibt es insgesamt

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55 \tag{44}$$

Kugeln in der Urne.
Wird eine Kugel aus der Urne gezogen, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass k drauf steht wie folgt:

$$\mathbb{P}(\text{Zahl auf gezogener Kugel ist } k) = \frac{k}{55} \tag{45}$$

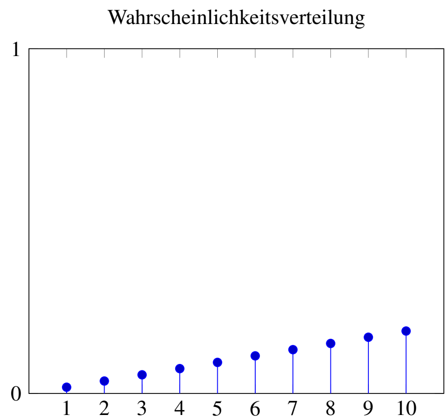
Wird diese Zahl nun mit einer Zufallsvariablen X ausgedrückt, so können die Wahrscheilichkeiten, dass die Variable den Wert k annehmen wird wie folgt ausgedrückt werden.

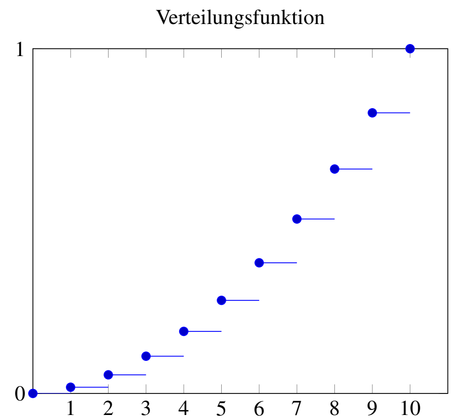
$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}_X(k) \tag{46}$$

Daraus folgen die Wahrscheinlichkeiten, dass $k = 1, 2, \ldots, 10$ die Zahl auf einer gezogenen Kugel ist und somit die Wahrscheinlichkeits- und Vertailungsfunktion von X.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{3}{55}$	$\frac{4}{55}$	$\frac{5}{55}$	$\frac{6}{55}$	$\frac{7}{55}$	$\frac{8}{55}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{10}{55}$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}(X \leq k)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{3}{55}$	$\frac{6}{55}$	$\frac{10}{55}$	$\frac{15}{55}$	$\frac{21}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{36}{55}$	$\frac{45}{55}$	1


Wahrscheinlichkeitsverteilung
1
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


Verteilungsfunktion
1
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

12 Aufgabe 4

ein Würfel wird dreimal geworfen, $X \leq Y \leq Z$ seien die der Größe nach geordneten Augenzahlen. Bestimmen Sie die Verteilung von Y.

Wird ein Würfel drei mal geworfen, so gibt es insgesamt $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ Möglichkeiten für die gewürfelten Augenzahlen (ohne Berücksichtigung von Wiederholung). Weiters ist zu sagen, dass jede Augenzahl mit der selben Wahrscheinlichkeit gewürfelt werden kann.
Daher reicht es zu wissen wie viele Wurfmöglichkeiten es für jede Kombination gibt, bei denen eine Augenzahl die Mittlere ist um die Auftrittswahrscheinlichkeit und somit die Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion von Y zu bestimmen.
Angenommen 2 ist die Mittlere der gewürfelten Augenzahlen, so gibt es folgende Kombinationen in denen $Y = 2$ gilt.

1-2-2 (3 Wurfmögl.)	2-2-2 (1 Wurfmögl.)
1-2-3 (6 Wurfmögl.)	2-2-3 (3 Wurfmögl.)
1-2-4 (6 Wurfmögl.)	2-2-4 (3 Wurfmögl.)
1-2-5 (6 Wurfmögl.)	2-2-5 (3 Wurfmögl.)
1-2-6 (6 Wurfmögl.)	2-2-6 (3 Wurfmögl.)

Was insgesamt 40 Wurfmöglichkeiten ergibt.
Aus diesen Kombination kann nun ein Muster entnommen werden. Wenn alle Augenzaheln gleich sind, gibt es nur eine Wurfmöglichkeit, ist eine Zahl anders so gibt es 3 und wenn alle Zahlen unterschiedlich sind so gibt es insgesamt 6. Außerdem besitzt jede Augenzahl x genau $x-1$ Zahlen die echt kleiner und $6-x$ Zahlen die echt größer sind.
Daher kann die insgesamte Anzahl der Wurfmöglichkeiten über folgende Formel berechnet werden:

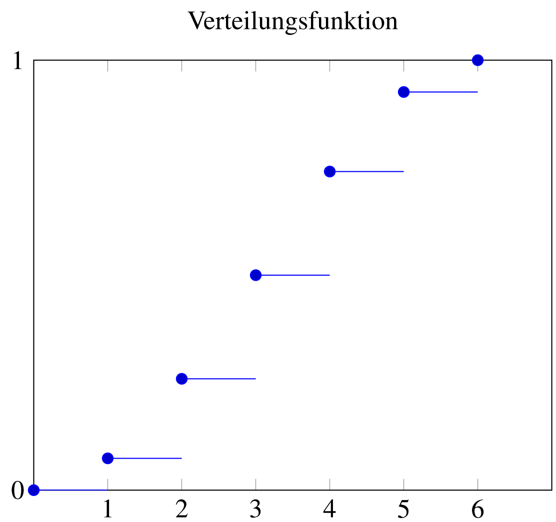
$$n = (x-1) \cdot (3 + 6 \cdot (6-x)) + (6-x) \cdot 3 + 1 \tag{47}$$

Daraus ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten für $\mathbb{P}(Y = x)$.

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y = x)$	$\frac{16}{216}$	$\frac{40}{216}$	$\frac{52}{216}$	$\frac{52}{216}$	$\frac{40}{216}$	$\frac{16}{216}$

Und somit folgt die Verteilungsfunktion für Y.

x	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y \leq x)$	$\frac{16}{216}$	$\frac{56}{216}$	$\frac{108}{216}$	$\frac{160}{216}$	$\frac{200}{216}$	1



Verteilungsfunktion
1
0
1
2
3
4
5
6

13 Aufgabe 5

Nehmen Sie im Blutgruppenbeispiel aus der Vorlesung an, dass Mutter und Kind beide Blutgruppe AB haben. Bestimmen Sie unter dieser Bedingung die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Möglichkeiten für die (unbekannte) Blutgruppe des Vaters.

Die Blutgruppe einer Person entsteht aus zwei seiner/ihrer Gene. Welche Kombinationen zu welcher Blutgruppe führen ist in folgender Tabelle zu sehen:

<table>
<tr><th>Gen 1</th><th>Gen 2</th><th>Blutgruppe</th></tr>
<tr><td>a</td><td>a</td><td rowspan="3">A</td></tr>
<tr><td>a</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>a</td></tr>
<tr><td>b</td><td>b</td><td rowspan="3">B</td></tr>
<tr><td>b</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>b</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>a</td><td>b</td><td rowspan="2">AB</td></tr>
<tr><td>b</td><td>a</td></tr>
</table>

Laut Pschyrembel ist die Verteilung der verschiedenen Blutgruppen in der Bevölkerung wie folgt:

Blutgruppen-WSK	
P_A	0.47
P_B	0.09
P_0	0.04
P_{AB}	0.40

Anhand der Tabelle für Gen-Kombinationen lassen sich folgende Formeln für die Blutgruppen herleiten.

$$\begin{aligned} P_A &= P_a^2 + 2 * P_a * P_o \\ P_B &= P_b^2 + 2 * P_b * P_o \\ P_0 &= P_o^2 \\ P_{AB} &= 2 * P_a * P_b \end{aligned} \tag{48}$$

In Verbindung mit den Werten von Pschyrembel lassen sich die Werte für P_a, P_b, P_0, P_{ab} annähern. Für die Lösung des Beispiels wurden folgende Werte verwendet

Näherungswerte	
P_a	$\frac{9}{30}$
P_b	$\frac{2}{30}$
P_o	$\frac{19}{30}$

Haben sowohl die Mutter als auch das Kind die Blutgruppe AB, so kann die Mutter entweder ein a-Gen, oder ein b-Gen weitergegeben haben.
Da die Mutter sowohl ein a-Gen als auch ein b-Gen hat, liegt die Wahrscheinlichkeit, dass sie das a-Gen, bzw. das b-Gen weitergegeben hat bei 50%

$$\begin{aligned} P_{ma} &= \mathbb{P}(Mutter\ gibt\ a-Gen \mid MutterAB) = \frac{1}{2} \\ P_{mb} &= \mathbb{P}(Mutter\ gibt\ b-Gen\ \mid MutterAB) = \frac{1}{2} \\ P_m &= P_{ma} = P_{mb} \end{aligned} \tag{49}$$

1. Möglichkeit: Die Mutter hat ein a-Gen weitergegeben
Der Vater muss entweder die Blutgruppe B oder AB haben, da bei beiden Blutgruppen das fehlende b-Gen für das Kind vorhanden ist.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Mutter\ gibt\ a|Vater\ hat\ B\ |Kind\ hat\ AB) &= P_m * \frac{\mathbb{P}(B) * \mathbb{P}(Kind\ AB\ |B)}{\mathbb{P}(B) * \mathbb{P}(Kind\ AB\ |B) + \mathbb{P}(AB) * \mathbb{P}(Kind\ AB\ |AB)} \\ &= \frac{1}{2} * \frac{P_b^2 + 2 * P_b * P_o}{P_b^2 + P_b * P_o + P_a * P_b} \\ &= \frac{1}{2} * (P_b + P_o) = \frac{21}{60} \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Mutter\ gibt\ a|Vater\ hat\ AB\ |Kind\ hat\ AB) &= P_m * \frac{\mathbb{P}(AB) * \mathbb{P}(Kind\ AB\ |B)}{\mathbb{P}(B) * \mathbb{P}(Kind\ AB\ |B) + \mathbb{P}(AB) * \mathbb{P}(Kind\ AB\ |AB)} \\ &= \frac{1}{2} * \frac{P_a * P_b}{P_b^2 + P_b * P_o + P_a * P_b} \\ &= \frac{1}{2} * (P_b) = \frac{2}{60} \end{aligned} \tag{51}$$

2. Möglichkeit: Die Mutter hat ein b-Gen weitergegeben
Der Vater muss entweder die Blutgruppe A oder AB haben, da bei beiden Blutgruppen das fehlende b-Gen für das Kind vorhanden ist.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Mutter\ gibt\ b|Vater\ hat\ A\ |Kind\ hat\ AB) &= P_m * \frac{\mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(Kind\ AB\ |A)}{\mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(Kind\ AB\ |A) + \mathbb{P}(AB) * \mathbb{P}(Kind\ AB\ |AB)} \\
&= \frac{1}{2} * \frac{P_a^2 + 2 * P_a * P_o}{P_a^2 + P_a * P_o + P_a * P_b} \\
&= \frac{1}{2} * (P_a + P_o) = \frac{28}{60}
\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Mutter\ gibt\ b|Vater\ hat\ AB\ |Kind\ hat\ AB) &= P_m * \frac{\mathbb{P}(AB) * \mathbb{P}(Kind\ AB\ |A)}{\mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(Kind\ AB\ |A) + \mathbb{P}(AB) * \mathbb{P}(Kind\ AB\ |AB)} \\
&= \frac{1}{2} * \frac{P_a * P_b}{P_a^2 + P_a * P_o + P_a * P_b} \\
&= \frac{1}{2} * (P_a) = \frac{9}{60}
\end{aligned} \tag{53}$$

Somit ergeben sich für die Blutgruppe des Vaters folgende Wahrscheinlichkeiten

Blutgruppen-WSK des Vaters	
P_A	$\frac{28}{60} = 0.467$
P_B	$\frac{21}{60} = 0.350$
P_0	0.000
P_{AB}	$\frac{11}{60} = 0.183$

14 Aufgabe 6

(Geometrische Wahrscheinlichkeit) Ein Stab von 1 Meter Länge wird an zwei zufällig gewählten Punkten durchgeschnitten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus den drei Stücken ein Dreieck zusammengesetzt werden kann?

In folgender Lösung wird der Stab mit der Länge von 1 Meter mit x und die daraus gewonnen Stücke mit a, b und c bezeichnet

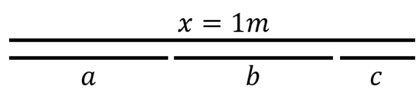


Abbildung 3: Stock und Stücke

Anhand von Abbildung 4 ist zu erkennen, dass es nur möglich ist, ein Dreieck aus den 3 Stücken zu konstruieren, wenn keines der Stücke länger ist als 0.5 Meter, also die Hälfte der gesamten Länge.

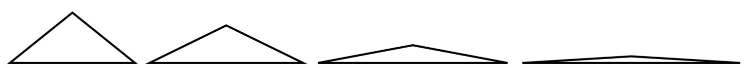


Abbildung 4: Dreiecke mit Umfang = 1m

Werden die Stücke nach den Schnitten wie in Abbildung 3 benannt, also a, b, c von links nach rechts, gibt es vier mögliche Szenarien, welche alle gleich wahrscheinlich sind, da die Position der Schnitte beide Male zufällig gewählt wird.

Szenario	a	b	c
1	$a > 0.5$	$b < 0.5$	$c < 0.5$
2	$a < 0.5$	$b > 0.5$	$c < 0.5$
3	$a < 0.5$	$b < 0.5$	$c > 0.5$
4	$a < 0.5$	$b < 0.5$	$c < 0.5$

Tabelle 1: Szenarien der Stabteilung

Das alle Szenarien die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, ist anhand folgender Abbildung zu sehen

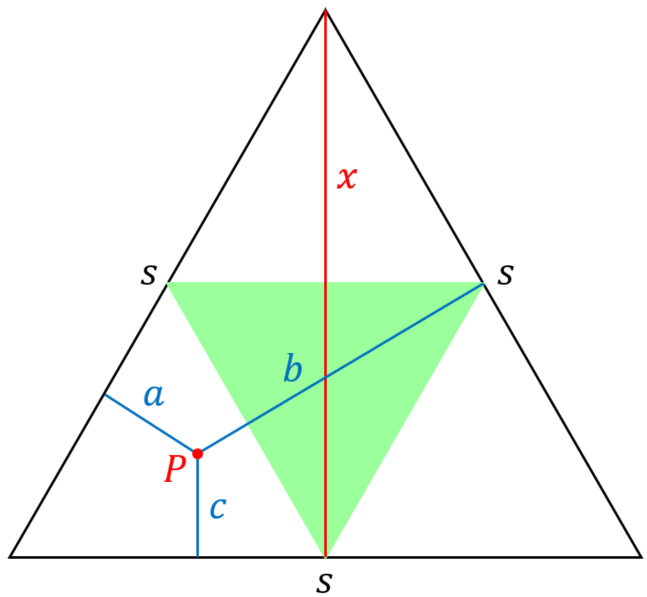


Abbildung 5: Dreiecksgraph

Hierbei handelt es sich um ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge s, wobei die Höhe x der Länge unseres Stabes entspricht.

Die Addition der Längen a, b und c ergibt x.

Durch das Übertragen der Längen des zerschnittenen Stabes auf die Längen a, b und c im Dreieck, kann jede mögliche Schnittkombination als Punkt P im Dreieck dargestellt werden. Die grüne Fläche gibt die Menge aller Punkte an, für die keine Seite länger ist als die Hälfte von x. Es ist leicht zu erkennen, dass dies ein Viertel der gesamten Fläche ist.

Die drei weißen Dreiecke über und neben dem grünen, sind die Szenarien 1, 2 und 3 aus der Tabelle 1

Da nur das Szenario 4 die Bedingung erfüllt, dass keine Seite länger als 0.5 Meter ist, und durch Abbildung 5 bewiesen wurde, dass alle Szenarien mit der gleichen Häufigkeit auftreten, ist die Wahrscheinlichkeit aus den 3 Stücken ein Dreieck konstruieren zu können 25%.

15 Aufgabe 7

Ein Würfel wird zweimal geworfen. Wir definieren die Ereignisse A = "die erste Augenzahl ist 6", B = "die zweite Augenzahl ist 6" und C = "die beiden Augenzahlen sind gleich". Zeigen Sie : A, B und C sind paarweise unabhängig, aber nicht (vollständig) unabhängig.

Die Ereignisse $A_1,\dots,A_n$ heißen paarweise unabhängig, wenn für alle $1 \leq i < j \leq n$

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j) \tag{54}$$

Zuerst werden die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse A, B und C berechnet.
Für A und B gilt jeweils $\Omega_A = \Omega_B = \{1,2,3,4,5,6\}$ und $A = B = \{6\}$. Daraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für die einzelnen Ereignisse A und B.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{|A|}{|\Omega_A|} = \frac{1}{6} \tag{55}$$

Für das Ereignis C gilt $\Omega_C = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ und $C = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)(5,5)(6,6)\}$. Daraus ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C.

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega_C|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \tag{56}$$

Nun werden die Ereignisse paarweise betrachtet.

Für $A \cap B,\ A \cap C$ und $B \cap C$ gilt $\Omega_{A,B} = \Omega_{A,C} = \Omega_{B,C}\{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ und $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \{(6,6)\}$. Daraus ergibt sich für $A \cap B,\ A \cap C$ und $B \cap C$ die folgende Wahrscheinlichkeit.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega_{A,B}|} = \frac{1}{36} \tag{57}$$

Da alle Ereignisse A, B und C die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzen gilt für das paarweise Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \tag{58}$$

Damit sind die Ereignisse A, B und C per Definition paarweise unabhängig.

Für $A \cap B \cap C$ gilt $\Omega_{A,B,C} = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$ und $A \cap B \cap C = \{(6,6)\}$. Daraus ergibt sich für $A \cap B \cap C$ die folgende Wahrscheinlichkeit.

