(Einige der folgenden Sätze kommen schon in der Datei `ordinal.pdf` vor.)

Ordinalzahlen, Kardinalzahlen

Definition 1. α heißt Ordinalzahl $\Leftrightarrow$ α ist transitiv und $(\alpha, \in)$ ist eine strikte Wohlordnung.

Satz 2. *Für jede Wohlordnung $(W,<)$ gibt es genau eine Ordinalzahl $\alpha = \mathrm{otp}(W,<)$ („Ordnungstyp von $(W,<)$) mit $(W,<) \simeq (\alpha, \in)$. Überdies ist der Isomorphismus eindeutig.*

Satz 3. *Die Ordinalzahlen bilden eine echte Klasse Ord. Diese Klasse wird durch $\in$ wohlgeordnet. Für alle Ordinalzahlen α, β gilt: $\alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta$. Wir schreiben statt $\alpha \in \beta$ auch $\alpha < \beta$.*

Definition 4. κ heißt Kardinalzahl $\Leftrightarrow$ κ ist Ordinalzahl und für alle $\alpha < \kappa$ gilt: κ ist nicht gleichmächtig mit α.
(Allgemeiner: Eine WO heißt „initiale Wohlordnung“ wenn sie zu keinem echten Anfangsabschnitt gleichmächtig ist. Kardinalzahlen sind dann die Ordnungstypen von initialen Wohlordnungen.)

Definition 5. Ord = Klasse der Ordinalzahlen. Card=Klasse der Kardinalzahlen. ICard=Klasse der unendlichen Kardinalzahlen.

Definition 6. Für jede Menge A sei $|A|$ die kleinste Ordinalzahl κ mit $\kappa \approx A$. („Kardinalität von A“.)

Offensichtlich ist $|A|$ immer eine Kardinalzahl, und für jede Kardinalzahl κ gibt es eine Menge A mit $|A| = \kappa$, nämlich $A := \kappa$. Für endliche Mengen ist $|A|$ (alternative Notation: $\#A$) genau die Anzahl der Elemente von A im naiven Sinn.
Beispiele: $0, 1, 2, \ldots, \omega\ , \omega_1, \omega_2, \ldots$
Statt ω schreiben wir auch $\aleph_0$, wenn mir mehr an der Kardinalität dieser Menge interssiert sind als an der Wohlordnung von ω. Analog $\aleph_1 := \omega_1$, etc.

Definition 7. Sei $(L,<)$ eine strikte (antireflexive) partielle Ordnng (und sei $x \le y :\Leftrightarrow (x < y \vee x = y)$.

(1) Eine Teilmenge $B \subseteq L$ heißt beschränkt, wenn es ein $l \in L$ gibt mit $\forall b \in B : b \le l$.
(2) Eine Menge $K \subseteq L$ heißt kofinal wenn $\forall l \in L\ \exists k \in K : l \le k$.
(3) Eine Funktion $f : M \to L$ heißt kofinal wenn ihr Wertebereich $f[M] \subseteq L$ in L kofinal ist.
(4) Die Kofinalität von L ist die kleinste Kardinalität einer kofinalen Teilmenge von L.

$$\mathrm{cf}(L) = \min\{|K| : K \subseteq L \text{ ist kofinal}\}$$

Lemma 8.

- *Wenn L ein größtes Element m hat, dann ist jede Teilmenge von L beschränkt, und die kleinste kofinale Menge ist $\{m\}$. Daher:* $\mathrm{cf}(L) = 1$. *Uninteressant. (Und* $\mathrm{cf}(\emptyset) = 0$*. Das interessiert uns noch weniger.)*
- *Wenn L eine lineare Ordnung (=Totalordnung = Kette) ist und kein größtes Element hat, dann bedeutet „unbeschränkt" dasselbe wie „kofinal".*
- *Offensichtlich ist* $\mathrm{cf}(L) \leq |L|$.

Lemma 9. *Sei* $(W, <)$ *eine Wohlordnung (oder eine Ordinalzahl),* $\mathrm{cf}(W, <) = \lambda$*. Dann gibt es eine strikt monotone kofinale Funktion* $f : \lambda \to W$.

Beweis. ObdA (warum?) $\lambda > 1$. Sei $g : \lambda \to W$ kofinal. Man kann f induktiv definieren: $f(\alpha + 1) > \max(f(\alpha), g(\alpha))$, und $f(\delta) = \sup(f[\delta])$. (Warum ist das wohldefiniert? Warum ist f kofinal?)

Wir erhalten mit dieser Konstruktion sogar eine „stetige" Funktion: $f(\sup M) = \sup f[M]$. □

Definition und Satz 10. Für jede Ordinalzahl α gilt $\mathrm{cf}(\alpha) \leq |\alpha| \leq \alpha$.

α ist genau dann eine Kardinalzahl wenn $|\alpha| = \alpha$.

Wir nennen α *regulär* wenn $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$ gilt, sonst *singulär*.

Für jede Kardinalzahl κ gilt: $\mathrm{cf}(\kappa)$ ist regulär.

(Die Begriffe „regulär" und „singulär" verwendet man üblicherweise nur für unendliche Kardinalzahlen.)

