

Inhaltsverzeichnis

	Angabe ↓	Hinweis ↓	Lösung ↓
Zeitkontinuierliche Signale und Systeme			
A1.1	Transformation der Zeitvariablen	A 1	H 1 L 1
A1.2	Spannungsimpuls	A 1	H 1 L 3
A1.3	Verallgemeinerte Ableitung	A 1	H 1 L 3
A1.4	Integrale mit Dirac-Stößen	A 1	H 1 L 3
A1.5	Prüfen der Linearität	A 2	H 1 L 4
A1.6	Linearität bezüglich des Eingangs	A 2	H 1 L 5
A1.7	Prüfen der Zeitinvarianz	A 2	H 1 L 5
A1.8	Faltungsintegral	A 3	H 1 L 6
A1.9	Direkte Ableitung des Faltungsintegrals	A 3	H 1 L 7
A1.10	Reihenkombination	A 3	H 1 L 7
A1.11	Stoßantwort zu bekannter Sprungantwort	A 3	H 1 L 7
A1.12	Sprungantwort zu bekannter Stoßantwort	A 3	H 1 L 7
A1.13	Bestimmen der Stoßantwort	A 3	H 1 L 8
A1.14	Duhamel-Integral	A 4	H 1 L 8
A1.15	Dreieckantwort auf Rechteckimpuls	A 4	H 1 L 9
A1.16	<i>R-C</i> -Glied	A 5	H 1 L 10
A1.17	Integrator	A 5	H 1 L 12
A1.18	Kurzzeit-Integrator	A 6	H 2 L 14
A1.19	Antworten eines Integrators und eines Differentiators	A 6	H 2 L 14
A1.20	Stabilität	A 6	H 2 L 16
LTI - Systeme im Zeitbereich			
A2.1	Einfacher Reihenschwingkreis	A 7	H 3 L 17
A2.2	Beschalteter Reihenschwingkreis	A 7	H 3 L 18
A2.3	Wien-Brücke	A 7	H 3 L 19
A2.4	Magnetsystem	A 8	H 3 L 21
A2.5	Leitungsstück	A 8	H 3 L 22
A2.6	Übertragungsglied	A 9	H 3 L 23
A2.7	Filter	A 9	H 3 L 24
A2.8	Übertragungsfunktionen	A 9	H 3 L 24
A2.9	Homogene Lösungen	A 9	H 3 L 25
A2.10	Stabilität	A 10	H 3 L 26
A2.11	Partikuläre Lösung bei zusammengesetzter Erregung	A 10	H 3 L 26
A2.12	Partikuläre Lösung bei Sinuserregung	A 10	H 3 L 27
A2.13	Realteilbildung als lineare Operation	A 10	H 3 L 27
A2.14	Partikuläre Lösung zu abklingendem Sprung	A 10	H 3 L 28

A2.15	Partikuläre Lösung zu abklingender Sinusschwingung	A 11	H 4	L 29
A2.16	Vollständige Lösungen	A 11	H 4	L 29
A2.17	Sprungantworten	A 11	H 4	L 31
A2.18	Stoßantworten	A 12	H 4	L 32
A2.19	Rechteckimpuls an $R - C$ -Glied	A 12	H 4	L 32
A2.20	Rechteckimpuls als Dirac-Stoß	A 12	H 4	L 33
A2.21	Einschalten eines Relais	A 12	H 4	L 34
A2.22	Induktive Rückkopplung	A 13	H 4	L 35
A2.23	Schwingungserzeuger	A 14	H 4	L 36
A2.24	Schalten induktiv gekoppelter Kreise	A 14	H 4	L 37
A2.25	Hochsetzsteller	A 15	H 4	L 38
A2.26	Gleichstromglied	A 15	H 4	L 39
A2.27	Ausschalten eines leerlaufenden Transformators	A 16	H 4	L 41
A2.28	Ausschalten eines generatornahen Kurzschlusses	A 16	H 5	L 42
A2.29	PID-Glied	A 17	H 5	L 44
A2.30	Aktives Tiefpassfilter	A 18	H 5	L 45