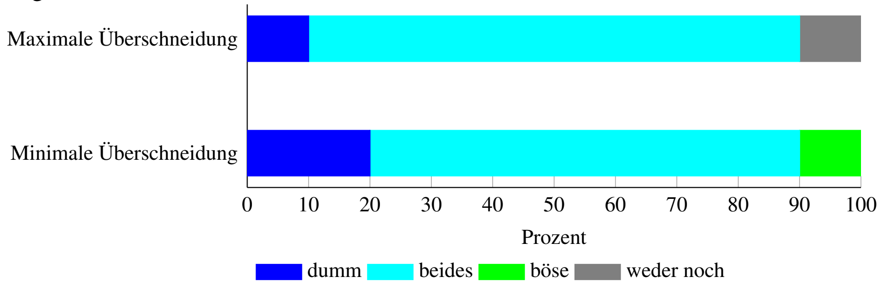
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{|A \cap B \cap C|}{|\Omega_{A,B,C}|} = \frac{1}{36} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216} \tag{59}$$

Damit sind die Ereignisse A, B und C zwar paarweise unabhängig, jedoch nicht vollständig unabhängig.

16 Aufgabe 8

Mein Großvater hat behauptet, dass 80% der Menschen dumm sind und 90% böse. Wenn das tatsächlich stimmt, wie groß ist dann der Anteil der Menschen, die dumm und böse sind, mindestens, und wie groß kann er höchstens sein?

Für diese Aufgabe müssen die unterschiedlichen Verteilungen von dummen und bösen Menschen betrachtet werden. In dem folgenden Diagramm ist einmal die minimalen und einmal die maximale Überschneidung zwischen dummen und bösen Menschen dargestellt.



Aus dem Diagramm kann nun abgelesen werden, dass der Anteil der Menschen die dumm und böse sind mindestens 70% und maximal 80% sein kann.

Übung 3

Feedback: 79/80
Alle Lösungen sind korrekt und schön ausgearbeitet. Danke. Bei Beispiel 7 ist Ihnen bei der Auflösung von $|x-12| < 6$ ein kleiner Fehler unterlaufen. Im Beispiel 5 wäre die Lösung mit Formel noch schöner (Kleinigkeit).

17 Aufgabe 1

X hat die Dichte

$$f(x) = ax^2(1-x)[0 \leq x \leq 1]. \tag{60}$$

Bestimmen Sie a, die Verteilungsfunktion von X und die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen 1/4 und 3/4 liegt.

Für alle Dichtefunktionen gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(y)dy = 1 \tag{61}$$

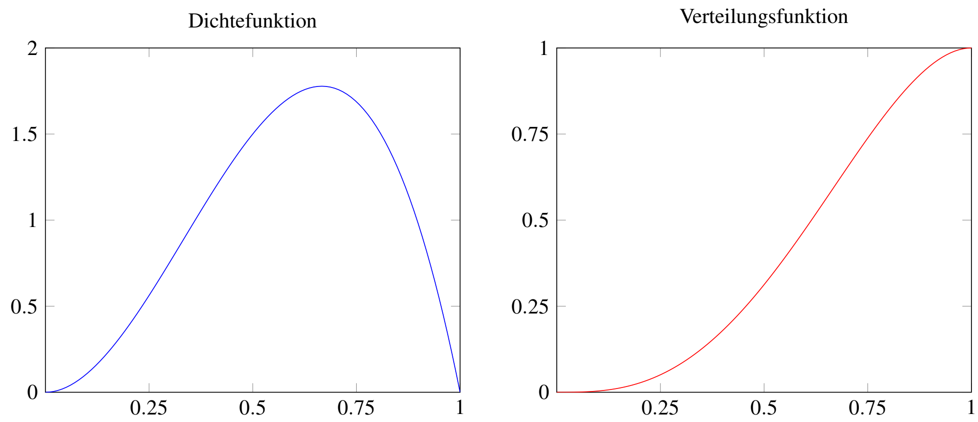
Damit kann der Wert für den Faktor a ermittelt werden.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(y)dy = \int\limits_{0}^{1} f_X(y)dy = \int\limits_{0}^{1} ay^2(1-y)dy = a * \int\limits_{0}^{1} (y^2 - y^3)dy =$$
$$a * \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1 = a * \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4}\right) = \frac{a}{12} = 1$$

Der Faktor a muss daher den Wert 12 annehmen. Nun wird die Verteilungsfunktion bestimmt.

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(y)dy = \int\limits_{0}^{x} f_X(y)dy = 12 * \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^x = 4x^3 - 3x^4$$

In der folgenden Abbildung sind die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion grafisch dargestellt.



Abschließend soll noch die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen 1/4 und 3/4 liegt, bestimmen.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\Big) = \mathbb{P}\Big(X \leq \frac{3}{4}\Big) - \mathbb{P}\Big(X \leq \frac{1}{4}\Big) = F_X\Big(\frac{3}{4}\Big) - F_X\Big(\frac{1}{4}\Big)\\ = \Big(4 * \Big(\frac{3}{4}\Big)^3 - 3 * \Big(\frac{3}{4}\Big)^4\Big) - \Big(4 * \Big(\frac{1}{4}\Big)^3 - 3 * \Big(\frac{1}{4}\Big)^4\Big)\\ = \Big(\frac{27}{16} - \frac{243}{256}\Big) - \Big(\frac{1}{16} - \frac{3}{256}\Big) = \frac{11}{16} = 68,75\%\end{aligned}$$

18 Aufgabe 2

Es sei

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^2/4 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases} \tag{62}$$

(a) Zeigen Sie, dass F eine Verteilungsfunktion ist.

(b) X sei nach F verteilt. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X < 1)$, $\mathbb{P}(X \leq 1)$, $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$.

(a) Zunächst muss gezeigt werden, dass F eine Verteilungsfunktion ist.
Jede Funktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ die folgende Eigenschaften erfüllt ist eine Verteilungsfunktion.

1. F ist monoton steigend.
2. F ist rechtsseitig stetig.
3. $\lim\limits_{n\to-\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} F(x) = 1$

Wir zeigen dass F monoton steigend ist. Die Teilfunktion $x^2/4$ ist in dem Bereich $0 \leq x < 1$ streng monoton steigend. Die Teilfunktion $x/2$ ist allgemein streng monoton steigend. Konstante Funktionen wie $f(x) = 0$ und $f(x) = 1$ sind ebenfalls monoton steigend. Nun muss nur noch die Sprungstelle bei $x = 1$ betrachtet werden:

$$F_2(1) = \frac{1^2}{4} = \frac{1}{4} < F_3(1) = \frac{1}{2} \tag{63}$$

Nun muss die rechtsseitige Stetigkeit von F gezeigt werden. Alle Teilfunktionen von F sind elementare Funktionen und somit auf ihrem gesamten Bereich stetig. Daher müssen nur noch die Sprungstellen betrachtet werden. Eine Funktion ist genau rechtsseitig stetig an der Stelle x_0 wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

$$\lim_{x\to x_0+} F(x) = F(x_0) \tag{64}$$

F(x) ist rechtsseitig stetig an der Stelle $x_0 = 0$, da

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \frac{0^2}{4} = 0 = F(0) \tag{65}$$

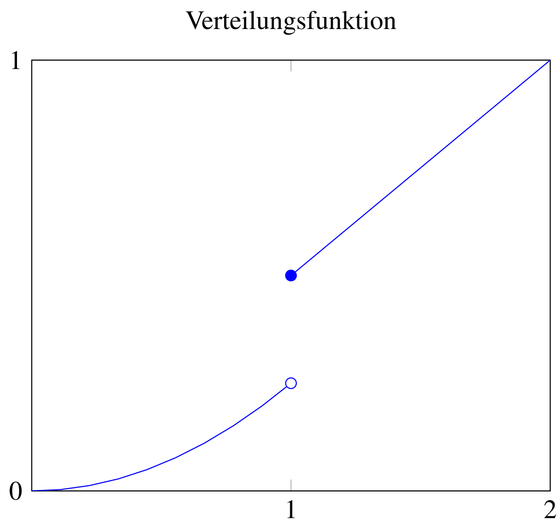
F(x) ist rechtsseitig stetig an der Stelle $x_0 = 1$, da

$$\lim_{x\to 1+} F(x) = \frac{1}{2} = 0 = F(1) \tag{66}$$

F(x) ist rechtseitig stetig an der Stelle $x_0 = 2$, da

$$\lim_{x\to 2+} F(x) = \frac{2}{2} = 1 = F(2) \tag{67}$$

Die 3. Bedingung lässt sich einfach aus der Definition der Funktion erkennen. Da somit alle Bedinungen erfüllt sind, handelt es sich bei der Funktion $F(x)$ um eine Verteilungsfunktion. In der folgenden Abbildung ist diese noch grafisch dargestellt.



(b) Die Wahrscheinlichkeit, dass X in einem gewissen Bereich liegt kann nun einfach mit der Verteilungsfunktion F(x) bestimmt werden.

$$\mathbb{P}(X < 1) = \lim_{x \to 1-} F(x) = \frac{1^2}{4} = \frac{1}{4} = 25\% \tag{68}$$

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = F(1) = \frac{1}{2} = 50\% \tag{69}$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = F(0) - \lim_{x \to 0-} F(x) = \frac{0^2}{4} - 0 = 0\% \tag{70}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = F(1) - \lim_{x \to 1-} F(x) = \frac{1}{2} - \frac{1^2}{4} = \frac{1}{4} = 25\% \tag{71}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = F(2) - \lim_{x \to 2-} F(x) = 1 - 1 = 0\% \tag{72}$$

19 Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für n $\rightarrow \infty$, p = λ/n und Zufallsvariable $X_n = B(n,p)$ und $Y = P(\lambda)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(Y = x), x \in \mathbb{N} \tag{73}$$

gilt.
Es sollte also bewiesen werden, dass die Poissonverteilung $P(\lambda)$, denn Extremfall der Binominalverteilung $B(n,p)$ darstellt.
Die Poissonverteilung ist definiert als:

$$\frac{\lambda^x}{x!} * e^{-\lambda} \tag{74}$$

Die Binomialverteilung wiederum als:

$$\binom{n}{x} * p^x * (1-p)^{n-x} \tag{75}$$

Der Binomialkoeffizient kann auch durch folgenden Term ersetzt werden:

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x! * (n-x)!} \tag{76}$$

Wird nun in die Definition für die Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit p durch λ/n ersetzt und der limes gegen unendlich gebildet, dann ergibt sich folgende Formel:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n!}{x! * (n-x)!} * \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x * \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \right] \tag{77}$$

Nun wird diese Formel umgeformt und vereinfacht, zunächst kann der letzte Term aufgeteilt werden und im mittleren wird die Potenz umgeformt.

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n!}{x! * (n-x)!} * \left(\frac{\lambda^x}{n^x}\right) * \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} * \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \right] \tag{78}$$

Es zeigt sich, dass λ^x und $1/x!$ nicht vom limes betroffen sind. Sie können als Faktoren herausgehoben werden.

$$\frac{\lambda^x}{x!} * \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n!}{(n-x)!} * \left(\frac{1}{n^x}\right) * \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} * \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \right] \tag{79}$$

Der erste Term kann wie folgt gekürzt werden:

$$\frac{n!}{(n-x)!} = n * \cdots * (n-x+1) * (n-x)!(n-x)! = n * \cdots * (n-x+1) \tag{80}$$

Die Formel verkürzt sich dadurch zu:

$$\frac{\lambda^x}{x!} * \lim_{n\to\infty} \left[\frac{n * \ldots * (n-x+1)}{n^x} * \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n * \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \right] \tag{81}$$

Nun zur Berechung des limes. Dieser kann für die einzelnen Terme getrennt berechnet werden. Die Ergebnisse werden am Ende multipliziert.
Term eins nutzt die Tatsache, dass sich die Terme in Nenner und Zähler ideal zuordnen lassen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n * \ldots * (n-x+1)}{n^x} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n} * \ldots * \frac{n-x+1}{n} \right) = 1 \tag{82}$$

In Term zwei stellt eine Möglichkeit dar die eulersche Zahl zu berechnen:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \tag{83}$$

Im letzten Term schließlich verschwindet λ/n da n hier im Nenner steht und der Bruch daher gegen null geht.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = (1-0)^{-x} = 1 \tag{84}$$

Werden nun alle Ergebnisse multipliziert, ergibt sich jene Formel die auch die Definition der Poisonverteilung ist. Der Beweis ist somit vollständig.

$$\frac{\lambda^x}{x!} * 1 * e^{-\lambda} * 1 = \frac{\lambda^x}{x!} * e^{-\lambda} \tag{85}$$

20 Aufgabe 4

X und Y haben die gemeinsame Dichte:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy \text{ wenn } x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1 \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} \tag{86}$$

Bestimmen Sie c, die Randverteilungen von X und Y und

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{3} \mid Y = \frac{1}{3}\right) \tag{87}$$

Zunächst zur Berechnung des Faktors c. Hierbei wird genutzt das das Integral über den gesamten Bereich der möglichen Werte gleich 1 ist.

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} cxydxdy \tag{88}$$

Die Grenzen liegen für y bei $[0,1]$ und für x bei $[0,1-y]$ da so die Bedingung von $x+y \leq 1$ immer erfüllt ist. Einmal Eingesetzt kann mit der Berechnung fortgefahren werden.

$$1 = \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1-y} cxydxdy = \frac{c}{2} \int\limits_{1}^{0} y*(1-y)^2 dy = \frac{c}{2}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \to c = 24 \tag{89}$$

Nun zur Berechnung der Randdichte. Diese wird wie folgt berechnet:

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \tag{90}$$

für die Zufallsvariable X liegen die Grenzen dieses Integrals bei $[0,1-x]$. Gegengleich ist es bei Y.

$$f_X(x) = \int\limits_{0}^{1-x} cxydy = \frac{cx}{2} * (1-x)^2 \tag{91}$$

$$f_Y(y) = \int\limits_{0}^{1-y} cxydx = \frac{cy}{2} * (1-y)^2 \tag{92}$$

Eine Bedingte Wahrscheinlichkeit lässt sich wie folgt berechnen:

$$\mathbb{P}(X \mid Y = y) = \int\limits_{a}^{b} f(x \mid Y = y)dx \tag{93}$$

In diesem Beispiel ergibt sich $f(x \mid Y = y)$ zu:

$$f(x \mid Y = y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{cxy}{\frac{cy}{2} * (1-y)^2} = \frac{2x}{(1-y)^2} \tag{94}$$

Nun lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \geq 1/3 \mid Y = 1/3)$, in den benötigten Grenzen x = $[1/3, 2/3]$, berechnen.

$$\int_{1/3}^{2/3} \frac{2x}{(1-y)^2} dx = \frac{x^2}{(1-y)^2}\Big|_{1/3}^{2/3} = \frac{9}{4} * x^2\Big|_{1/3}^{2/3} = \frac{9}{4} * \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{9}{4} * \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{9}{4} * \frac{4}{9} - \frac{9}{4} * \frac{1}{9} = \frac{3}{4} \tag{95}$$

Es ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von $3/4$.

21 Aufgabe 5

In einer Urne befinden sich je drei schwarze, weiße und graue Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, X sei die Anzahl der weißen, Y die der schwarzen Kugeln. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y und die Randverteilung von X.

Für diese Aufgabe kann prinzipiell auf der im Skriptum verfassten allgemeinen Formulierung aufgebaut werden, welche für ein ähnliches Problem formuliert wurde.

$$\mathbb{P}(\text{x weiße}) = \frac{\binom{A}{x}\binom{N-A}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{96}$$

Diese Formel berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass x weiße Kugeln aus einer Urne mit N Kugeln, von denen A weiß, in n Zügen ohne zurücklegen gezogen werden.

In dieser Formel ist es allerdings egal, welche Farbe die Kugeln haben die neben den x weißen gezogen werden, wodurch der Nenner auf folgende Weise angepasst werden muss. Außerdem kann aus der Angabe für $N = 9$ und $n = 3$ gesetzt werden.

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{3}{y}\binom{3}{3-x-y}}{\binom{9}{3}} = \frac{\binom{3}{x}\binom{3}{y}\binom{3}{3-x-y}}{84} \tag{97}$$

Damit kann die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie ihre Randverteilungen bestimmt werden.

	Y				
X	0	1	2	3	p_X
0	$\frac{1}{84}$	$\frac{9}{84}$	$\frac{9}{84}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{20}{84}$
1	$\frac{9}{84}$	$\frac{27}{84}$	$\frac{9}{84}$	0	$\frac{45}{84}$
2	$\frac{9}{84}$	$\frac{9}{84}$	0	0	$\frac{18}{84}$
3	$\frac{1}{84}$	0	0	0	$\frac{1}{84}$
p_Y	$\frac{20}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{1}{84}$	1

22 Aufgabe 6

X sei $N(3,16)$-verteilt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X < 2)$, $\mathbb{P}(X > 6)$, $\mathbb{P}(|X| \leq 1)$.

