22. Man berechen das Bereichsintegral $\iint\limits_B (xy + x^2 - y^2)dxdy$ über dem Rechtecksbereich, welcher durch die Eckpunkte A(-1,1), B(5,1), C(5,5) und D(-1,5) bestimmt ist.

$B = \{(x,y) \in R^2 | a \le x \le b, c \le y \le d\}$, dann gilt:

$$\iint\limits_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

So nun ganz einfach einsetzen und zu erstes inneres Integral (bei mir dy), danach äußeres Integral (bei mir dx) berechnen.

$$\iint\limits_B f(x,y)dxdy = \int_{-1}^5 \left(\int_1^5 xy + x^2 - y^2 \; dy \right) dx = \int_{-1}^5 \left(\frac{1}{2}xy^2 + x^2 y - \frac{1}{3}y^3 \right)\Bigg|_{y=1}^5 dx =$$

$$= \int_{-1}^5 \left(\frac{1}{2}xy^2 + x^2 y - \frac{1}{3}y^3 \right)\Bigg|_{y=1}^5 dx =$$

$$= \int_{-1}^5 \left(\frac{1}{2}x \cdot 5^2 + x^2 \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot 5^3 - \left(\frac{1}{2}x \cdot 1^2 + x^2 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 \right) \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^5 \left(\frac{25}{2}x + 5x^2 - \frac{125}{3} - \left(\frac{1}{2}x + x^2 - \frac{1}{3} \right) \right) dx = \int_{-1}^5 \left(\frac{25}{2}x + 5x^2 - \frac{125}{3} - \frac{1}{2}x - x^2 + \frac{1}{3} \right) dx =$$

$$= \int_{-1}^5 \left(\frac{24}{2}x + 4x^2 - \frac{124}{3} \right) dx = \int_{-1}^5 \left(12x + 4x^2 - \frac{124}{3} \right) dx =$$

$$= \left(12 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 4 \cdot \frac{1}{3}x^3 - \frac{124}{3} \cdot x \right)\Bigg|_{x=-1}^5 = \left(6x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{124}{3} \cdot x \right)\Bigg|_{x=-1}^5 =$$

$$= 6 \cdot 5^2 + \frac{4}{3} \cdot 5^3 - \frac{124}{3} \cdot 5 - \left(6 \cdot (-1)^2 + \frac{4}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{124}{3} \cdot (-1) \right) =$$

$$= 6 \cdot 25 + \frac{4}{3} \cdot 125 - \frac{124}{3} \cdot 5 - \left(6 - \frac{4}{3} + \frac{124}{3} \right) = 150 + \frac{500}{3} - \frac{620}{3} - 6 + \frac{4}{3} - \frac{124}{3} =$$

$$= 144 - \frac{240}{3} = 144 - 80 = 64$$