Fourier-Transformation

A3.1	Fourier-Transformation mit Tabelle	A 19	H 6	L 47
A3.2	Fourier-Rücktransformation mit Tabelle	A 19	H 6	L 47
A3.3	Grundlegende Eigenschaften	A 19	H 6	L 48
A3.4	Faltungsintegral	A 19	H 6	L 49
A3.5	Faltungsprodukt	A 19	H 6	L 49
A3.6	Verschobener Rechteckimpuls	A 20	H 6	L 50
A3.7	Doppelsignale	A 20	H 6	L 52
A3.8	Exponentialimpuls	A 20	H 6	L 53
A3.9	Gauß-Signal	A 20	H 6	L 54
A3.10	Signum-Funktion	A 20	H 6	L 54
A3.11	Hilbert-Transformation	A 20	H 6	L 54
A3.12	Endliche Dirac-Stoßfolge	A 21	H 6	L 55
A3.13	Kurzzeitspektrum	A 21	H 6	L 56
A3.14	Signal- und Spektralfläche	A 21	H 6	L 57
A3.15	Zeitbegrenzte Sinusschwingung	A 21	H 6	L 58
A3.16	Autokorrelation	A 22	H 7	L 58
A3.17	Kreuzkorrelation	A 22	H 7	L 60
A3.18	Schranke für die Korrelationsfunktion	A 22	H 7	L 60
A3.19	Wigner-Verteilung	A 22	H 7	L 60
A3.20	Ambiguity-Funktion	A 23	H 7	L 61

LTI - Systeme im Frequenzbereich

A4.1	Stationäre Schwingungen	A 24	H 8	L 63
A4.2	Existenz eingeschwungener Zustände	A 24	H 8	L 63
A4.3	Eingeschwungener Zustand bei bekannter Sprungantwort	A 24	H 8	L 64

A4.4	Komplexer Frequenzgang	A 25	H 8	L 65
A4.5	Betragsteil von Bode-Diagrammen	A 25	H 8	L 65
A4.6	Winkelteil von Bode-Diagrammen	A 25	H 8	L 66
A4.7	Rekonstruktion der Übertragungsfunktion	A 25	H 8	L 68
A4.8	Gekoppelte Differenzierer	A 26	H 8	L 69
A4.9	Resonanz im Bode-Diagramm	A 26	H 8	L 69
A4.10	Kreuzglied	A 26	H 8	L 70
A4.11	Tiefpass	A 27	H 8	L 72
A4.12	Übertragen eines Rechteckimpulses	A 27	H 8	L 72
A4.13	Ideales Tiefpassfilter	A 27	H 8	L 73
A4.14	Totzeitsysteme	A 28	H 8	L 74
A4.15	Kammfilter	A 28	H 8	L 74
A4.16	Zufallssignal an einem Differenzierer	A 29	H 9	L 75
A4.17	Kreuzkorrelationsfunktion	A 29	H 9	L 75
A4.18	Monochromatischer Prozess	A 29	H 9	L 76
A4.19	Weißes Rauschen an einem Bandpass	A 29	H 9	L 76
A4.20	Weißes Rauschen an einem $R - C$ -Glied	A 30	H 9	L 77

Fourier-Reihen

A5.1	Diverse Fourier-Reihen	A 31	H 10	L 78
A5.2	Ausschnitt einer Sinusschwingung	A 32	H 10	L 81
A5.3	Angeschnittene Sinusschwingung	A 32	H 10	L 82
A5.4	Pulsierende Spannung	A 32	H 10	L 82
A5.5	Reelle Darstellung	A 33	H 10	L 83
A5.6	Periodische Schwingungsblöcke	A 33	H 10	L 84
A5.7	Spektrum eines Produkts	A 33	H 10	L 84
A5.8	Periodische Antworten eines LTI-Systems	A 33	H 10	L 85
A5.9	Ausgang als reelle Fourier-Reihe	A 34	H 10	L 87
A5.10	Summieren von Reihen	A 35	H 10	L 88

Oberschwingungen

A6.1	Spannung an einer Spule	A 36	H 11	L 89
A6.2	Oberschwingungsgehalt	A 36	H 11	L 89
A6.3	Periodisch wiederholte Stromblöcke	A 36	H 11	L 90
A6.4	Leistungsfaktor	A 36	H 11	L 90
A6.5	Einweg-Gleichrichter mit Widerstand	A 36	H 11	L 91
A6.6	Einweg-Gleichrichter mit Induktivität	A 36	H 11	L 91
A6.7	Gleichstromsteller	A 37	H 11	L 93
A6.8	Hystereseglied	A 38	H 11	L 94
A6.9	Nichtlinearer Widerstand	A 38	H 11	L 95
A6.10	Mischer	A 39	H 11	L 96