Aus der Angabe kann entnommen werden, dass $\mu = 3$ und $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 4$, wodurch die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten über

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{98}$$

sowie die Tabelle aus *Anhang 1* des Skriptums bestimmt werden können.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < 2) &= \Phi\left(\frac{2-3}{4}\right) = \Phi(-0,25) = 1 - \Phi(0,25) = 1 - 0,59871 = 0,40129 \\
\mathbb{P}(X > 6) &= 1 - \Phi\left(\frac{6-3}{4}\right) = 1 - \Phi(0,75) = 1 - 0,773 = 0,227 \\
\mathbb{P}(|X| \leq 1) &= \Phi\left(\frac{1-3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-1-3}{4}\right) = \Phi(-0,5) - \Phi(-1) \\
&= (1 - \Phi(0,5)) - (1 - \Phi(1)) = (1 - 0,691) - (1 - 0,841) \\
&= 0,309 - 0,159 = 0,15
\end{aligned}$$

23 Aufgabe 7

X sei exponentialverteilt mit $\lambda = 0.1$
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X < 10)$, $\mathbb{P}(|X-12| < 6)$,
und einen Wert x mit $\mathbb{P}(X \le x) = \frac{1}{2}$

Dichtefunktion der Exponentialverteilung

$$f(x) = \lambda * e^{-\lambda x} \ [x \ge 0] \tag{99}$$

Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda * x} & x \ge 0, \\ 0 & sonst \end{cases} \tag{100}$$

Da $\lambda = 0.1$ gegeben ist, kann direkt in die Verteilungsfunktion eingesetzt werden

$$\mathbb{P}(X < 10) = F_X(10) = 0.632 \tag{101}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X-12| < 6) &= \mathbb{P}(12 < X < 18) \\ &= F_X(18) - F_X(12) \\ &= 0.835 - 0.699 = 0.136 \end{aligned} \tag{102}$$

Für einen x Wert mit $\mathbb{P}(X \le x) = \frac{1}{2}$ kann ebenfalls in die Verteilungsfunktion eingesetzt und auf x umgeformt werden

$$\mathbb{P}(X \le x) = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow F_X(x) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} &1 - e^{-\lambda x} = 0.5 \\ &e^{-\lambda x} = 0.5 \\ &-\lambda x = ln(0.5) \\ &x = \frac{ln(0.5)}{-\lambda} \\ &x = 6.931 \end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned} &Probe: \\ &F_X(0.631) = 0.5 \end{aligned}$$

24 Aufgabe 8

Die logarithmische Normalverteilung $(LN(\mu, \sigma^2))$:
X sei normalverteilt mit Mittel μ und Varianz δ^2
Bestimmen Sie die Dichte von $Y = e^X$

Durch Einsetzen von $Y = e^X$ kann $F_Y(y)$ auf $F_X(ln(y))$ umgeformt werden

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \ \leq \ y) \\ &= \mathbb{P}(e^X \ \leq \ y) \\ &= \mathbb{P}(X \ \leq \ ln(y)) \\ &= F_X(ln(y)) \end{aligned} \tag{104}$$

Da X normalverteilt ist, ist die Dichtefunktion bekannt

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}} \tag{105}$$

Daraus lässt sich die neue Dichtefunktion berechnen

$$\begin{aligned} f_y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y)) \\ &= \frac{d}{dy} F_X(ln(y)) \\ &= \frac{1}{y} f_X(ln(y)) \\ &= \frac{1}{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} * e^{-\frac{(ln(y)-\mu)^2}{2\delta^2}} \quad [y \ \geq \ 0] \end{aligned} \tag{106}$$

Übung 4

Feedback: 80/80
Sehr fein gearbeitet!

25 Aufgabe 1

Aufgabe: Beweisen Sie die Behauptung aus dem Skriptum: $X\ \Gamma(\alpha,\lambda)$ und $Y\ \Gamma(\beta,\lambda)$ seien unabhängig, $S = X+Y$ und $Q = X/Y$. Dann ist S nach $\Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$verteilt, Q hat eine Betaverteilung zweiter Art, und S und Q sind unabhängig.
S = X + Y:

S hat die Dichtefunktion:

$$
\begin{aligned}
f_S(s) &= \int_0^s f_X(x) f_Y(s-x)dx \\
&= \int_0 s \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^\beta (s-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\lambda(s-x)} dx \\
&= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda s} \int_0^s x^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1} dx
\end{aligned}
$$

Mit der Substitution:

$$
\begin{aligned}
x = su,\ dx = sdu \\
u = \frac{x}{s},\ u(s) = 1
\end{aligned}
$$

bekommen wir:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^s x^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1} dx \\
&= \int_0^1 (su)^{\alpha-1}(s-su)^{\beta-1} sdu \\
&= s^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 (u)^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1} du
\end{aligned}
$$

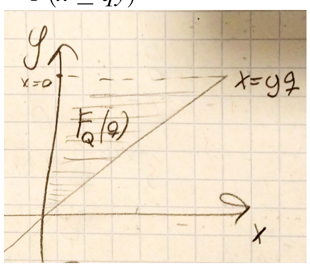
Das Integral ist jetzt genau die Betafunktion $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$
Daher bekommen wir:

$$
\begin{aligned}
f_S(s) &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda s} s^{\alpha+\beta+1} B(\alpha,\beta) \\
&= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda s} s^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} s^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\beta+\alpha)} e^{-\lambda s}
\end{aligned}
$$

Das ist aber genau die Gammaverteilung $\Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$, q.e.d.

Q = X/Y:

Betrachten wit zuerst die Verteilungsfunktion
$F_Q(q) = P(Q \leq q) = P(\frac{X}{Y} \leq q)$
und da X, Y gammaverteilt sind, $X, Y > 0$:
$= P(x \leq qy)$



Aus dem Bild sehen wir:

$F_Q(q) = \int_0^\infty \int_0^{qy} f_{X,Y}(x,y)dxdy$
Da X,Y unabhängig sind:

$$= \int_0^\infty \int_0^{qy} f_X(x) f_Y(y) dxdy$$
$$= \int_0^\infty \int_0^{qy} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} \frac{\lambda^\beta y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\lambda y} dxdy$$
$$rac\lambda^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) \int_0^\infty \int_0^{qy} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-\lambda(x+y)} dxdy$$

Die Dichtefunktion f_Q bekommen wir indem wir die Verteilungsfunktion differenzieren:

$f_Q(q) = \frac{d}{dq} F_Q(q)$

Mit der Leibnizregel:

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty y(qy)^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-\lambda(qy+y)} dy$$
$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} q^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty (y)^{\alpha+\beta-1} e^{-\lambda(q+1)y} dy$$

Mit der Substitution: $u = \lambda(q+1))y \Rightarrow du = \lambda(q+1)dy$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+\beta} q^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^\infty (\frac{u}{\lambda(q+1)})^{\alpha+\beta-1} e^{-u} \frac{1}{\lambda(q+1)} du$$
$$= \frac{q^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(q+1)^{\alpha+\beta}} \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1} e^{-u} du$$

Da das Integral jetzt genau die Gammafunktion $\Gamma(\alpha+\beta)$ ist:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{q^{\alpha-1}}{(1+q)^{\alpha+\beta}} \\
&= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \frac{q^{\alpha-1}}{(1+q)^{\alpha+\beta}}
\end{aligned}
$$

Das ist genau die Betaverteilung zweiter Art, $B_2(\alpha,\beta)$, q.e.d.

26 Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Poissonverteilung $P(\lambda)$

Poisson Verteilung
Die Zufallsvariable X ist Poisson verteilt zum Parameter $\lambda > 0$, falls

$$\mathbb{P}(X = x) \; = \; \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\; x = 0, 1, 2, ...$$

Erwartungswert im diskreten Fall
Der Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable X ist

$$\mathbb{E}(X) \; = \; \sum_x x * \mathbb{P}(X = x)$$

Verschiebungssatz
Für die Zufallsvariable X gilt

$$\mathbb{V}(X) \; = \; \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Berechnung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x * \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x * \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= \sum_{x=1}^{\infty} x * \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} * \sum_{x=1}^{\infty} x * \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= e^{-\lambda} * \sum_{x=1}^{\infty} x * \frac{\lambda * \lambda^{x-1}}{x * (x-1)!} \\
&= \lambda * e^{-\lambda} * \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \lambda * e^{-\lambda} * \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \\
&= \lambda * e^{-\lambda} * e^{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

$$= (\sum_{x=0}^{\infty} x^2 * \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}) \, - \, \lambda^2$$

$$= -\lambda^2 + e^{-\lambda} * \sum_{x=0}^{\infty} x^2 * \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= -\lambda^2 + e^{-\lambda} * \sum_{x=1}^{\infty} x^2 * \frac{\lambda^x}{x * (x-1)!}$$

$$= -\lambda^2 + e^{-\lambda} * \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x * \lambda^x}{(x-1)!}$$

$$= -\lambda^2 + e^{-\lambda} * (\sum_{x=1}^{\infty} \frac{(x-1) * \lambda^x}{(x-1)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!})$$

$$= -\lambda^2 + e^{-\lambda} * (\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!})$$

$$= -\lambda^2 + e^{-\lambda} * (\sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^2 * \lambda^x}{x!} + \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda * \lambda^x}{x!})$$

$$= -\lambda^2 + e^{-\lambda} * \lambda^2 * \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} + e^{-\lambda} * \lambda * \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= -\lambda^2 + e^{-\lambda} * \lambda^2 * e^{\lambda} + e^{-\lambda} * \lambda * e^{\lambda}$$

$$= -\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda$$

$$= \lambda$$

27 Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Diskreten Gleichverteilung $D(a,b)$.

Bei der diskreten Gleichverteilung $D(a,b)$ ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(x)$ gleich für alle $a \leq x \leq b$ mit $x,a,b \in \mathbb{Z}$ und wie folgt definiert.

$$p(x) = \frac{1}{b-a+1} \tag{107}$$

Bestimmung des Erwartungswerts $\mathbb{E}(X)$:
Der Erwartungswert einer Zufallsvariable X ist wie folgt definiert:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x * p_X(x) \tag{108}$$

Daraus folgt der Erwartungswert der diskreten Gleichverteilung.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=a}^{b} i * \frac{1}{b-a+1} = \frac{1}{b-a+1} * \sum_{i=a}^{b} i = \frac{1}{b-a+1} * \Big(\sum_{i=1}^{b} i - \sum_{i=1}^{a-1} i\Big) \\
&= \frac{1}{b-a+1} * \Big(\frac{b(b+1)}{2} - \frac{a(a-1)}{2}\Big) = \frac{1}{b-a+1} * \frac{b^2+b-a^2+a}{2} \\
&= \frac{1}{b-a+1} * \frac{(b+a)*(b-a+1)}{2} = \frac{b+a}{2}
\end{aligned} \tag{109}$$

Bestimmung der Varianz $\mathbb{V}(X)$:
Wenn man im Steinerschen Verschiebungssatz $a = 0$ setzt, so ergibt sich eine Formel für die Varianz.

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \tag{110}$$

Dafür muss zuerst $\mathbb{E}(X^2)$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=a}^{b} i^2 * \frac{1}{b-a+1} = \frac{1}{b-a+1} * \sum_{i=a}^{b} i^2 = \frac{1}{b-a+1} * \Big(\sum_{i=1}^{b} i^2 - \sum_{i=1}^{a-1} i^2\Big) \\
&= \frac{1}{b-a+1} * \Big(\frac{b(b+1)(2b+1)}{6} - \frac{a(a-1)(2a-1)}{6}\Big) \\
&= \frac{2a^2+2b^2+2ab-a+b}{6}
\end{aligned} \tag{111}$$

Damit kann nun die Varianz berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 &= \frac{2a^2+2b^2+2ab-a+b}{6} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} \\
&= \frac{a^2+b^2-2ab-2a+2b}{12} = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}
\end{aligned} \tag{112}$$

28 Aufgabe 4

Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Gammaverteilung $\Gamma(\alpha,\lambda)$.

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} * e^{-\lambda x} \; [x > 0] \tag{113}$$

wobei Γ die Gammafunktion wie folgt definiert ist.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \tag{114}$$

Bestimmung des Erwartungswerts $\mathbb{E}(X)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x * \frac{x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} * e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha} * e^{-\lambda x} dx \\ &\overset{1}{=} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha} * e^{-u} \frac{du}{\lambda} = \frac{\lambda^{\alpha}}{\lambda^{\alpha+1}\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} u^{\alpha} * e^{-u} du \\ &\overset{2}{=} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda\Gamma(\alpha)} \overset{3}{=} \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\lambda\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda}\end{aligned} \tag{115}$$

<u>Rechenschritte:</u>

1. Substitution: $u = \lambda x$
2. Das Integral entspricht der Definition der Gammafunktion $\Gamma(\alpha+1)$.
3. Verwendung der Eigenschaft $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

Bestimmung der Varianz $\mathbb{V}(X)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 * \frac{x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} * e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha+1} * e^{-\lambda x} dx \\ &\overset{1}{=} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha+1} * e^{-u} \frac{du}{\lambda} = \frac{\lambda^{\alpha}}{\lambda^{\alpha+2}\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} u^{\alpha+1} * e^{-u} du \\ &\overset{2}{=} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} \overset{3}{=} \frac{(a+1)a\Gamma(\alpha)}{\lambda^2\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha^2+\alpha}{\lambda^2}\end{aligned} \tag{116}$$

<u>Rechenschritte:</u>

1. Substitution: $u = \lambda x$
2. Das Integral entspricht der Definition der Gammafunktion $\Gamma(\alpha+2)$.
3. Verwendung der Eigenschaft $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{\alpha^2+\alpha}{\lambda^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha^2+\alpha-\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{a}{\lambda^2} \tag{117}$$

29 Aufgabe 5

X hat eine gemischte Verteilung mit Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x^2/4 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases} \tag{118}$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion und die Dichte, den Erwartungswert und die Varianz von X.
Die Dichte entspricht der Ableitung der Verteilung:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x/2 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{für } x \geq 2 \end{cases} \tag{119}$$

Die Dichtefunktion ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion in $\mathbb{R}$.
Der Erwartungswert wird wie folgt berechnet:

$$\mathbb{E}(x) = \int_{-} \infty^{\infty} x f(x) dx -> \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx + \int_1^2 \frac{x}{2} dx == \frac{x^3}{6}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 == \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{11}{12} = \mathbb{E}(x) \tag{120}$$

Die Varianz berechnet sich durch folgende Formel

$$\mathbb{V}(x) = \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2 \tag{121}$$

Zunächst muss dafür $\mathbb{E}(x^2)$ berechnet werden.

$$\mathbb{E}(x^2) = \int_{-} \infty^{\infty} x^2 f(x) dx -> \int_0^1 \frac{x^3}{2} dx + \int_1^2 \frac{x^2}{2} dx == \frac{x^4}{8}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{6}\Big|_1^2 == \frac{1}{8} + \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{31}{24} = \mathbb{E}(x^2) \tag{122}$$

Nun kann die Varianz berechnet werden.

$$\mathbb{V}(x) = \frac{31}{24} - \left(\frac{11}{12}\right)^2 = \frac{65}{144} = 0.45138 \tag{123}$$

30 Aufgabe 6

Eine zweidimensionale Normalverteilung hat die Dichte (mit |p|< 1):

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2*\pi*\sqrt{(1-p^2)}} * exp\left(-\frac{x^2 - 2pxy + y^2}{2(1-p^2)}\right) \tag{124}$$

Weisen Sie nach, dass es sich dabei tatsächlich um eine Dichte handelt, bestimmen Sie die Randdichten von X und Y und die bedingte Dichte von Y unter X = x.
Um eine Dichte handelt es sich wenn das Integral der Funktion gleich 1 ist. Es folgt der Beweis für den Fall $p = 0$, die Aussage kann dadurch aber auch für alle $|p| < 1$ getroffen werden, da dieses lediglich die Form der Kurve aber nicht das Volumen verändert.

$$\frac{1}{2\pi} * \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy \tag{125}$$

Bei der Integration von e^{x2} stößt man schnell auf die Fehlerfunktion $erf(x)$. Diese hat (unter anderem) folgende Eigenschaften:

$$\lim_{x->\infty} erf(x) = 1und \lim_{x->-\infty} erf(x) = -1 \tag{126}$$

Ausgestattet mit diesem Wissen kann die Integration der Dichte erfolgen.

$$\frac{1}{2\pi} * \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy = \frac{1}{2\pi} * \frac{\sqrt{(\pi)}}{\sqrt{(2)}} * erf\left(\frac{x}{\sqrt{(2)}}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \tag{127}$$

Es ist nun schon ersichtlich das dich die Fehlerfunktion zu den beiden Fällen $-1, +1$ auflöst und sich der Faktor π mit dem Faktor $\sqrt{(\pi)}$ kürzt. Wir integrieren nun auch nach y und sehen weiter:

$$\frac{1}{2*\sqrt{(2*\pi)}} * \frac{\sqrt{(\pi)}}{\sqrt{(2)}} * erf\left(\frac{x}{\sqrt{(2)}}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} * erf\left(\frac{y}{\sqrt{(2)}}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty} \tag{128}$$

Mit einem weiteren Kürzen des führenden Faktors und dem Einsetzen der Limits für die Fehlerfunktion ergeben sich folgende 4 Fälle:

$$\frac{1}{4} * \lim_{x->\infty} erf\left(\frac{x}{\sqrt{(2)}}\right) * \lim_{x->\infty} *erf\left(\frac{y}{\sqrt{(2)}}\right) - \frac{1}{4} * \lim_{x->-\infty} erf\left(\frac{x}{\sqrt{(2)}}\right) * \lim_{x->\infty} erf\left(\frac{y}{\sqrt{(2)}}\right) - \tag{129}$$

$$\frac{1}{4} * \lim_{x->\infty} erf\left(\frac{x}{\sqrt{(2)}}\right) * \lim_{x->-\infty} erf\left(\frac{y}{\sqrt{(2)}}\right) + \frac{1}{4} * \lim_{x->-\infty} erf\left(\frac{x}{\sqrt{(2)}}\right) * \lim_{x->-\infty} erf\left(\frac{y}{\sqrt{(2)}}\right) \tag{130}$$

Die Limits können nun aufgelöst werden, es ergibt sich:

$$\frac{1}{4} * 1 * 1 - \frac{1}{4} * (-1) * 1 - \frac{1}{4} * 1 * (-1) + \frac{1}{4} * (-1) * (-1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \tag{131}$$

Der Beweis ist damit erbracht. Nun zur Berechnung der Randdichten:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \tag{132}$$

Für Die Randdichte von X ergibt sich:

$$f_X(x) = \frac{1}{2*\pi*\sqrt(1-p^2)} * \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{x^2-2pxy+y^2}{2(1-p^2)}\right)dy \tag{133}$$

zu:

$$\frac{1}{2*\pi*\sqrt(1-p^2)} * \sqrt(\frac{\pi*(p^2-1)}{2}) * -exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) * erfi\left(\frac{px-y}{\sqrt(2(p^2-1))}\right) \tag{134}$$

Die imaginäre Fehlerfunktion die hier nun benötigt wird, ist definiert durch:

$$erfi(x) = \frac{erf(i*x)}{i} \tag{135}$$

Auch lässt sich in Term 2 ein i herausheben wodurch sich dieser mit Term 1 folgendermaßen kürzt:

$$\frac{1}{2*\pi*\sqrt(1-p^2)} * \sqrt(-1)\sqrt(\frac{\pi*(1-p^2)}{2}) = \frac{i}{2*\sqrt(2*\pi)} \tag{136}$$

Setzt man nun nun für erfi die Definition ein, so kürzen sich diese beiden i's und es ergibt sich am Ende:

$$f_X(x) = \frac{-1}{2*\sqrt(2*\pi)} * exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) * erf\left(\frac{-(px-y)}{\sqrt(2(1-p^2))}\right) \tag{137}$$

Gegengleich ergibt sich die Randdichte von Y:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2*\pi*\sqrt(1-p^2)} * \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{x^2-2pxy+y^2}{2(1-p^2)}\right)dx \tag{138}$$

zu:

$$f_Y(y) = \frac{-1}{2*\sqrt(2*\pi)} * exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) * erf\left(\frac{-(py-x)}{\sqrt(2(1-p^2))}\right) \tag{139}$$

Die Bedingte Dichte von Y unter X = x ergibt sich aus:

$$f(y \mid X = x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \tag{140}$$

In diesem Beispiel ist die Bedingte Dichte gleich:

$$\frac{\frac{1}{2*\pi*\sqrt(1-p^2)} * exp\left(-\frac{x^2-2pxy+y^2}{2(1-p^2)}\right)}{\frac{-1}{2*\sqrt(2*\pi)} * exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) * erf\left(\frac{-(px-y)}{\sqrt(2(1-p^2))}\right)} \tag{141}$$

Diese lässt sich noch ein wenig kürzen zu:

$$-\frac{\sqrt(2)}{\sqrt(\pi(1-p^2))} * exp\left(-\frac{x^2-2pxy+y^2}{2(1-p^2)}+\frac{x^2}{2}\right) * \frac{1}{erf\left(\frac{-(px-y)}{\sqrt(2(1-p^2))}\right)} \tag{142}$$

31 Aufgabe 7

X und Y haben die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x,y) = (x+y)[0 \leq x,y \leq 1].$$

überzeugen Sie sich davon, dass es sich um eine Dichte handelt, und bestimmen Die den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

Es handelt sich um eine Dichte da das Integral über $\int_0^1 \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$ ergibt.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_0^1 (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + [xy]_0^1\,dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\,dy + \int_0^1 y\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}y\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

Bevor die benötigten Erwartungswerte und Varianzen bestimmt werden können, müssen zuerst die Dichten $f_Y(y)$ und $f_X(x)$ bestimmt werden.