Definition und Satz 11. Für jede unendliche Kardinalzahl κ gibt es eine kleinste Kardinalzahl $> \kappa$, nämlich $\kappa^+ := \{\alpha \in Ord : |\alpha| \leq \kappa\}$.

Beweis. Vor allem ist zu zeigen, dass diese Definition tatsächlich eine Menge liefert; der Rest folgt dann leicht.

Die Hartogsmenge $M := \{(X, S) : X \subseteq \kappa, (X, S) \text{ ist WO}\}$ ist eine Menge (Potenzmengenaxiom), daher (Ersetzungsaxiom) auch die Menge aller Ordnungstypen $\{\mathrm{otp}(X, S) : (X, S) \in M\} \ldots$ □

Zum Beispiel ist $\aleph_0^+ = \aleph_1 = \omega_1$. (Man könnte auch $n^+ := n + 1$ für endliche Kardinalzahlen n definieren, aber das führt zu Verwirrung.)

Definition 12. Die aleph-Funktion von Ord nach ICard ist durch transfinite Rekursion definiert. $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$, und für Limesordinalzahlen δ sei $\aleph_\delta := \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \delta\}$. (Zum Beispiel ist $\aleph_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \aleph_n$.

Satz 13. *Für jede unendliche Kardinalzahl κ sei* $I(\kappa) := \mathrm{otp}(\{\lambda \in \mathrm{ICard} : \lambda < \kappa\}$ *der „Index" von κ.*

Dann gilt für alle $\kappa \in \mathrm{ICard}$*:* $\kappa = \aleph_{I(\kappa)}$*, und für alle Ordinalzahl* α*:* $\alpha = I(\aleph_\alpha)$.

Beweis. Transfinite Induktion. □

Bemerkung 14.

- $\omega = \omega_0$ ist eine unendliche Wohlordnung. Alle echten Anfangsabschnitte sind endlich. Es gilt sogar: die beschränkten Teilmengen von ω sind genau die endlichen Teilmengen.
- ω_1 ist eine überabzählbare Wohlordnung. Alle echten Anfangsabschnitte sind abzählbar. (D.h.: höchstens abzählbar.) Es gilt sogar: die beschränkten Teilmengen von ω_1 sind genau die abzählbaren Teilmengen.

Beweis. Warum ist jede abzählbar unendliche Teilmenge $A := \{\alpha_n : n \in \omega\}$ beschränkt? Weil $\sup A = \bigcup_{n\in\omega} \alpha_n$ als Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen selbst abzählbar ist. Daher ist $\alpha := \sup A$ eine (höchstens) abzählbare Ordinalzahl, also ist $\alpha \in \omega_1$ eine obere Schranke in $(\omega_1, \in)$. □

Ähnlich zeigt man:

Satz 15. *$\forall A \subseteq \kappa^+$: ($A$ beschränkt $\Leftrightarrow |A| \leq \kappa$.)*

Korollar 16. Für alle $\alpha \in Ord$ gilt $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$. Also: Nachfolgerkardinalzahlen (Kardinalzahlen $\lambda \geq \aleph_0$ von der Form $\lambda = \kappa^+$) sind immer regulär.

Beweis. Sei $\lambda = \kappa^+$. Die kofinalen(=unbeschränkten) Teilmengen sind genau die Mengen mit Kardinalität $> \kappa$, also $= \lambda$. □

Definition 17. ${}^A B$ sei die Menge aller Funktionen von A nach B.

Satz 18. *Für alle Mengen A, B, C gibt es Bijektionen $f : {}^A({}^B C) \to {}^{A\times B}C$ und $g : {}^A B \times {}^A C \to {}^A(B \times C)$.*

Korollar 19. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$ und $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$ für alle Kardinalzahlen κ, λ, μ. (Sogar für endliche.)

Satz 20 (Hausdorffs Nachfolgerformel). *Für alle unendlichen Kardinalzahlen κ gilt $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+ = \max(\kappa^\lambda, \kappa^+)$.*

Beweis. Für „große“ Exponenten ist das leicht. Sei $\lambda \geq \kappa^+$. Dann gilt

$$2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (\kappa^+)^\lambda \leq \lambda^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda = 2^{\lambda\cdot\lambda} = 2^\lambda \qquad \text{und} \qquad \kappa^+ \leq \lambda \leq \kappa^\lambda,$$

also $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^\lambda = \max(\kappa^\lambda, \kappa^+)$.

Nun betrachten wir den Fall $\lambda < \kappa^+$. Die Ungleichungen $(\kappa^+)^\lambda \geq \kappa^\lambda$ und $(\kappa^+)^\lambda \geq \kappa^+$ sind klar, damit gilt $(\kappa^+)^\lambda \geq \max(\kappa^\lambda, \kappa^+) = \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$.

Zu zeigen ist noch „$\leq$“. Wegen $\mathrm{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$ hat jede Funktion $f : \lambda \to \kappa^+$ einen beschränkten Wertebereich; es gibt also ein $\alpha = \alpha_f < \kappa^+$ sodass $f : \lambda \to \alpha$. Daher ist

$${}^\lambda\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} {}^\lambda\alpha.$$

Jede Menge der Form ${}^\lambda\alpha$ hat Kardinalität $\leq \kappa^\lambda$, daher hat die Vereinigung Kardinalität $\leq \kappa^\lambda \cdot \kappa^+$. □