Laplace-Transformation

A7.1	Laplace-Transformation mit Tabelle	A 40	H 12	L 98
A7.2	Laplace-Rücktransformation mit Tabelle	A 40	H 12	L 98
A7.3	Partialbruchzerlegungen	A 40	H 12	L 98
A7.4	Zeitverschiebung	A 40	H 12	L 99
A7.5	Verschobener Dreieckimpuls	A 40	H 12	L 100
A7.6	Laplace- und Fouriertransformation im Vergleich	A 41	H 12	L 100
A7.7	Potenzreihe	A 41	H 12	L 101
A7.8	Faltungen	A 41	H 12	L 101
A7.9	Rechtsseitige periodische Signale	A 41	H 12	L 102
A7.10	Anfangs- und Endwertsatz	A 42	H 12	L 103

LTI-Systeme und Laplace-Transformation

A8.1	Differentialgleichungen	A 43	H 13	L 104
A8.2	Integralgleichung	A 43	H 13	L 104
A8.3	Differentialgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten	A 43	H 13	L 104
A8.4	Differential-Differenzgleichung	A 43	H 13	L 105
A8.5	Eingang mit Verzögerung	A 43	H 13	L 106
A8.6	Identifikation	A 43	H 13	L 106
A8.7	Stoßantworten	A 43	H 13	L 107
A8.8	Sprungantworten	A 44	H 13	L 108
A8.9	Übergangsverhalten	A 44	H 13	L 109
A8.10	Antwort auf kurzen Rechteckimpuls	A 44	H 13	L 110
A8.11	Kombination zweier Differenzierer	A 45	H 13	L 111
A8.12	Kombination zweier Integratoren	A 45	H 13	L 112
A8.13	Kombination von Systemen	A 46	H 13	L 112
A8.14	Systeme mit Rückführung	A 46	H 13	L 112
A8.15	System-Differentialgleichung aus Strukturdiagramm	A 46	H 14	L 113
A8.16	Stabilisierung	A 47	H 14	L 113
A8.17	Partialbruchzerlegung und Parallelschaltung	A 47	H 14	L 115
A8.18	Integrator und Laufzeitglieder	A 47	H 14	L 115
A8.19	Gleitende Mittelwertbildung	A 48	H 14	L 116
A8.20	PID-Glied	A 48	H 14	L 117

Systeme im Zustandsraum

A9.1	Zustandsmodelle mit Phasen-Variablen	A 50	H 15	L 119
A9.2	Anfangswerte der Zustandsvariablen	A 50	H 15	L 120
A9.3	Physikalische Zustandsvariablen	A 50	H 15	L 121
A9.4	Strukturdiagramm	A 50	H 15	L 122
A9.5	System erster Ordnung	A 50	H 15	L 123
A9.6	Resolvente	A 51	H 15	L 123
A9.7	Übertragungsfunktion	A 51	H 15	L 124

A9.8	Matrix-Exponentialfunktion	A 51	H 15	L 125
A9.9	Transitionsmatrix	A 52	H 15	L 125
A9.10	Lösungsdarstellung	A 52	H 15	L 126
A9.11	Stoßantwort	A 52	H 15	L 126
A9.12	Anfangszustände	A 52	H 15	L 127
A9.13	Euklidische Vektorräume	A 53	H 15	L 127
A9.14	Koordinatentransformation	A 53	H 15	L 128
A9.15	Transformation von Zustandsmodellen	A 54	H 16	L 128
A9.16	Eigenwerte	A 54	H 16	L 129
A9.17	Lineare Gleichungssysteme	A 54	H 16	L 129
A9.18	Eigenvektoren	A 55	H 16	L 129
A9.19	Eigenvektoren und Modalmatrix	A 55	H 16	L 130
A9.20	Modalmatrix	A 55	H 16	L 130
A9.21	Jordan-Normalform	A 55	H 16	L 130
A9.22	Orthogonale Transformation	A 55	H 16	L 131
A9.23	Cayley-Hamilton-Theorem	A 55	H 16	L 131
A9.24	Steuerbarkeit	A 55	H 16	L 132
A9.25	Beobachtbarkeit	A 56	H 16	L 133

A1.1 Transformation der Zeitvariablen: Skizzieren Sie den Verlauf des Signals

$$x(\tau) = e^{-\tau} \varepsilon(\tau)$$

und die Verläufe der daraus durch die Transformationen $\tau \mapsto \tau/a + b$ mit $a = \pm 2, b = 0, \pm 1$ entstehenden sechs Signale.