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy = xy + \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = x + \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^1 (x+y)\,dx = xy + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = y + \frac{1}{2}$$

Damit können nun alle für die Bestimmung der Korrelazionskoeffizienten benötigten Erwartungswerte und Varianzen bestimmt werden.

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 f_X(x)x\,dx = \int_0^1 (x+\frac{1}{2})x\,dx = \int_0^1 x^2 + \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 f_Y(y)y\,dy = \int_0^1 (y+\frac{1}{2})y\,dy = \int_0^1 y^2 + \frac{y}{2}\,dy = \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})\,dx = \int_0^1 x^3 + \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \int_0^1 y^2 f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y^2(y+\frac{1}{2})\,dy = \int_0^1 y^3 + \frac{y^2}{2}\,dy = \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2y + xy^2\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}y^2\Big|_0^1 dy$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2\,dy = \frac{1}{3}\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$$

Mit diesem Werten, kann nun zuerst die Kovarianz der beiden Zufallsvariablen bestimmt werden.

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} - \frac{49}{144} = -\frac{1}{144}$$

Und anschließend der Korrelationskoeffizient.

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}} = \frac{-\frac{1}{144}}{\frac{11}{144}} = -\frac{1}{11}$$

32 Aufgabe 8

In einer Urne befinden sich je drei schwarze, weiße und graue Kugeln. Es werden drei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen, X sei die Anzahl der weißen, Y die der schwarzen Kugeln. Bestimmen Sie den Korrelationskoeffizienten von X und Y.

In diesem Fall kann auf die Ergebnisse der fünften Aufgabe des letzten Übungsblattes zurückgegriffen werden. Dort haben wir sowohl eine Formel sowie die einzelnen Wahrscheinlichktiswerte für genau diese Situation bestimmt.

	Y				
X	0	1	2	3	p_X
0	$\frac{1}{84}$	$\frac{9}{84}$	$\frac{9}{84}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{20}{84}$
1	$\frac{9}{84}$	$\frac{27}{84}$	$\frac{9}{84}$	0	$\frac{45}{84}$
2	$\frac{9}{84}$	$\frac{9}{84}$	0	0	$\frac{18}{84}$
3	$\frac{1}{84}$	0	0	0	$\frac{1}{84}$
p_Y	$\frac{20}{84}$	$\frac{45}{84}$	$\frac{18}{84}$	$\frac{1}{84}$	1

Allerdings reichen die Formeln für die Randverteilungen der Zufallsvariablen für die Bestimmung der Erwartungswerte und Varianzen.

$$F_X(x) = \frac{\binom{3}{x}\binom{9-3}{3-x}}{84} \quad [0 \leq x \leq 3]$$

$$F_Y(y) = \frac{\binom{3}{y}\binom{9-3}{3-y}}{84} \quad [0 \leq y \leq 3]$$

In beiden Fällen handelt es sich um eine hypergeometrische Verteilung. Erwartungswerte und Varianzen immer nuranhand der Variable X berechnet, da die beiden Zufallsvariablen die gleiche Randverteilung besitzen.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(X)&=\sum_{n=0}^{3} n\frac{\binom{3}{n}\binom{9-3}{3-n}}{84}=0\cdot\frac{20}{84}+1\cdot\frac{45}{84}+2\cdot\frac{18}{84}+3\cdot\frac{1}{84}\\
&=\frac{45+36+3}{84}=\frac{84}{84}=1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^2)=\mathbb{E}(X^2)&=1\cdot\frac{45}{84}+2^2\cdot\frac{18}{84}+3^2\cdot\frac{1}{84}=1\cdot\frac{45}{84}+4\cdot\frac{18}{84}+9\cdot\frac{1}{84}\\
&=\frac{45+72+9}{84}=\frac{126}{84}=\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY)&=(1\cdot 1)\frac{27}{84}+(1\cdot 2)\frac{9}{84}+(1\cdot 2)\frac{9}{84}=\frac{27}{84}+\frac{18}{84}+\frac{18}{84}\\
&=\frac{63}{84}=\frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{V}(Y)=\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}
$$

Damit kann nun auch die Kovarianz und der Korrelationskoeffizient bestimmt werden.

$$
Cov(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}
$$

$$
\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}
$$

Übung 5

Feedback: 69/80 (nice.)
Schöne Lösungen für Beispiele 1-7 mit ein paar Kleinigkeiten. Der heuristische Ansatz in Beispiel 8 ist falsch, stattdessen z.B. die Standardiesierung der richtige Ansatz gewesen wäre. Der Teil a, in der Beispiel 3 ist fehlerhaft und im Teil b, wurde mehrmals $\sum$ statt $\prod$ geschrieben, obwohl das Ergebnis richtig ist. Bei Beispiel 1 kann t beliebige reelle Zahl sein (Kleinigkeit). In der Beispiel 2 fehlt das Endergebnis (Kleinigkeit). Bei Aufgabe 7 ist in der Formel (1) ein Schreibfehler ist unterlaufen (Kleinigkeit).

33 Aufgabe 1

Bestimmen Sie die die Momentenerzeugende $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{Xt})$ der Gammeverteilung.

Die Gammaverteilung wird beschrieben durch

$$\Gamma(\alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\lambda x}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{Xt}) &= \int_0^\infty e^{xt} \cdot \Gamma(\alpha, \lambda)\, dx \\
&= \int_0^\infty e^{xt} \cdot \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\lambda x}\, dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x(\lambda-t)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot dx \\
&= \int_0^\infty e^{-u} \cdot \left(\frac{u}{\lambda - t}\right)^{\alpha-1} \cdot \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{1}{\lambda - t}\, du \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha \int_0^\infty e^{-u} u^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, du \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha \int_0^\infty e^{-x(\lambda-t)} x^{\alpha-1} (\lambda - t)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, dx \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha \quad \text{für} \quad t < \lambda
\end{aligned}$$

34 Aufgabe 2

Bestimmen Sie die die Momentenerzeugende $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{Xt})$ der Poissonverteilung.

Die Poissonverteilung wird beschrieben durch

$$P(\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{Xt}) \\ &= \sum_{x=0} e^{xt} p_X(x) \\ &= \sum_{x=0} e^{xt} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \end{aligned}$$

Jetzt mit der Substitution:

$$a = \lambda e^t$$

erhalten wir den Potenzreihenausdruck für die Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} &\sum_{x=0} a^x x! \\ &= e^a = e^{\lambda e^t} \end{aligned}$$

35 Aufgabe 3

Bei einem Spiel kann auf die Ausgänge $1,...,m$ gesetzt werden, die mit Wahrscheinlichkeiten $p_1,...,p_m$ gezogen werden. Wenn Ausgang i gezogen wird, werden die Einsätze auf i m-fach zurückgezahlt, die anderen verfallen. Ein Spieler spielt nach folgender Strategie:

Er verteilt sein Kapital K im Verhältnis $q_1 : ... : q_m$ (mit $\sum_i q_i = 1$) auf die möglichen Ausgänge und verwendet den Gewinn aus einer Runde als Einsatz in der nächsten.

a) Zeigen Sie, dass das Kapital nach n (unabhängigen) Runden

$$K_n = K_0 X_1 ... X_n$$

ist, mit

$$\mathbb{P}(X_i = mq_j) = p_j$$

Wird n-mal gespielt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Ausgang j gezogen wird weiterhin p_j.
Das darauf gesetzte Kapital berechnet sich aus dem erspielten Kapital der vorherigen Runde mit $K_{n-1} * p_j$.
Der ausgezahlte Gewinn kann in der n-ten Runde also via $K_{n-1} p_j * m$ ermittelt werden.
Dies führt uns zur Verteilung mit folgender Formel:

$$X_n = \frac{K_n}{K_{n-1}}$$

b) bestimmen Sie

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{n} * log(K_n)$$

Durch Aufgabe a) geht hervor, dass in Runde n der Spieler das Kapital K_n hat und in der nächsten Runde das Kapital $K_{n+1} = K_n * q_{i_n} * m$.

Daraus ergibt sich:

$$K_n = K_0 * \sum_{t=1}^{n} (q_{i_t} * m)$$

und somit

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}*log(K_n) &= \lim_{x\to\infty}[\frac{1}{n}*log(K_0*\sum_{t=1}^{n}(q_{i_t}*m))] \\
&= \lim_{x\to\infty}[\frac{1}{n}(log(K_0)+n*log(m)+\sum_{t=1}^{n}log(q_{i_t}))] \\
&= \lim_{x\to\infty}[\frac{1}{n}(log(K_0))+\frac{1}{n}(n*log(m))+\frac{1}{n}(\sum_{t=1}^{n}log(q_{i_t}))] \\
&= \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{n}(log(K_0)))+\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{n}(n*log(m)))+\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{n}(\sum_{t=1}^{n}log(q_{i_t}))) \\
&= 0+log(m)+\sum_{t=1}^{n}p_i*log(q_i) \\
&= log(m)+\sum_{t=1}^{n}p_i*log(q_i)
\end{aligned}
$$

Dies ist aufgrund des Gesetzes der großen Zahlen möglich, welches folgenden Umformungsschritt erlaubt, da es sich bei $\sum_{t=1}^{n} log(q_{i_t})$ um eine Summe von unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen handelt:

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{n}(\sum_{t=1}^{n}log(q_{i_t})))=\sum_{t=1}^{n}p_i*log(q_i)$$

c) Wie sind $q_1,...,q_m$ zu wählen, damit dieser Grenzwert maximal wird?

Zur Maximierung wird das Lagrange-Verfahren genutzt
Zielfunktion: $f(q_1,q_2,...,q_m)=\sum_{i=1}^{m}p_i*log(q_i)=MAX$
Nebenbedingung: $g(q_1,q_2,...,q_m)=\sum_{i=1}^{m}q_i-1=0$

Lagrange-Funktion: $L(q_1,q_2,...,q_m,\lambda)=\sum_{i=1}^{m}p_i*log(q_i)+\lambda*(\sum_{i=1}^{m}q_i-1)$

Extremstellen bestimmen:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial q_1}=\frac{p_1}{q_1}-\lambda=0 \\
&\frac{\partial L}{\partial q_2}=\frac{p_2}{q_2}-\lambda=0 \\
&... \\
&\frac{\partial L}{\partial q_m}=\frac{p_m}{q_m}-\lambda=0 \\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\sum_{i=1}^{m}q_i-1=0
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich, dass das Verhältnis zwischen p_j und q_j konstant gleich λ ist.

$$\lambda = \frac{p_j}{q_j} \to q_i = \frac{p_j}{\lambda}$$
$$\sum_{i=1}^{m} q_i = 1 \to \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{\lambda} = 1 \to \lambda = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

Sofern $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ kann also $q_i = p_i$ gewählt werden.

Ist aber $\sum_{i=1}^{m} p_i < 1$, so muss $q_i = \frac{p_i}{\sum_{j=1}^{m} p_j}$ gewählt werden, um die Nebenbedingung nicht zu verletzen.

36 Aufgabe 4

Ein Weg zur Erzeugung von (näherungsweise) standardnormalverteilten Zufallszahlen: $U_1,...,U_{12}$ seien unabhängig gleichverteilt auf $[0,1]$.
Dann ist $X = U_1 + ... + U_{12} - 6$ näherungsweise standardnormalverteilt
(auf den ersten Blick erscheint n = 12 zu klein, um die Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes zu rechtfertigen. Die Näherung ist aber recht gut: Φ und die Verteilungsfunktion von X unterscheiden sich um maximal 0.002336).

Der zentrale Grenzwertsatz sagt aus, dass eine Summe von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen näherungsweise normalverteilt ist. Diese Summe ist bei diesem Beispiel als X gegeben.
Zur Verifizierung der Standardnormalverteilung muss Erwartungswert und Varianz überprüft werden.

Benötigte Werte:

$$\mathbb{E}(U_i) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}(U_i^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{V}(U_i) = \mathbb{E}(U_i^2) - \mathbb{E}(U_i)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Erwartungswert:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{12} \mathbb{E}(U_i) - 6 \\ &= 12 * \frac{1}{2} - 6 \\ &= 0\end{aligned}$$

Varianz:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \sum_{i=1}^{12} \mathbb{V}(U_i) \\ &= 12 * \frac{1}{12} \\ &= 1\end{aligned}$$

37 Aufgabe 5

Ein Würfel wird 1000 mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen kleiner als 3400 ist.

Erwartungswert und Varianz für die Augensumme von einem Würfel ergibt sich wie folgt:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} w_k * \mathbb{P}(X = w_k) = \frac{1}{6} * \sum_{k=1}^{6} w_k = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = \mu$$

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{k=1}^{6} (w_k - \mathbb{E}(X))^2 * \mathbb{P}(X = w_k) = \frac{1}{6} * \sum_{k=1}^{6} (w_k - \frac{7}{2})^2 = \frac{35}{12} = \sigma^2$$

Annäherung durch den zentralen Grenzwertsatz.

$$\mathbb{P}(X < 3400) \approx \Phi(\frac{3400 - 1000 * \mu}{\sqrt{n * \sigma^2}}) = \Phi(-\frac{100}{54.006}) = \Phi(-1.852) = 0.032 = 3.2\%$$

38 Aufgabe 6

Wie oft muss man würfeln, um mit Wahrscheinlichkeit 0.9 mindestens 100 Sechsen zu erhalten (rechnen Sie näherungsweise mit dem zentralen Grenzwertsatz: das führt zu einer Quadratischen Gleichung für n).

Zentraler Grenzwertsatz:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x) = \Phi(x)$$

Einen wichtigen Sonderfall bildet die Binomialverteilung: Wenn wir $X_n \sim A(p)$ setzen, dann ist $S_n \sim B(n,p)$, und der zentrale Grenzwertsatz sagt uns, dass die Binomialverteilung für großes n durch eine Normalverteilung $N(np, np(1-p))$ approximiert werden kann.

Da ein Würfel eine Binomialverteilungen aufweist tritt dieser Sonderfall ein. Erwartungswert und Varianz können wie folgt ermittelt werden:
$\mu = \mathbb{E}(x) = np = \frac{n}{6}$
$\sigma^2 = \mathbb{V}(x) = np(1-p) = n * \frac{1}{6} * \frac{5}{6} = \frac{5n}{36}$

X ist die Anzahl der Sechsen die Binomialverteilt B(n,1/6) sind und mit Hilfe der Normalverteilung N(n/6, 5n/36) angenähert wird. Da eine diskrete Verteilung durch eine stetige angenähert wird muss zudem noch eine Stetigkeitskorrektur $\mathbb{P}(X \geq 100 - 0.5)$ durchgeführt werden.

$$\begin{aligned} 0.9 =& \mathbb{P}(X \geq 100) = 1 - \sum_{i=0}^{100} \binom{n}{i} (\frac{1}{6})^i * (\frac{5}{6})^{100-i} = \mathbb{P}(X \geq 99.5) \\ \approx& 1 - \Phi(\frac{99.5 - n/6}{\sqrt{n * 5/36}}) = \Phi(-\frac{99.5 - n/6}{\sqrt{n * 5/36}}) \end{aligned}$$

$$\Phi(-\frac{99.5 - n/6}{\sqrt{n * 5/36}}) = 0.9$$

Mittels der Tabelle für die Quantile z_p der Standardnormalverteilung lässt sich das Quantil $z_{0.90}$ ermittlen.

$$-\frac{99.5 - n/6}{\sqrt{n * 5/36}} = z_{0.90} = 1.28$$

$$\frac{(n-597)^2}{n * 5} = 1.6384$$

$$n^2 - 1202.19 * n + 356409 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{1202.192}{2} \pm \sqrt{361316 - 356409} = 601.096 \pm 70.053$$

Wird in die ursprünglichen Gleichung eingesetzt so ergibt sich für die Anzahl der benötigten Würfe, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.9 mindestens 100 Sechsen gewürfelt werden, der folgender Wert.

$$n = 601.096 + 70.053 = 671.15 \approx 672 \text{ Würfe}$$

39 Aufgabe 7

Die Frage nach der Anzahl der Würfe, die nötig sind, um mit Wahrscheinlichkeit 0.9 mindestens 100 Sechsen zu erhalten, kann man auch so lösen: diese Anzahl ist negativ binomialverteilt, und diese negative Binomialverteilung kann als Summe von unabhängigen geometrischen verteilten Zufallsvariablen (jeweils die Wartezeit bis zur nächsten Sechs) dargestellt werden. Wenden Sie auf diese Summe den zentralen Grenzwertsatz an und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem aus dem vorigen Beispiel.
Die Anzahl der Würfe ist also negativ Binomialverteilt $(NB(100, 1/6)$. Der Erwartungswert μ liegt bei 600 und die Varianz $\sigma^2 = 3000$. Unter Beachtung der Stetigkeitskorrektur, kann der zentrale Grenzwertsatz wie folgt eingesetzt werden.

$$0,9 = \Phi\left(\frac{n + 599,5}{\sqrt{3000}}\right), \tag{143}$$

Für n ergibt sich daraus:

$$n = 599,5 + 1,28 * \sqrt{3000} = 669,6 \tag{144}$$

Es muss also 670 Mal gewürfelt werden um mit 90% Wahrscheinlichkeit 100 Sechsen gewürfelt zu haben.