A1.2 Spannungsimpuls: Ein relativ kurzer, einseitiger Spannungsimpuls $u(t)$ um den Zeitnullpunkt (Abb.A1.2) soll modellhaft als Dirac-Stoß mit dem Gewicht a ,

$$x(\tau) = a\delta(\tau), \quad \tau = t/T_B, \quad x = u/U_B,$$

dargestellt werden. Berechnen Sie für festliegende Bezugswerte T_B, U_B das Gewicht a .

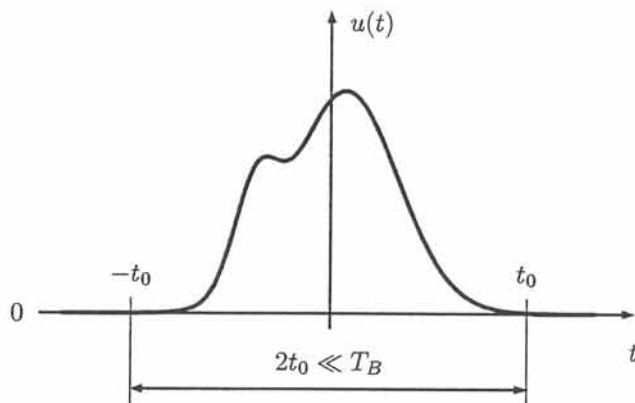


Abb.A1.2

A1.3 Verallgemeinerte Ableitung: Berechnen Sie die zweite Ableitung $x''(\tau)$ des Dreiecksignals

$$x(\tau) = \text{tri}(\tau)$$

als verallgemeinerte Funktion.

A1.4 Integrale mit Dirac-Stößen: Berechnen Sie die Integrale

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \sin[2(\tau - \tau')] \delta(3 - \tau') d\tau',$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\tau' - 2\tau} \delta(\tau' + 3) d\tau'.$$

Berechnen Sie auch die folgenden Integrale mit einem stetigen Signal $x(\tau)$ und Konstanten τ_0, τ_1, a, b

$$(iii) \int_{-\infty}^{\tau} x(\tau') \delta(a\tau + b\tau') d\tau', \quad a > 0, \quad b > 0,$$

$$(iv) \int_{-\infty}^{\infty} x(a\tau + \tau_0) \delta(b\tau + \tau_1) d\tau, \quad b \neq 0.$$

A1.5 Prüfen der Linearität: Prüfen Sie, welche der drei grundlegenden Eigenschaften linearer Systeme von den folgenden Eingangs-Ausgangs-Relationen erfüllt werden. Dabei bedeutet $y(\tau)$ die Ausgangsgröße, $u(\tau)$ die Eingangsgröße, und $\alpha = x(\tau_0)$ kennzeichnet den Anfangszustand.

$$(i) y(\tau) = \alpha u(\tau) + \alpha\tau + \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\tau'} u(\tau') d\tau',$$

$$(ii) y(\tau) = \sin(\alpha\tau) + \int_{\tau_0}^{\tau} \tau' u(\tau') d\tau',$$

$$(iii) y(\tau) = \alpha\tau + \int_{\tau_0}^{\tau} \sin(\tau) u(\tau') d\tau'.$$

A1.6 Linearität bezüglich des Eingangs: Von einem linearen System sind zu den Eingangsfunktionen

$$u_1(\tau) = \varepsilon(\tau),$$

$$u_2(\tau) = \tau\varepsilon(\tau)$$

die jeweiligen Nullzustandsantworten

$$y_{0z1}(\tau) = (3 + 2e^{-5\tau})\varepsilon(\tau),$$

$$y_{0z2}(\tau) = (0, 4 + 3\tau - 0, 4e^{-5\tau})\varepsilon(\tau)$$

bekannt. Bestimmen Sie damit die zur Eingangsfunktion

$$u(\tau) = (2 + \tau/2)\varepsilon(\tau)$$

gehörende Nullzustandsantwort.

A1.7 Prüfen der Zeitinvarianz: Angenommen, die Zusammenhänge zwischen den Eingangsgrößen $u(\tau)$ und den Ausgangsgrößen $y(\tau)$ liegen als Differentialgleichungen

$$(i) y'(\tau) + 5y(\tau) = 7u(\tau),$$

$$(ii) y'(\tau) + 5(\tau - 2)y(\tau) = 7u(\tau),$$

$$(iii) y'(\tau) = u^2(\tau),$$

$$(iv) y'(\tau) + 2y(\tau)u(\tau) = u(\tau)$$

vor. Prüfen Sie die Zeitinvarianz dieser Systeme durch Untersuchung der Forminvarianz der Gleichungen gegenüber Zeitverschiebungen.