40 Aufgabe 8

Wie oft muss man Würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen größer als 100 ist, mindestens 0.9 beträgt?
Hierfür lohnt es sich zunächst zu überlegen, ab wievielen Würfen überhaupt eine Möglichkeit besteht bzw. ab wann die Summe der Augenzahlen auf jeden Fall 100 betragen muss.
Die obere Grenze ist recht simpel, da bei jedem Wurf mindestens eine 1 gewürfelt wird, beträgt die Wahrscheinlichkeit nach 100 Würfen gleich 1. Die untere Grenze wiederum ergibt sich wenn man sich umgekehrt überlegt ab wie vielen Würfen, wo immer eine 6 erzielt wird, die 100 erreicht sind. Für die Rechung $100/6$ ergibt sich 16,67. dH ab 17 Würfen besteht überhaupt eine Chance eine Summe von 100 erreicht zu haben.
Da es sich in diesem Fall bei jedem Wurf um eine unabhängige Zufallsvariable handelt, kann angenommen werden das die Verteilungsfunktion zwischen 17 und 100 einer kummulierten Normalverteilung entspricht. Das bedeutet wiederum dass sich Werte für den Erwartungswert und das Sigma berechnen lassen. Für die Berechnung des Sigma wiederum kann angenommen werden, dass bei einem Abstand von 3*Sigma vom Erwartungswert, die Funktion in etwa 0 ist. Dh Sigma sollte so gewählt werden, dass bei den Werten 17 bzw. 100 3*Sigma liegt.

$$\mu = \frac{100-17}{2} + 17 = 83/2 + 17 = 58,53 * \sigma = \mu - 17 = 41,5 \rightarrow \sigma = \frac{41,5}{3} = 13,83$$

Nun ist die Form der Verteilungsfunktion bekannt. Mithilfe der inversen PDF kann nun herausgefunden werden, ab wievielen Würfen die Wahrscheinlichkeit größer als 0,9 ist.

$$\text{invPDF}(0,9) \text{ mit } \mu = 58,5 \text{ und } \sigma = 13,83 \rightarrow n = 77$$

Es sind also mindestens 77 Würfe notwendig um mit 90% Wahrscheinlichkeit eine Summe der Augenzahlen von 100 zu würfeln.

Übung 6

Feedback: 73/80
Die meisten Beispiele wurden schön gelöst. Bei Beispiel 4 fehlt den Vergleich und ein kleiner Berechnungsfehler ist unterlaufen. In der Beispiel 8 wurde eine andere Aufgabe gelöst. Bei Beispiel 1 kann das Ergebnis noch weiter vereinfacht werden (Kleinigkeit).

41 Aufgabe 1

$X_1 \ldots X_n$, sind die Stichprobe einer Verteilung mit der Dichte:

$$f(x,\Theta) = \Theta * x^{\Theta-1}[0 \leq x \leq 1][\Theta > 0] \tag{145}$$

Bstimmen Sie den Momentenschätzer und den Maximum-Likelyhood-Schätzer.
Der Momentenschätzer kann über folgenden Zusammenhang bestimmt werden:

$$\mathbb{E}_\Theta(x) = m(\Theta) -> \hat{\Theta}_n = m^{-1}(\bar{X}_n) \tag{146}$$

Zunächst muss also der Erwartungswert berechnet werden:

$$\mathbb{E}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x * f_X(x)dx -> \int_0^1 x * \Theta * x^{\Theta-1}dx -> \Theta * \int_0^1 x^\Theta -> \frac{\Theta}{\Theta+1} = m(\Theta) \tag{147}$$

Dies kann nun in die Beziehung $\hat{\Theta}_n = m^{-1}(\bar{X}_n)$ eingesetzt werden um den Momentenschätzer für $\hat{\Theta}_n$ zu berechnen.

$$\bar{X}_n = \frac{\hat{\Theta}_n}{\hat{\Theta}_n+1} -> \bar{X}_n*(\hat{\Theta}_n+1) = \hat{\Theta}_n -> \bar{X}_n*\hat{\Theta}_n+\bar{X}_n-\hat{\Theta}_n = 0 -> \hat{\Theta}_n*(\bar{X}_n+1) = -\bar{X}_n -> \hat{\Theta}_n = \frac{\hat{\Theta}_n}{1-\hat{\Theta}_n} \tag{148}$$

Nun zum Maximum-Likelyhood-Schätzer. Dieser berechnet sich wie folgt:

$$L(X_1 \ldots X_n, \Theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\Theta(X_i) \tag{149}$$

Wir setzen ein und vereinfachen. Das Produkt ist dabei auch in Folge durch den Faktor Π substituiert.

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\Theta * X_i^{\Theta-1}\right) -> \Theta^n * \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\Theta-1} = \Theta^n * \Pi^{\Theta-1} = L(X_1 \ldots X_n, \Theta). \tag{150}$$

Nun werden beide Seiten nach Θ abgeleitet und gleich Null gesetzt.

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta} = \frac{\partial \Theta^n * \Pi^{\Theta-1}}{\partial \Theta} = \Pi^{\Theta-1} * \Theta^n * \log(\Pi) + n * \Theta^{n-1} * \Pi^{\Theta-1} = 0 -> \Theta^{n-1} * \Pi^{\Theta-1} * (\Theta * \log(\Pi) + n) = 0 \tag{151}$$

$$\Theta * \log(\Pi) + n = 0 -> \Theta = \frac{-n}{\log(\Pi)} -> \frac{-n}{\log\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)} \tag{152}$$

42 Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schätzer für den Parameter λ einer Poissonverteilung und zeigen Sie, dass er effizient ist.

Zur Wiederholung ist Poissonverteilung wie folgt definiert.

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}$$

Setzt man diese in die Likelihoodfunktion ein und logarithmiert so bekommt man folgendes.

$$\begin{aligned}
L(X_1, ..., X_n; \Theta) &= \prod_{i=1}^{n} f_\Theta(X_i) \\
L &= \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!} \cdot e^{-\lambda} \\
\log(L) &= \sum_{i=1}^{n} \log(\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!} \cdot e^{-\lambda}) \\
\log(L) &= \sum_{i=1}^{n} \log(\frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}) + \log(e^{-\lambda}) \\
\log(L) &= \sum_{i=1}^{n} \log(\lambda^{X_i}) - \log(X_i!) + \log(e^{-\lambda}) \\
\log(L) &= \sum_{i=1}^{n} \log(\lambda^{X_i}) - \log(X_i!) - \lambda \\
\log(L) &= \log(\lambda) \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \log(X_i!) - n\lambda
\end{aligned}$$

Wenn wir nun diesen Term ein mal nach λ ableiten und gleich null setzen, so bekommen wir den Maximum-Likelihood-Schätzer. Außerdem sehen wir, dass der Term auch ein weiteres Mal abgeleitet werdenm kann.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log(L)}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} X_i - n &= 0 \\
\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} X_i &= n \\
\lambda &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \\
\hat{\lambda}_n &= \overline{X}_n
\end{aligned}$$

Weiters werden der Erwartungswert und die Varianz des Schätzers bestimmt.

$$\mathbb{E}(\hat{\lambda}_n) = \mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lambda = \frac{1}{n}\cdot n\lambda = \lambda$$
$$\mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) = \mathbb{V}(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\lambda = \frac{\lambda}{n}$$

Da $\mathbb{E}(\hat{\lambda}_n) = \lambda$ gilt, ist der Schätzer erwartungstreu. Es reicht nur mehr über die Cramer-Ramero-Schranke zu zeigen, dass er auch effizient ist.

$$I_n(\lambda) = -\mathbb{E}(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\log(L)) = -\mathbb{E}(-\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}X_i) = \frac{1}{\lambda^2}\cdot n\lambda = \frac{n}{\lambda}$$

$$\mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) \geq \frac{1}{I_n(\lambda)}$$
$$\frac{\lambda}{n} \geq \frac{\lambda}{n}$$

Damit ist der Schätzer effizient.

43 Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Maximum Likelihood Schaetzer fuer den Parameter einer Exponentialverteilung mit der Dichte

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} \tag{153}$$

und zeigen Sie dass er effizient ist.

Die Likelihoodfunktion ist:

$$\begin{aligned}
&L(x_1,...,x_n,\theta)\\
&= \Pi_{i=1}^n f_\theta(x_i)\\
&= \Pi_{i=1}^n \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}\\
&= \frac{1}{\theta^n}e^{\sum_{i=1}^n \frac{-x_i}{\theta}}
\end{aligned}$$

Nehmen wir den Logarithmus davon:

$$\begin{aligned}
&ln(L)\\
&= ln(\frac{1}{\theta^n}e^{\sum_{i=1}^n \frac{-x_i}{\theta}})\\
&= ln(\frac{1}{\theta^n}) + \sum_{i=1}^n \frac{-x_i}{\theta}\\
&= -nln(\theta) - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta}
\end{aligned}$$

Die erste Ableitung von der Log-Likelihood ist:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\theta}ln(L)\\
&= \frac{-n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta^2}
\end{aligned}$$

und die zweite Ableitung:

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta^2}{\delta\theta^2}ln(L)\\
&= \frac{n}{\theta^2} - \sum_{i=1}^n \frac{2x_i}{\theta^3}
\end{aligned}$$

Setzen wir die erste Ableitung gleich 0, um das Maximum zu finden:

$$
\begin{aligned}
\frac{-n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta^2} &= 0 \\
\iff \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta^2} &= \frac{n}{\theta} \\
\iff \sum_{i=1}^{n} x_i &= n\theta \\
\iff \theta &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i
\end{aligned}
$$

Also bekommen wir als Schätzer:

$$\hat{\theta}_n = \bar{x}_n \tag{154}$$

Als Erwartungswert haben wir:

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\theta}_n) &= E(\bar{x}_n) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\theta) \\
&= \theta
\end{aligned}
$$

Also ist der Schätzer Erwartungstreu.
Die Varianz wird:

$$
\begin{aligned}
V(\hat{\theta}_n) = V(\frac{1}{n}\sum_{i=1} nx_i) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1} nV(x_i) \\
&= \frac{1}{n^2} n\theta^2 = \frac{\theta^2}{n}
\end{aligned}
$$

Die Fisher-Information:

$$
\begin{aligned}
I_n(\theta) &= -E(\frac{\delta^2}{\delta\theta^2} ln(L(X_1,...,X_n,\theta))) \\
&= -E(\frac{n}{\theta^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i}{\theta^3}) \\
&= \frac{-n}{\theta^2} + \frac{2n\theta}{\theta^3} = \frac{n}{\theta^2}
\end{aligned}
$$

Daher ist der Schätzer auch effizient, da $V(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{I_n(\theta)}$

44 Aufgabe 4

$(X_1,...,X_n)$ sei eine Stichprobe einer Gleichverteilung auf $[0,\theta]$. Der Maximum Likelihood Schätzer für θ ist, wie in der Vorlesung gezeigt wurde, $T = max(X_1,...,X_n)$, und der Schätzer $\hat{\theta}_n = \frac{n+1}{n}T$ ist effizient. Bestimmen Sie seine Varianz und vergleichen Sie sie mit der des Momentenschätzers.
Die Verteilungsfunktion des **Maximum Likelhood Schätzers** ist:

$$F_{\hat{\theta}_n}(x) = P(X_1 < xund...undX_n < x) \tag{155}$$
$$= (\frac{z}{\theta})^n (wenn 0 < x < \theta) \tag{156}$$

Die Dichtefunktion finden wir indem wir die Verteilungsfunktion ableiten:

$$f_{\hat{\theta}_n}(x) = \frac{d}{dx}F_{\hat{\theta}_n}(x) \tag{157}$$
$$= \frac{nx^{n-1}}{\theta^n} \tag{158}$$

und damit die Varianz:

$$E(\hat{\theta}_n) = \int_0^\theta x\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx \tag{159}$$
$$= \frac{nx^{n+1}}{(n+1)\theta^n}\Big|_0^\theta \tag{160}$$
$$= \frac{n\theta}{n+1} \tag{161}$$
$$\tag{162}$$
$$E(\hat{\theta}_n^2) = \int_0^\theta x^2\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx \tag{163}$$
$$= \frac{nx^{n+2}}{(n+2)\theta^n}\Big|_0^\theta \tag{164}$$
$$= \frac{n\theta^2}{n+2} \tag{165}$$
$$\tag{166}$$
$$V(\hat{\theta}_n) = E(\hat{\theta}_n^2) - E(\hat{\theta}_n)^2 \tag{167}$$
$$= \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} \tag{168}$$
$$= \frac{4n^2+n}{n^3+4n^2+5n+2}\theta^2 \tag{169}$$

Betrachten wir jetzt den **Momentenschätzer**:

$$M_X(t) = \int_0^\theta \frac{e^{tx}}{\theta} dx \tag{170}$$

$$= \frac{1}{\theta t} e^{tx}\Big|_0^\theta \tag{171}$$

$$= \frac{1}{\theta t} e^{t\theta} - \frac{1}{t\theta} e^0 \tag{172}$$

$$= \frac{e^{t\theta} - 1}{t\theta} \tag{173}$$

Wenn wir die Funktion zwei mal ableiten:

$$\frac{\delta^2}{\delta t^2} M_X(t) = \frac{t^2\theta^2 e^{\theta t} - 2t\theta e^{\theta t} + e^{\theta t} + 2\theta t}{t^3\theta} \tag{174}$$

und nach dreifacher Verwendung der Regel von l'Hopital

$$\frac{2\theta^3 e^{\theta t} + 4t\theta^4 e^{\theta t} + t^2\theta^5}{6\theta} \tag{175}$$

bekommt man $E(X^2) = \frac{\theta^2}{3}$ wenn man t=0 einsetzt.
Wenn wir die erzeugende Funktion nur einmal ableiten bekommen wir den Erwartungswert $E_\theta(X) = \frac{\theta}{2}$
und daher $V_\theta(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\theta^2}{12}$
Mit dem Erwartungswert bekommen wir den Momentenschätzer:

$$E_\theta(X) = m(\theta) = \frac{\theta}{2} \tag{176}$$

$$\tilde{\theta}_n = m^{-1}(\bar{X}_n) = 2\bar{X}_n \tag{177}$$

Und die Varianz dessen:

$$V(\tilde{\theta}_n) = V(2\bar{X}_n) = 4V(\bar{X}_n) = \frac{4}{n} V(X) = \frac{4}{n}\frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n} \tag{178}$$

45 Aufgabe 5

In einer Stichprobe von 100 Punschtrinkern hatten 20 alkoholfreien Punsch. Bestimmen Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Anteil des alkoholfreien Punsches an der verkauften Menge.

Für die Bestimmung der Grenzen des Konfidenzintervalls wird die Formel für das approximative Konfidenzintervall genutzt:

$$\begin{aligned}
p_u &= \hat{p} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} * \sqrt{\frac{\hat{p} * (1-\hat{p})}{n}} \\
&= 0.2 - 1.96 * \sqrt{\frac{0.2 * (1-0.2)}{100}} \\
&= 0.2 - 1.96 * 0.04 \\
&= 0.122
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_o &= \hat{p} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} * \sqrt{\frac{\hat{p} * (1-\hat{p})}{n}} \\
&= 0.2 + 1.96 * \sqrt{\frac{0.2 * (1-0.2)}{100}} \\
&= 0.2 + 1.96 * 0.04 \\
&= 0.278
\end{aligned}$$

Die eingesetzten Werte lassen sich großteils aus dem Text herauslesen:

$$\begin{aligned}
n &= 100 \\
x &= 20 \\
\hat{p} &= \frac{x}{n} = 0.2
\end{aligned}$$

Lediglich $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ muss aus einer Tabelle herausgelesen werden, welche sich z.B. im Anhang des Skriptums findet.

Durch das Konfidenzniveau von 95%, ergibt sich: $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

46 Aufgabe 6

Bestimmen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatzes ein approximatives Konfidenzintervall für den Parameter einer Exponentialverteilung mit der Dichte

$$f(x,\theta) = \frac{1}{\theta} * e^{-\frac{x}{\theta}}$$

Dazu wird zuerst ein Schätzer für diese Funktion ermittelt. Dies geschieht mittels Likelihood-Methode:
Likelihood-Funktion $L(\theta)$:

$$\begin{aligned} L(\theta) = &= \prod_{i=1}^{n} f(x,\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} * e^{-\frac{x}{\theta}} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} * \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{x}{\theta}} \\ &= \frac{1}{\theta^n} * e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}} \end{aligned}$$

Log-Likelihood-Funktion $ln(L(\theta))$:

$$\begin{aligned} ln(L(\theta)) &= ln(\frac{1}{\theta^n} * e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}}) \\ &= ln(\frac{1}{\theta^n}) + ln(e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}}) \\ &= -n * ln(\theta) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} \end{aligned}$$

Score-Funktion:

$$\begin{aligned} S(\theta)) &= \frac{\partial ln(L(\theta)}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} - n * ln(\theta) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} \\ &= -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} \end{aligned}$$

Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}$ finden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial ln(L(\theta)}{\partial \theta} &\stackrel{!}{=} 0 \\
\frac{\partial}{\partial \theta} - n * ln(\hat{\theta}) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\theta}} &= 0 \\
-\frac{n}{\hat{\theta}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\theta}^2} &= 0 \quad | * \hat{\theta}^2 \\
-\hat{\theta} * n + \sum_{i=1}^{n} x_i &= 0 \quad | - \sum_{i=1}^{n} x_i \\
-\hat{\theta} * n &= -\sum_{i=1}^{n} x_i \quad | * (-\frac{1}{n}) \\
\hat{\theta} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \\
\hat{\theta} &= \bar{X}_n
\end{aligned}$$

Maximum überprüfen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 ln(L(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}^2} &\stackrel{!}{<} 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial \hat{\theta}^2} - n * ln(\hat{\theta}) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\theta}} &< 0 \\
\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} - \frac{n}{\hat{\theta}} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\theta}^2} &< 0 \\
\frac{n}{\hat{\theta}^2} - \frac{2 * \sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\theta}^3} &< 0 \quad | \hat{\theta} = \bar{X}_n \\
\frac{n}{\bar{X}_n^2} - \frac{2 * \sum_{i=1}^{n} x_i}{\bar{X}_n^3} &< 0 \quad | X_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n * \bar{X}_n \\
\frac{n}{\bar{X}_n^2} - \frac{2n * \bar{X}_n}{\bar{X}_n^3} &< 0 \\
\frac{n}{\bar{X}_n^2} - \frac{2n}{\bar{X}_n^2} &< 0 \quad | * \bar{X}_n^2 \\
n - 2n &< 0 \\
-n &< 0 \\
n &> 0
\end{aligned}$$

Erwartungswert des Schätzers:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\hat{\theta}) &= \int_0^\infty x * f(x,\theta)dx \\ &= \frac{1}{\theta} * \int_0^\infty x * e^{-\frac{x}{\theta}} \\ &= \frac{1}{\theta} * \theta^2 \\ &= \theta\end{aligned}$$

Varianz des Schätzers:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(\hat{\theta}) &= \mathbb{E}(\hat{\theta}^2) - \mathbb{E}(\hat{\theta})^2 \\ &= 2 * \theta^2 - (\theta)^2 \\ &= \theta^2\end{aligned}$$

Fisher-Information:

$$\begin{aligned}I(\theta) &= -\mathbb{E}(\frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta}) \\ &= -\mathbb{E}(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2}) \\ &= -\mathbb{E}(\frac{n}{\theta^2} - \frac{2 * \sum_{i=1}^n x_i}{\theta^3}) \quad | \theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \sum_{i=1}^n x_i = n * \theta \\ &= -(\frac{n}{\theta^2} - \frac{2n * \theta}{\theta^3}) \\ &= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^2} \\ &= \frac{n}{\theta^2}\end{aligned}$$

Somit ist $\hat{\theta}$ ein erwartungstreuer Schätzer, dessen Varianz mit der Cramer-Rao-Schranke übereinstimmt, und der daher effizient ist.

Wir dieser Schätzer, welcher nach dem zentralen Grenzwertsatz näherungsweise normalverteilt ist, als Ausgangspunkt genommen, kann folgende Formel für das asymptotische Konfidenzintervall genutzt werden:

$$\bar{X}_n \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} * \sqrt{\frac{\bar{X}_n^2}{n}}$$

Dabei ist zu erwähnen, dass θ^2 in der Varianz durch den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}$ ersetzt wurde.

47 Aufgabe 7

Bestimmen Sie für die folgende Stichprobe einer Normalverteilung
0.7 1.3 1.2 1.5 1.8 0.9 1.1 1.4 1.9 1.7
95%-Konfidenzintervalle für μ und σ^2.

Ermittlung des Stichprobenmittels und der Stichprobenvarianz:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{13.5}{10} = 1.35$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1.365}{9} = 0.1517$$

Ermittlung des Konfidenzintervalls mit der Überdeckungswahrscheinlichkeit von $\gamma = 0.95$ für μ:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{X}_n - c \leq \mu \leq \overline{X}_n + c\right) &= \mathbb{P}\left(-c \leq \overline{X}_n - \mu \leq c\right) \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{c}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq \frac{c}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) \\
&= 2 * \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) - 1 = \gamma = 0.95
\end{aligned}$$

Daraus lässt sich nun durch folgende Umformungen der Wert von c ermitteln.

$$\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) = \frac{1+\gamma}{2}$$

$$c = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} * \Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} * z_{\frac{1+\gamma}{2}}$$

Da die Varianz nicht bekannt ist wird sie durch S_n^2 ersetzt und statt $z_{\frac{1+\gamma}{2}}$ die t-Verteilung $t_{n-1,\frac{1+\gamma}{2}}$ verwendet.

$$c = \sqrt{\frac{S_n^2}{n}} * t_{n-1,\frac{1+\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{0.1517}{10}} * 2.262 = 0.2786$$

Daraus ergibt sich für den Mittelwert μ:

$$\mu = \overline{X}_n \pm c = 1.35 \pm 0.2786 = [1.0714, 1.6286]$$

Zur Ermittlung der Varianz muss nun von der Stichprobenvarianz ausgegangen werden. Es wird ein Konfidenzintervall in der Form $[aS_n^2, bS_n^2]$ angesetzt.

$$\mathbb{P}\left(aS_n^2 \leq \sigma^2 \leq aS_n^2\right) = \mathbb{P}\left(\frac{n-1}{b} \leq \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \leq \frac{n-1}{a}\right) = \lambda = 0.95$$

Nun wird die Fehlerwahrscheinlichkeit $1-\lambda$ symmetrisch aufgeteilt. σ^2 soll also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1-\lambda}{2}$ unter der linken Schranke und mit der gleichen Wahrscheinlichkeit über der rechten liegen.

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} < \frac{n-1}{b}\right) = \frac{1-\lambda}{2}$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} > \frac{n-1}{a}\right) = \frac{1-\lambda}{2} \Longleftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \leq \frac{n-1}{a}\right) = \frac{1+\lambda}{2}$$

Da $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ eine Chiquadratverteilung ist können a und b durch deren Quantile ausgedrückt werden.

$$\frac{n-1}{a} = \chi^2_{n-1;\frac{1+\lambda}{2}}$$

$$\frac{n-1}{b} = \chi^2_{n-1;\frac{1-\lambda}{2}}$$

Daraus ergibt sich schließlich das Konfidenzintervall für σ^2:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \left[\frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;\frac{1+\gamma}{2}}}, \frac{(n-1)S_n^2}{\chi^2_{n-1;\frac{1-\gamma}{2}}}\right] = \left[\frac{9*0.1517}{\chi^2_{9;0.975}}; \frac{9*0.1517}{\chi^2_{9;0.025}}\right] \\ &= \left[\frac{1.3653}{19.023}, \frac{1.3653}{2.700}\right] = [0.0718, 0.5057]\end{aligned}$$

48 Aufgabe 8

(X1; : : : ;Xn) ist eine Stichprobe einer Normalverteilung mit $\mu = \sigma^2 = \theta$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ.

Die Normalverteilung $N(\mu,\sigma^2)$ besitzt die Dichte.

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta^2}} e^{\frac{-(x-\theta)^2}{2\theta^2}}$$

Das ergibt folgende Likelihoodfunktion.

$$L(X_1,\dots,X_n;\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)^n}} \exp(-\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

Zur Bestimmung des Maximums wird die Nullstellen der Ableitung gesucht.

$$\log(L(X_1,\dots,X_n;\mu,\sigma^2)) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - n\log(\sigma) - \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

Ableiten nach μ und nach σ:

$$\frac{\partial \log(L(X_1,\dots,X_n;\mu,\sigma^2))}{\partial\mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu - X_i}{\sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \log(L(X_1,\dots,X_n;\mu,\sigma^2))}{\partial\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{\sigma^3} = 0$$

Nullsetzen der ersten Ableitung ergibt den Maximum-Likelihood Schätzer:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mu - X_i}{\sigma^2} = 0 \Longleftrightarrow n\mu - \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Longleftrightarrow \hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n$$

$$-\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{\sigma^3} = 0 \Longleftrightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2$$

Übung 7

Feedback: 80/80
Alles korrekt und schön gelöst. Nur bei Beispiel 4 ist die Schlussfolerung unrichtig, obwohl die Lösung selbst korrekt ist.

49 Aufgabe 1

Gegeben ist die folgende Stichprobe einer Normalverteilung
0.7 1.3 1.2 1.5 1.8 0.9 1.1 1.4 1.9 1.7
Testen Sie die Nullhypothese $\mu \leq 1.0$ gegen $\mu > 1.0$.

Schätzer für μ ist der Stichprobenmittelpunkt $\overline{X}_n$. Dieser ist normalverteilt mit $N(\mu, \sigma^2/n)$. Es wird der kritische Wert c gesucht, womit die Hypothese $\mu < 1.0$ verworfen werden kann sobald $\overline{X}_n < c$ gilt.

Ermittlung des Stichprobenmittels und der Stichprobenvarianz.

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{13.5}{10} = 1.35$$

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1.365}{9} = 0.1517$$

Bestimmung von c:

$$\alpha = \mathbb{P}_{\mu_0}(\overline{X}_n \leq c) = \Phi(\frac{c - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}})$$

Daraus folgt:

$$\frac{c - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}} = z_\alpha = -z_{1-\alpha}$$

Daraus ergibt sich die Teststatistik T, die eine Standardnormalverteilung mit dem kritischer Wert z_α aufweist. Da die Varianz unbekannt ist, wird sie durch die Stichprobenvarianz geschätzt.

$$T = \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2/n}} = \frac{1.35 - 1.0}{\sqrt{0.1517/10}} = 2.842$$

Von dieser Teststatistik ist die exakte Verteilung, eine t-Verteilung mit n-1 Freiheitsgraden, bekannt. Daher wird die Nullhypothese verworfen sobald $T < t_{n-1,\alpha} = -t_{n-1,1-\alpha}$ gilt.

$$t_{9;0.95} = 1.833$$

Daraus folgt

$$T = 2.842 > t_{9;0.95} = 1.833$$

Die Nullhypothese $\mu \leq 1.0$ wird daher verworfen.

Prüfung mittels Technologieeinsatz in R:
Die Stichprobe wurde mithilfe der t.test Funktion in R ausgewertet.

```
data:  stichp
t = 2.842, df = 9, p-value = 0.9903
alternative hypothesis: true mean is less than 1
95 percent confidence interval:
     -Inf 1.575753
sample estimates:
mean of x
     1.35
```

Die p-Value = 0.9903 sagt aus, dass die Nullhypothese auf jedem Signifikanzniveau verwerfen müssen, dass darunter liegt, also bei fast jedem gängigen außer 0.995.

50 Aufgabe 2

Gegeben sei folgende Stichprobe
1.5 2.1 1.3 1.7 2.2 1.1 1.9 0.9 1.4 1.6
1.8 1.7 2.3 1.8 1.6 2.0 1.7 2.1 1.8 1.7
einer Normalverteilung. Testen Sie $H_0 : \mu = 1.5$ gegen die zweiseitige Alternative.

In erster Linie müssen wir das Stichprobenmittel und die Stichprobenvarianz bestimmen.

$$
\begin{aligned}
n &= 20 \\
\overline{X}_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 1.71 \\
S_n^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2 = \frac{1}{19} \cdot 2.398 = 0.12621
\end{aligned}
$$

Weiters setzen wir das Signifikanzniveau auf $\alpha = 0.05$.
Bei dem Testen gegen eine zweiseitige Alternative wird die Nullhypothese verworfen wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

$$|T| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$$

In diesem Beispiel gilt daher folgendes.

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2/n}} = \frac{1.71 - 1.5}{\sqrt{S_n^2/20}} = 2.6435 \\
t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}} &= t_{19;0.0975} = 2.093 \quad \text{entnommen aus } \textit{Anhang A Tabellen} \text{ des Skriptums}
\end{aligned}
$$

Die Nullhypothese wird also verworfen da

$$T = 2.6435 > 2.093 = t_{19;0.0975}$$

51 Aufgabe 3

Testen Sie im vorherigen Beispiel $H_0 : \sigma^2 \leq 0.1$ gegen $H_1 : \sigma^2 > 0.1$.

Zur Erinnerung haben wir im letzten Beispiel folgende Werte bestimmt.

$$\begin{aligned} n &= 20 \\ S_n^2 &= 0.12621 \\ \alpha &= 0.05 \end{aligned}$$

Weiters wissen wir, dass die Nullhypothese in diesme Fall verworfen wird wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

$$T > \chi_{n-q;1-\alpha}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_n^2} = \frac{19 \cdot S_n^2}{0.1} = 23.9799 \\ \chi^2_{19;0.95} &= 30.144 \quad \text{entnommen aus } \textit{Anhang A Tabellen} \text{ des Skriptums} \end{aligned}$$

Daher sehen wir, dass in diesem Fall die Nullhypothese angenommen wir da folgendes gilt.

$$T = 23.9799 < 30.144 = \chi^2_{19;0.95}$$

52 Aufgabe 4

Für eine Stichprobe aus einer Normalverteilung ist $n = 100; \bar{X_n} = 20,5; S_n^2 = 9$. Überprüfen Sie mittels t-Test die Hypothesen: $H_0 : \mu = 20, H_1 : \mu > 20$
Für die Fehlerwahrscheinlichkeit wurde $\alpha = 0,05$ gewählt.
Zunächst wird der T-Wert berechnet:

$$T = \frac{X_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2/n}} = \frac{0,5}{\sqrt{9/100}} = \frac{0,5 * 10}{3} = 1,6\bar{6}. \tag{179}$$

Um die Nullhypothese anzunehmen muss dieser Wert größer als der kritische t-Wert laut Tabelle, sein.

$$t_{crit} = t_{n-1;\alpha} = t_{99;0,05} \tag{180}$$

In besagter Tabelle findet sich jedoch lediglich ein Wert für $n = 100$. Dieser ist mit genau $1,66$ jedoch niedriger als der berechnete T-Wert. Auch der nächst-niedrige Eintrag in der Tabelle bei $n = 95$ ist mit $1,62$ niedriger.

$$t_{crit} = t_{99;0,05} = [1,62...1,66] < 1,6\bar{6} = T \tag{181}$$

Die Nullhypothese wird daher angenommen.

53 Aufgabe 5

Testen Sie im vorigen Beispiel gegen die zweiseitige Hypothese.

Um die Nullhypothese zu verwerfen sollte gelten:

$$|T| > t_{krit} \tag{182}$$

Mit der gleichen Rechnung wie in der Aufgabe 4, bekommen wir die Teststatistik:

$$T = 1,6\bar{6} \tag{183}$$

Mit $\alpha = 0.05$ bekommen wir (aus der Tabelle) als kritischen Wert:

$$t_{krit} = t_{n-1;1-\alpha/2} = t_{99;0,975} \approx t_{100;0,975} = 1,984 \tag{184}$$

In diesem Fall gilt offensichtlich $|T| < t_{krit}$, also wird die Nullhypothese angenommen.

54 Aufgabe 6

Testen Sie im vorigen Beispiel die Hypothese $\sigma^2 = 12$ gegen die zweiseitige Alternative.

$$H_0 : \sigma^2 = 12 \tag{185}$$
$$H_1 : \sigma^2 \neq 12 \tag{186}$$

Unseres statistisches Test wird:

$$T = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma_0^2} = \frac{99 \cdot 9}{12} = 74.25 \tag{187}$$

Wir verwerfen die Null-hypothese wenn:

$$T < \chi^2_{n-1;1-\alpha} = \chi^2_{99;0,975} \tag{188}$$

oder:

$$T > \chi^2_{n-1;\alpha} = \chi^2_{99;0,025} \tag{189}$$

Aus der Tabelle bekommen wir den Näherungswerte:
$\chi^2_{100;0,975} = 74,222$ (n.b. $\chi^2_{99;0,975} < \chi^2_{100;0,975}$, also eine Überschätzung) und
$\chi^2_{90;0,025} = 118,136$ (n.b. $\chi^2_{99;0,025} > \chi^2_{90;0,025}$, also eine Unterschätzung)

Da T offensichtlich zwischen den zwei kritischen Werten liegt, können wir die Null-Hypothese *nicht* verwerfen .

55 Aufgabe 7

Bei einer Umfrage werden 100 Personen befragt, 29 geben eine positive Antwort. Testen Sie $H_0 : p = 0.2$ gegen $H_1 : p > 0.2$.

Teststatistik:

$$\begin{aligned} T &= \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} \\ &= \frac{0.29 - 0.2}{\sqrt{0.2 * (1-0.2)/100}} \\ &= \frac{0.9}{\sqrt{0.2 * 0.8/100}} \\ &= 2.25 \end{aligned}$$

Test:

$$H_0 : p = 0.2 gegen H_1 : p > 0.2 : verwerfen, wenn T > z_{1-\alpha}$$

$$\begin{aligned} T &> z_{1-\alpha} \quad |\alpha = 5T & > z_{0.95} \\ 2.25 &> 1.645 \end{aligned}$$

H_0 wird daher verworfen

56 Aufgabe 8

Wie groß ist im vorigen Beispiel die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art, wenn p = 0.25 bzw. p = 0.35 ist?

Für die Wahrscheinlichkeit wird die Normalapproximation verwendet.

Dazu muss berechnet werden ab welchem Wert für von $\hat{p}$, die $H_0 - Hyptohese$ verworfen wird. Diesen Wert bezeichnen wir als $\hat{p}_n$

$$\frac{\hat{p}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} = 1.645$$
$$\hat{p}_n = 1.645 * \sqrt{p_0(1-p_0)/n} + p_0$$
$$\hat{p}_n = 1.645 * \sqrt{0.29(1-0.29)/100} + 0.29$$
$$\hat{p}_n = 0.266$$

D.h. H_0 wird verworfen, wenn $\hat{p}_n > 0.266$, somit wird die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art zu $\mathbb{P}(\hat{p}_n \leq 0.266)$.

p = 0.25

$$\Phi(\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{p*(1-p)/100}})$$
$$= \Phi(\frac{0.266 - 0.25}{\sqrt{0.25*(1-0.25)/100}})$$
$$= 0.644$$

p = 0.35

$$\Phi(\frac{\hat{p}_n - p}{\sqrt{p*(1-p)/100}})$$
$$= \Phi(\frac{0.266 - 0.35}{\sqrt{0.35*(1-0.35)/100}})$$
$$= 0.039$$

Übung 8

Feedback: 80/80
Alles korrekt gelöst und sehr schön ausgeführt. Danke. Es gibt zwei Kleinigkeiten. Im Beispiel 3 sind beide Klassen aperiodisch und im Beispiel 8a ist auch zu erwähnen, dass die Aufenthaltsdauer exponentiell verteilt ist.

57 Aufgabe 1

Eine Markovkette mit drei Zuständen hat die Übergangsmatrix A

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die t-stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert für $t \to \infty$
Eigenwerte bestimmen:

$$\begin{aligned} A * \vec{v} &= \lambda * \vec{v} \\ A * \vec{v} - \lambda * \vec{v} &= 0 = (A - \lambda * E) * v \\ det(A - E * \lambda) &= 0 \\ det \begin{pmatrix} 0.7-\lambda & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7-\lambda & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= \frac{2}{5} \\ \lambda_3 &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

und folglich die Eigenvektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Für diagonale Matrizen gilt

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} x^n & 0 & 0 \\ 0 & y^n & 0 \\ 0 & 0 & z^n \end{pmatrix}$$

und

$$A = X * D * X^{-1}$$

wobei X die Matrix aus den (Spalten-) Eigenvektoren und D die Diagonalmatrix der Eigenwerte ist.

Somit lässt sich folgende Gleichung aufstellen

$$A^t = X * D^t * X^{-1}$$
$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1^t & 0 & 0 \\ 0 & 0.6^t & 0 \\ 0 & 0 & 0.4^t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}^{-1}$$

Mit dem Grenzwert $t \to \infty$ ergibt sich somit folgende Matrix für A

$$\lim_{t\to\infty} A^t = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.417 & 0.333 \\ 0.25 & 0.417 & 0.333 \\ 0.25 & 0.417 & 0.333 \end{pmatrix}$$

b) Es sei P(X(0) = 1) = 0.4, P(X(0) = 2) = P(X(0) = 3) = 0.3).
Bestimmen Sie die Verteilungen von X(1) und X(2).

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\pi * A = \pi_1 = \begin{pmatrix} 0.34 & 0.38 & 0.28 \end{pmatrix}$$
$$\pi_1 * A = \pi_2 = \begin{pmatrix} 0.304 & 0.418 & 0.278 \end{pmatrix}$$

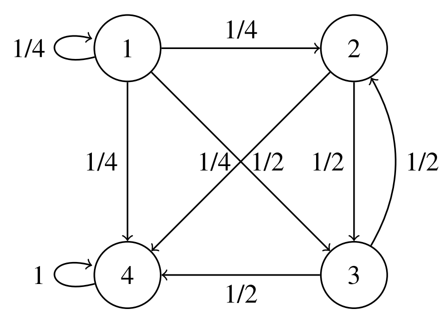
58 Aufgabe 2

Eine Markovkette mit vier Zuständen hat die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Klassen von verbundenen Zuständen, die t-stufigen Übergangsmatrizen und ihren Grenzwert $t \to \infty$ sowie die mittleren Absorptionszeiten.

Klassen von verbundenen Zuständen:
Die Übergangsmatrix kann auch durch folgendes Zustandsdiagramm dargestellt werden.



Die Klassen von verbundenen Zuständen werden mittels identifizieren der kommunizierenden Zustandspaare festgestellt. Der gegebene Phasenraum lässt sich in folgende Klassen zerlegen:

- Klasse 1: {1}
- Klasse 2: {2,3}
- Klasse 3: {4}

Diese Klassen können durch folgende Eigenschaften weiter beschrieben werden.
Periodisch/Aperiodisch:

- aperiodische Klassen: Klasse 1 und Klasse 3 (standardmäßig)
- periodische Klassen: Klasse 2 mit d =2

Transient/Rekurrent

- transiente Klassen: Klasse 1 und Klasse 2 (haben ausgehenden Übergänge)
- spezielle rekurrente Klasse bestehend aus einem absorb. Zustand: Klasse 3

t-stufige Übergangsmatrizen und ihr Grenzwert:
Die t-stufigen Übergangsmatrizen können aus der gegebenen Übergangsmatrix **P** mit Hilfe der spektralen Zerlegung der Matrix **P** bestimmt werden.

$$P = U \Lambda U^{-1}$$

wobei die Diagonalmatrix Λ aus den Eigenwerten der Matrix **P** besteht und die Spaltenvektoren der Matrix **U** die rechten Eigenvektoren sind. Für diese Zerlegung müssen zunächst die Eigenwerte sowie die Eigenvektoren von P ermittelt werden. Es wird mit der Ermittlung der Eigenwerte begonnen.

$$\lambda * I_4 - P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & \lambda & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & \lambda & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

Durch die Bestimmung der Determinante ergibt sich ein quadratisches Polynom mit 4 Nullstellen.

$$\det(\lambda * I_4 - P) = (\lambda - 1)(\lambda - 1/4)(\lambda^2 - 1/4)$$

Die Nullstellen der Determinante sind nun die 4 Eigenwerte: 1, 1/2, -1/2, 1/4. Daraus können nun die rechten Eigenvektoren berechnet werden.

$$(1 * I_4 - P)\mathbf{u_1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \mathbf{u_1} = \mathbf{0}$$

Der zu $\lambda = 1$ gehörige rechte Eigenvektor ist (1, 1, 1, 1).

$$(1/2 * I_4 - P)\mathbf{u_2} = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} * \mathbf{u_2} = \mathbf{0}$$

Der zu $\lambda = 1/2$ gehörige rechte Eigenvektor ist (2, 1, 1, 0).

$$(-1/2 * I_4 - P)\mathbf{u_3} = \begin{pmatrix} -3/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix} * \mathbf{u_3} = \mathbf{0}$$

Der zu $\lambda = -1/2$ gehörige rechte Eigenvektor ist (0, 1, -1, 0).

$$(1/4 * I_4 - P)\mathbf{u_4} = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/4 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/4 \end{pmatrix} * \mathbf{u_4} = \mathbf{0}$$

Der zu $\lambda = 1/4$ gehörige rechte Eigenvektor ist (1, 0, 0, 0).

Die Übergangsmatrix P lässt sich als wie folgt aufteilen. Die Inverse der Eigenvektoren wurde mittels Technologieeinsatzes ermittelt.

$$P = U\lambda U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus kann auch recht einfach das Ergebnis für P^t berechnet werden.

$$P^t = U\Lambda^t U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1/2)^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1/4)^t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^{t+1}} * \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(-2)^{t+1}} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4^t} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für $t \to \infty$ ergibt sich folgender Grenzwert für P^t, da alle anderen Summanden die Potenz im Nenner haben und für $t \to \infty$ gegen Null gehen.

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} P^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mittlere Absorptionszeiten:
Der Spaltenvektor der mittleren Zeit bis zur Absorption kann wie folgt berechnet werden.

$$t = (I - T)^{-1} e$$

$$T = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - T = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (I - T)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$t = (I - T)^{-1} e = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

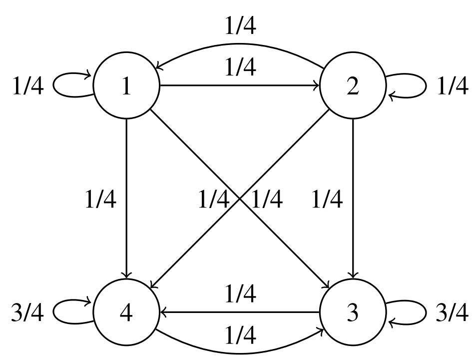
59 Aufgabe 3

Eine Markovkette mit 4 Zuständen hat die Übergangsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Benennen sie die verschiedenen Klassen von verbundenen Zuständen und berechnen sie die t-stufigen Übergangsmatrizen sowie den Zustand bei $t \to \infty$.

Klassen von verbundenen Zuständen:
Die Übergangsmatrix kann auch durch folgendes Zustandsdiagramm dargestellt werden.



Die Klassen von verbundenen Zuständen werden mittels identifizieren der kommunizierenden Zustandspaare festgestellt. Der gegebene Phasenraum lässt sich in folgende Klassen zerlegen:

- Klasse 1: {1,2}
- Klasse 2: {3,4}

Diese Klassen können durch folgende Eigenschaften weiter beschrieben werden.
Periodisch/Aperiodisch:

- aperiodische Klassen: gibt es in diesem Fall keine
- periodische Klassen: Klasse 2 mit d =2

Transient/Rekurrent

- transiente Klassen: Klasse 1 (hat ausgehende Übergänge)
- rekurrente Klassen: Klasse 2 (hat keine ausgehenden Übergänge)

Berechnung der t-stufigen Übergangsmatrizen sowie den Zustand bei $t \to \infty$ Um die Übergangsmatrizen mit der Formel $P^t = U\Lambda^t U^{-1}$ bestimmen zu können müssen in erster Linie die Eigenwerte sowie -vektoren bestimmt werden.

$$\det \begin{vmatrix} \lambda - 1/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & \lambda - 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & \lambda - 3/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & \lambda - 3/4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} \qquad \lambda_3 = \frac{1}{2} \qquad \lambda_4 = 0$$

$$v_1 = (1,1,1,1) \qquad v_2(0,0,-1,1) \qquad v_3 = (1,1,0,0) \qquad v_4 = (-1,1,0,0)$$

Damit können nun die Matrizen U und U^{-1} bestimmt werden und die t-stufigen Übergangsmatrizen bestimmt werden.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^t = U\Lambda U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (\frac{1}{2})^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + (\frac{1}{2})^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^t} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Damit ergibt sich für den Zustand für $t \to \infty$ folgendes.

$$\lim_{t\to\infty} P^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

60 Aufgabe 4

Eine faire Münze wird geworfen. Die binäre Zufallszahl $X(t)$ ergibt sich aus den 3 vorhergehenden Würfen $t, t+1, t+2$.

a) Die Werte von $X(t)$ können als Markovkette betrachtet werden. Bestimme für diese die Übergangsmatrix.
Die Übergangsmatrix lässt sich logisch mit der Überlegung berechnen, das jedes mögliche Trippel an Würfen durch zwei weitere Trippel gefolgt wird, weil der nächste Wurf entweder eine Null oder eine Eins sein kann. Der Folge 000 die dem Zustand "0" entspricht, kann entweder die Folge 001 oder 000 folgen. Also entweder dem Zustand "1" oder "0". Jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/2$.
Führt man diese Überlegung fort so ergibt sich folgende Matrix für die Zustände (0,...,7):

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b)
Die mittlere Anzahl der Würfe bis die Folge 111 bzw. der Zustand "7" erreicht wird kann ermittelt werden indem der Zustand "7" zu einem absorbierenden Zustand gemacht wird. Anschließend kann die mittleren Absorptionszeiten berechnet werden. Der Spaltenvektor der mittleren Zeit bis zur Absorption kann wie folgt berechnet werden.

$$t = (I - T)^{-1} e$$

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Spaltenvektor für t wurde mittels Technologieeinsatzes berechnet.

$$t = [14, 12, 14, 8, 14, 12, 14]^T$$

Die mittlere Zeit bis zur Absorption ist nun das arithmetische Mittel aus den verschiedenen mittleren Absorptionszeiten. Für den Zustand "7" gilt $t_7 = 0$.

$$t_{111} = \frac{1}{8} * \sum_{i=0}^{7} t_i = 11$$

Da zum Startzeitpunkt bereits drei Würfe angenommen wurden, werden im Mittel $3 + 11 = 14$ Würfe benötigt bis die Folge 111 auftritt.

61 Aufgabe 5

Eine Markovkette mit vier Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger

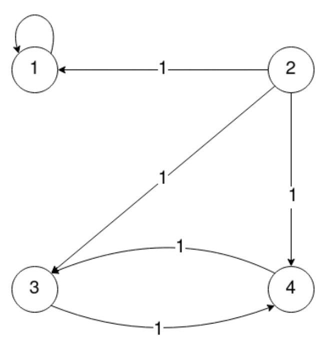
$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Klassen von kommunizierenden Zuständen, die Übertragungsmatrix $P(t)$ und ihren Grenzwert $t \to \infty$ sowie die mittleren Absorbtionszeiten.

Klassen bestimmen
Die Zustände der CTMC kann man bei diesem Erzeuger in 3 Klassen teilen.

- Zustand $\{1\}$ - absorbierend wegen $q_{11} = 0$
- Zustand $\{2\}$ - transient
- Zustände $\{3,4\}$ - rekurrent

Die Eigenschaften dieser Klassen werden auch durch das Zustandsdiagramm besser ersichtlich.



Übertragungsmatrix und ihr Grenzwert bei $t \to \infty$
Um die Übertragungsmatrix $P(t)$ bestimmen zu können müssen in erster Linie die Eigenwerte und -vektoren bestimmt werden.

$$\det \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 6\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = -2 \qquad \lambda_3 = 0 \qquad \lambda_4 = 0$$

$$v_1 = (0,1,0,0) \qquad v_2 = (0,0,-1,1) \qquad v_3 = (-2,0,1,1) \qquad v_4 = (3,1,0,0)$$

Damit können nun alle Matrizen für die Formel $P(t) = E\Lambda E^{-1}$ erstellt werden.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(t) = E \cdot \Lambda \cdot E^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_4 t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} + e^{\lambda_3 t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. + e^{\lambda_4 t} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 & 6 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(e^{-3t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Nun kann $P(t)$ für $t \to \infty$ ermittelt werden.

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Mittlere Absorbtionszeiten

Wie es im Zustandsdiagramm gut ersichtlich ist gibt es in diesem Beispiel zwei Klassen welche absorbierend sind. Zum einen die Klasse 1 und zum anderen die rekurrente Klasse 3,4, welche ebenfalls nicht verlassen werden kann. Daher könnte man im besten Fall nur eine mittlere Absorbtionszeit für den Zustand 2 mit $m_2 = \frac{1}{3}$ bestimmen, wobei alle anderen Zustände eine mittlere Absorbtionszeit von $m_1 = m_3 = m_4 = 0$ besitzen.

62 Aufgabe 6

Eine Markovkette mit drei Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix P(t) und ihre Grenzwert für $t \to \infty$.

Um die Übertragungsmatrix $P(t)$ bestimmen zu können, müssen in erster Linie die Eigenwerte sowie -vektoren bestimmt werden.

$$\det \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda+3 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 8\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = -4 \qquad \lambda_2 = -2 \qquad \lambda_3 = 0$$

$$v_1 = (-1, -5, 3) \qquad v_2 = (-1, 1, 1) \qquad v_3 = (1, 1, 1)$$

Damit kann nun die Formel $P(t) = E\Lambda E^{-1}$ verwendet werden.

$$E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad E^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(t) = E \cdot \Lambda \cdot E^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(e^{\lambda_1 t} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} + e^{\lambda_2 t} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + e^{\lambda_3 t} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left(e^{-4t} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} + e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Und letzendlich $P(t)$ für $t \to \infty$ ermittelt werden.

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

63 Aufgabe 7

Eine Markovkette mit fünf Zuständen hat den infinitesimalen Erzeuger

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie Absorptionswahrscheinlichkeiten im Absorptionszustand 1 und die mittleren Absorptionszeiten.

Lösung:

Zustand 0 ist auch Absorptionszustand, daher bekommen wir:

$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$

und mit Einsetzen:

$$\begin{aligned} 0 = a_0 + 2a_1 - 4a_2 + a_4 &\iff -4a_2 + a_4 = -2 \\ 0 = a_1 + a_2 - 3a_3 + a_4 &\iff -a_2 + 3a_3 - a_4 = 1 \\ 0 = a_1 + a_2 - 3a_4 &\iff -a_2 + 3a_4 = 1 \end{aligned}$$

Wenn man das Gleichungssystem löst, bekommt man für die Absorptionswahrscheinlichkeiten:

$$a_2 = \frac{7}{11}$$
$$a_3 = \frac{24}{33}$$
$$a_4 = \frac{6}{11}$$

Gleichfalls für die Absorptionszeiten:

$$m_0 = 0 = m_1$$
$$m_2 = \frac{4}{11}$$
$$m_3 = \frac{20}{33}$$
$$m_4 = \frac{5}{11}$$

64 Aufgabe 8

Bei einem Taxistandplatz kommen Taxis nach einem Poissonprozess mit Rate λ an, die Kunden nach einem Poissonprozess mit Rate μ. Taxis, die ankommen, wenn schon ein Taxi wartet, fahren weiter, und dasselbe gilt für die Kunden. Es handelt sich hier um eine Markovkette mit drei Zuständen (leer, ein Taxi wartet, ein Kunde wartet). Zur Zeit t = 0 ist der Stand leer.
(a) Bestimmen Sie die Verteilung der Zeit, bis der Stand besetzt ist.
(b) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung.

Das Prozess ist äquivalent zu einem Geburts/Todes Prozess mit 3 Zuständen:
0 wenn eine Person wartet,
1 wenn der Stand Leer ist,
2 wenn ein Taxi wartet.

Dieses Prozess a hat den Erzeuger:

$$Q_a = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -\mu-\lambda & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

(a)

Wenn wir Zustand 0 und 2 als absorbierende Zustände setzen, bekommen wir als Absorptionszeit:

$$m_0 = 0 \tag{190}$$

$$m_2 = 0 \tag{191}$$

$$1 + (-\mu - \lambda)m_1 = 0 \iff m_1 = \frac{1}{\mu + \lambda} \tag{192}$$

m_1 ist dann die Zeit bis der Stand besetzt ist (da am Anfang der Stand leer ist)
(b)

Um die stationäre Verteilung zu finden, wollen wir die Gleichung $\pi Q_a = 0$ lösen. Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$-\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \iff \pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \tag{193}$$

$$\lambda\pi_1 - \mu\pi_2 = 0 \iff \pi_2 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_1 = \frac{\lambda^2}{\mu^2}\pi_0 \tag{194}$$

$$\lambda\pi_0 - \mu\pi_1 - \lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \tag{195}$$

Daraus bekommen wir für π:

$$\pi = \begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \pi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_0 & \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 & \frac{\lambda^2}{\mu^2}\pi_0\end{pmatrix} \tag{196}$$

Damit das aber eine Verteilung ist, muss gelten:

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \tag{197}$$

$$= \pi_0 + \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 + \frac{\lambda^2}{\mu^2}\pi_0 = 1 \tag{198}$$

$$\tag{199}$$

Daraus folgt die stationäre Verteilung (Person wartet, Leer, Taxi wartet) :

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2}} \tag{200}$$

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 = \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda} + 1 + \frac{\lambda}{\mu}} \tag{201}$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_1 = \frac{1}{\frac{\mu^2}{\lambda^2} + \frac{\mu}{\lambda} + 1} \tag{202}$$

Übung 9

Feedback: 70/80
Beispiele 1-4 und 7,8 sehr schön ausgeführt. Im Beispiel 5 hat das Bestimmen der Shannon-Code und Fano-Code mehrere Fehler. Beispiel 6 ist nicht vollständig.

65 Aufgabe 1

Gegeben Sei die Verteilung

1	2	3	4	5	6	7
0.1	0.2	0.2	0.1	0.2	0.1	0.1

Bestimmen Sie alle (drei) kanonischen Huffmancodes.
Mit dem Huffman Algorithmus bekommen wir (von der Form) drei verschiedene Bäume, und damit drei verschiedene Wortlängen.
Offensichtlich müssen wir zuerst die vier Variablen mit $p = 0.1$ zusammenfassen.

1 und 4	2	3	5	6 und 7
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2

Danach können wir (o.B.d.A) entweder (1 und 4) und 2 zusammenfassen, oder (1 und 4) und (6 und 7).
Im ersten Fall:

(1 und 4) und 2	3	5	6 und 7
0.4	0.2	0.2	0.2

können wir danach 3 und 5 zusammenfassen. Dann entweder (3 und 5) und (6 und 7) in welchem Fall wir die Wortlängen in Tabelle (a) unten bekommen, oder (3 und 5) und ((1 und 4) und 2) in welchem Fall die Tabelle (c) sich ergibt.
Aus anderen Reihenfolgen an Zusammenfassungen ergeben sich ähnlicherweise immer eine der drei Tabellen unten.
Die kanonischen Codes werden dann mit dem Verfahren aus dem Skriptum bestimmt

Tabelle (a)

X_i	l_i	Codewort
1	3	111
2	3	110
3	3	101
4	3	100
5	3	011
6	3	010
7	2	00

(b)

X_i	l_i	Codewort
1	4	1111
2	4	1110
3	4	1101
4	4	1100
5	2	10
6	2	01
7	2	00

(c)

X_i	l_i	Codewort
1	4	1111
2	4	1110
3	3	110
4	3	101
5	3	100
6	2	01
7	2	00

N.B. Da p_i für $i = 1,4,6,7$ und $i = 2,3,5$ jeweils gleich sind, können die entsprechenden Codewörter beliebig permutiert werden.

66 Aufgabe 2

Bestimmen Sie im vorigen Beispiel die Entropie, den Shannon- und den Fano-Code.

Entropie

$$\begin{aligned} H(X) &= H(0.1, 0.2, 0.2, 0.1, 0.2, 0.1, 0.1) \\ &= \sum_{i=1}^{7} p_i * \log_2(\frac{1}{p_i}) \\ &= 2.7219 \end{aligned}$$

Entropie-Tabelle

x_i	p_i	$p_i * \log_2(\frac{1}{p_i})$
1	0.1	0.3322
2	0.2	0.4644
3	0.2	0.4644
4	0.1	0.3322
5	0.2	0.4644
6	0.1	0.3322
7	0.1	0.3322
	1	2.7219

Shannon-Code

$$f_i = \sum_{j=1}^{i} p_i$$

$$l_i = \lceil \log_2(\frac{1}{p_i}) \rceil$$

Hierbei ist zu beachten, dass absteigend nach p_i sortiert werden muss

x_i	p_i	f_{i-1}		l_i	Codewort
		dez	bin		
2	0.2	0.0	0.000000	3	000
3	0.2	0.2	0.001100	3	001
5	0.2	0.4	0.011001	3	011
1	0.1	0.6	0.100110	4	1001
4	0.1	0.7	0.101100	4	1011
6	0.1	0.8	0.110011	4	1100
7	0.1	0.9	0.111001	4	1110

Fano-Code

$$f_i = \sum_{j=1}^{i} p_i$$

$$l_i = \lceil \log_2(\frac{1}{p_i}) \rceil + 1$$

Das Sortieren ist beim Fano-Code hingegen nicht nötig

x_i	p_i	f_i	$\frac{f_i+f_{i-1}}{2}$		l_i	Codewort
			dez	bin		
1	0.1	0.1	0.05	0.000011	5	00001
2	0.2	0.3	0.20	0.001100	4	0011
3	0.2	0.5	0.40	0.011001	4	0110
4	0.1	0.6	0.55	0.100011	5	10001
5	0.2	0.8	0.70	0.101100	4	1011
6	0.1	0.9	0.85	0.110110	5	11011
7	0.1	1	0.95	0.111100	5	11110

67 Aufgabe 3

Bestimmen Sie für $m = 1, 2, 3, 4$ explizite Ausdrücke für $H^*(P)$ (Nehmen Sie an, dass die Wahrscheinlichkeiten absteigend geordnet sind).

Mächtigkeit m=1:
Die maximale Unbestimmtheit für m=1 beträgt $H^* = 0$.

Mächtigkeit m=2:
Für eine Menge M mit der Mächtigkeit m=2 gibt es nur einen Huffmanbaum mit den Blattlängen (1,1). Daraus ergibt sich die maximale Unbestimmtheit, da $p_1 + p_2 = 1$ gelten muss.

$$H^*(p_1, p_2) = p_1 * 1 + p_2 * 1 = 1$$

Mächtigkeit m=3:
Für eine Menge der Mächtigkeit m=3 gibt es nur einen Huffmanbaum mit den Blattlängen (1,2,2). Daraus ergibt sich die maximale Unbestimmtheit

$$H^*(p_1, p_2, p_3) = p_1 * 1 + (p_2 + p_3) * 2 = p_1 + (p_2 + (1 - p_1 - p_2)) * 2 = 2 - p_1$$

Mächtigkeit m=4:
Für eine Menge der Mächtigkeit m=4 gibt es zwei Huffmanbäume (2,2,2,2) oder (1,2,3,3). Der Huffmanbaum mit den Blattlängen (2,2,2,2) besitzt die folgende maximale Unbestimmtheit.

$$H^*(p_1, p_2, p_3, p_4) = 2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 2$$

Für die andere Variante mit den Blattlängen (1,2,3,3) ergibt sich hingegen die folgende maximale Unbestimmtheit.

$$H^*(p_1, p_2, p_3, p_4) = p_1 + 2p_2 + 3(p_3 + p_4) = p_1 + 2p_2 + 3(p_3 + (1 - p_1 - p_2 - p_3)) = 3 - 2p_1 - p_2$$

Daraus folgt, dass die maximale Unbestimmtheit des besseren Baumes dem folgenden Ausdruck entspricht.

$$H^*(p_1, p_2, p_3, p_4) = \min(2, 3 - 2p_1 - p_2)$$

68 Aufgabe 4

X und Y haben die gemeinsame Verteilung

	Y			
X	1	2	3	4
1	0.2	0	0.1	0.1
2	0	0.1	0.1	0
3	0	0.1	0	0.1
4	0	0	0.1	0.1

Bestimmen Sie $H(X), H(Y), H(X,Y), H(X|Y), H(Y|X), I(X,Y)$.

Entropie der Zufallsvariable X:

$$H(X) = H(0.4, 0.2, 0.2, 0.2) = \sum_{i=1}^{4} p_i * \log_2(\frac{1}{p_i}) = 0.4 * \log_2(2.5) + 3 * 0.2 * \log_2(5) = 1.922$$

Entropie der Zufallsvariable Y:

$$H(Y) = H(0.2, 0.2, 0.3, 0.3) = 2 * 0.2 * \log_2(5) + 2 * 0.3 * \log_2(3.333) = 1.971$$

Gemeinsame Entropie von X und Y:

$$H(X,Y) = \sum_{x=1}^{4} \sum_{y=1}^{4} P(x,y) * \log_2(\frac{1}{P(x,y)}) = 0.2 * \log_2(5) + 8 * 0.1 * \log_2(10) = 3.122$$

Bedingte Entropie von X unter Y:

$$H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y) = 1.151$$

Bedingte Entropie von Y unter X:

$$H(Y|X) = H(X,Y) - H(X) = 1.200$$

Information zwischen X und Y:

$$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = 0.771$$

69 Aufgabe 5

Gegeben sei die Verteilung

$$P = \{0.1, 0.4, 0.05, 0.2, 0.25\}$$

Bestimmen Sie einen Huffman-Code und den zugehörigen kanonischen Huffmancode, den Shannon-Code und den Fano-Code sowie die mittlere Unbestimmtheit und die Entropie.
Um einen Huffmann-Code zu erstellen wird der Huffman-Tree Algorithmus angewendet. Aus diesem Tree lässt sich der Code ablesen.

Huffman-Code:

X_i	p_i	c_i	l_i
1	0.1	1110	4
2	0.4	0	1
3	0.05	1111	4
4	0.2	110	3
5	0.25	10	2

Kanonischer Huffmancode:

i	X_i	l_i	c_i
1	2	1	0
2	5	2	10
3	4	3	110
4	1	4	1110
5	3	4	1111

Für den Shannon und Fano-Code wurden die Formeln $f_i = \sum_{j=1}^{i} p_i$ und $l_i = \lceil \log_2(\frac{1}{p_i}) \rceil$ verwendet.

Shannon-Code:

i	X_i	p_i	l_i	f_{i-1}	c_i
1	2	0.4	1	0	0
2	5	0.25	2	0.4 = 0.01	01
3	4	0.2	3	0.65 = 0.101	101
4	1	0.1	4	0.85 = 0.1101	1101
5	3	0.05	4	0.95 = 0.1111	1101

Bei der Konvertierung der Dezimalen Ergebnisse für f_i in Binär kam es oft vor das einige Stellen gekürzt wurden.

Fano-Code:

i	p_i	l_i	f_i	$(f_i + f_{i-1})/2$	c_i
1	0.05	5	0.05	0.025 = 0.00000	00000
2	0.1	5	0.15	0.1 = 0.00011	00011
3	0.2	4	0.35	0.25 = 0.01	0100
4	0.25	3	0.6	0.475 = 0.01	010
5	0.4	2	1	0.8 = 0.11	11

Zuletzt wurden die mittlere Unbestimmtheit und die Entropie berechnet.

$$H^*(P) = \sum_{i=1}^{5} p_i * l_i = 2.1$$
$$H(P) = \sum_{i=1}^{5} p_i * \log_2(\frac{1}{p_i}) = 2.041$$

70 Aufgabe 6

$(X_1, ..., X_4)$ seien unabhängig mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = 0.8, \mathbb{P}(X_i = 0) = 0.2$. Bestimmen Sie $H^*(X_1, ...X_n)$ für n = 1,...,4 und vergleichen Sie mit der Entropie.
In der Vorlesung wurde folgende Definition eingeführt:

$$H(X) = H(Px) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}_i * \log_2(\frac{1}{\mathbb{P}_i}) \tag{203}$$

Also für jeden Wert den die Zufallsvariable X annehmen kann, muss die Entropie dieses Wertes berechnet und für das gesamte Ergebnis aufsummiert werden. In diesem Beispiel gibt es die beiden Werte 0 und 1 die X annehmen kann, m ist also 2.

$$H(X) = H(Px) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}_i * \log_2(\frac{1}{\mathbb{P}_i}) = 0.8 * \log_2(\frac{1}{0.8}) + 0.2 * \log_2(\frac{1}{0.2}) = 0.722 \tag{204}$$

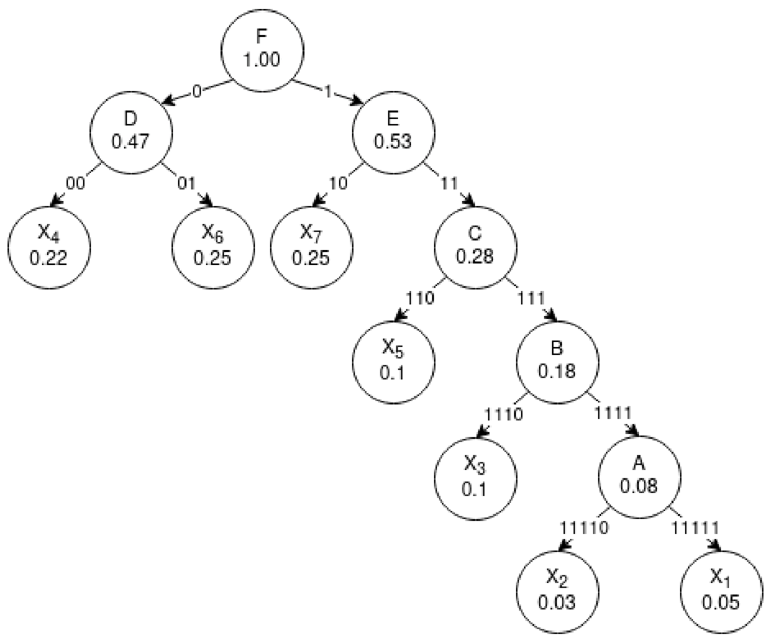
Für die mittlere Unbestimmtheit $H^*(X)$ gilt, dass hierfür die durchschnittliche Anzahl an Fragen bei optimaler Strategie berechnet wird.
Um den Wert einer binären Zufallsvariable zu erfragen, reicht daher eine Frage. $H^*(X) = H^*(Px) = 1$

71 Aufgabe 7

Gegeben sei die Verteilung

$$P = \{0.05, 0.03, 0.2, 0.22, 0.1, 0.25, 0.25\}$$

Bestimmen Sie einen Huffman-Code und den zugehörigen kanonischen Huffmancode, den Shannon-Code und den Fano-Code sowie die mittlere Unbestimmtheit und die Entropie.
In erster Linie wurde der rekursive Huffman-Baum-Algorithmus angewendet um so einen Baum zu erstellen und nachträglich den Huffman-Code daraus abzuleiten. Dabei wurden die einzelnen Werte der Verteilung mit $X_1 \dots X_7$ benannt und passend zusammengefasst.



Damit wurde der Huffmancode erstellt. Der kanonische Huffmancode wurde nach dem Verfahren aus dem Skriptum erstellt.

Huffman-Code:

X_i	p_i	c_i	l_i
1	0.05	11111	5
2	0.03	11110	5
3	0.1	1110	4
4	0.22	00	2
5	0.1	110	3
6	0.25	01	2
7	0.25	10	2

Kanonischer Huffmancode:

i	X_i	l_i	c_i
1	4	2	00
2	6	2	01
3	7	2	10
4	5	3	110
5	3	4	1110
6	1	5	11110
7	2	5	11111

Der Shannon- und Fano-Code wurde mit den Formeln $f_i = \sum_{j=1}^{i} p_i$ und $l_i = \lceil \log_2(\frac{1}{p_i}) \rceil$ erstellt, wobei beim Fano-Code für l_i natürlich ein Bit dazukommt.

Shannon-Code:

i	X_i	p_i	l_i	f_{i-1}	c_i
1	6	0.25	2	0	00
2	7	0.25	2	0.25 = 0.01	01
3	4	0.22	3	0.5 = 0.100	100
4	3	0.1	4	0.72 = 0.1011	1011
5	5	0.1	5	0.82 = 0.1101	1101
6	1	0.05	5	0.92 = 0.11101	11101
7	2	0.03	6	0.97 = 0.111110	111110

Fano-Code:

i	p_i	l_i	f_i	$(f_i + f_{i-1})/2$	c_i
1	0.05	6	0.05	0.025 = 0.000001	000001
2	0.03	7	0.08	0.065 = 0.0001000	0001000
3	0.1	5	0.18	0.13 = 0.00100	00100
4	0.22	4	0.4	0.29 = 0.0100	0100
5	0.1	5	0.5	0.45 = 0.01110	01110
6	0.25	3	0.75	0.625 = 0.101	101
7	0.25	3	1	0.875 = 0.111	111

Weiters wurde die mittlere Unbestimmtheit sowie Entropie bestimmt.

$$H^*(P) = \sum_{i=1}^{7} p_i \cdot l_i = 2.54$$

$$H(P) = \sum_{i=1}^{7} p_i \cdot \log_2(\frac{1}{p_i}) = 2.513$$

72 Aufgabe 8

In einer Urne befinden sich 4 Kugeln mit Nummern 1 bis 4. Es werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. X sei die kleinere der beiden gezogenen Zahlen, Y die größere. Bestimmen Sie $I(X,Y)$.

Werden zwei Kugeln ohne zurücklegen gezogen so gibt es insgesamt sechs Möglichkeiten für die Kombinationen von $X-Y$.

$$1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4$$

Dadurch schaut die gemeinsame Verteilung der beiden Zufallsvariablen wie folgt aus.

	Y				
X	1	2	3	4	P_X
1	0	1/6	1/6	1/6	1/2
2	0	0	1/6	1/6	1/3
3	0	0	0	1/6	1/6
4	0	0	0	0	0
P_Y	0	1/6	1/3	1/2	

Die Information zwischen den beiden Zufallsvariablen kann auf folgende Art und Weise berechnet werden.

$$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = H(X) - H(X|Y)$$

Daher wird in erster Linie Entropie von X sowie die bedingte Entropie von X von Y berechnet.

$$\begin{aligned}
H(X) &= \sum_{i=1}^{4} p_{Xi} \cdot \log_2(\frac{1}{p_{Xi}}) = 0.5 + 0.5283 + 0.4308 = 1.4591 \\
H(X|Y=y) &= \sum_{x} p(x|y) \cdot \log_2(\frac{1}{p(x|y)}) \\
H(X|Y) &= \sum_{y} p_Y(y) H(X|Y=y) \\
&= \frac{1}{6} \cdot (\log_2 1) + \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_2 2) + \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_2 3) \\
&= 0 + 0.3333 + 0.7924 = 1.1257
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Information.

$$I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = 0.3334 \approx \frac{1}{3}$$