A1.8 Faltungsintegral: Ein lineares, zeitinvariantes System besitzt die Stoßantwort

$$g(\tau) = 2e^{-\tau}\varepsilon(\tau)$$

und befindet sich bei $\tau = 0$ im Nullzustand. Berechnen und skizzieren Sie die vollständigen Antworten auf

- (i) den Heaviside-Sprung,
- (ii) die Rampenfunktion.

A1.9 Direkte Ableitung des Faltungsintegrals: Versuchen Sie, die Faltungsdarstellung der Nullzustandsantwort eines LTI-Systems direkt aus

$$y_{0z}(\tau) = \mathcal{S}[u(\tau); \mathcal{Q}]$$

unter konsequenter Nutzung der Linearität und Zeitinvarianz von \mathcal{S} abzuleiten.

A1.10 Reihenkombination: Zwei lineare, zeitinvariante Systeme mit den Stoßantworten $g_1(\tau)$ und $g_2(\tau)$ werden so hintereinander geschaltet, dass der Ausgang des ersten Systems den Eingang des zweiten Systems bildet. Drücken Sie die Stoßantwort $g(\tau)$ des so entstehenden, neuen LTI-Systems durch $g_1(\tau)$ und $g_2(\tau)$ aus. Voraussetzung: $g_1(\tau)$ und $g_2(\tau)$ ändern sich nicht durch das Zusammenschalten (Rückwirkungsfreiheit).

A1.11 Stoßantwort zu bekannter Sprungantwort: Berechnen Sie die zu den Sprungantworten

- (i) $h(\tau) = [-e^{-4\tau} + e^{-2\tau} \sin(\tau) + 1] \varepsilon(\tau)$,
- (ii) $h(\tau) = [-e^{-\tau} \cos(2\tau) + 1] \varepsilon(\tau)$

linearer, zeitinvarianter Systeme gehörenden Stoßantworten.

A1.12 Sprungantwort zu bekannter Stoßantwort: Ein lineares, zeitinvariantes System besitzt die Stoßantwort

$$g(\tau) = 2\delta(\tau) - e^{-\tau/2}\varepsilon(\tau) - \delta(\tau - 3).$$

Berechnen Sie die Sprungantwort $h(\tau)$. Stellen Sie $g(\tau)$ und $h(\tau)$ im Vergleich grafisch dar.

A1.13 Bestimmen der Stoßantwort: Ein lineares, zeitinvariantes System soll – vom Nullzustand ausgehend – auf die begrenzte Rampe Abb.A1.13a mit

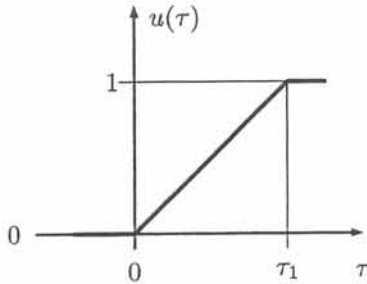


Abb.A1.13a

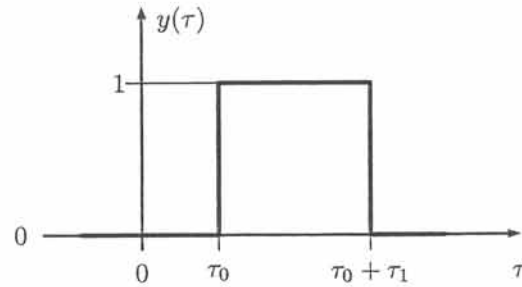


Abb.A1.13b

dem verschobenen Rechteckimpuls Abb.A1.13b antworten. Wie muss dann die Stoßantwort des Systems aussehen?

A1.14 Duhamel-Integral: Leiten Sie aus dem Faltungsintegral für ein lineares, zeitinvariantes System das Duhamel-Integral

$$y(\tau) = h(\tau)u(0+) + \int_{0+}^{\tau} h(\tau - \tau') \frac{d}{d\tau'} u(\tau') d\tau', \quad u(\tau) = 0 \text{ für } \tau < 0,$$

ab, wobei $h(\tau)$ die Sprungantwort bedeutet. Geben Sie die dabei zu treffenden Voraussetzungen an. Wie lässt sich die Darstellung einer Systemantwort durch das Duhamel-Integral anschaulich erklären?

A1.15 Dreieckantwort auf Rechteckimpuls: Ein lineares, zeitinvariantes System antwortet – ausgehend vom Nullzustand – auf den Rechteckimpuls Abb.A1.15a mit einem Dreieckimpuls Abb.A1.15b. Berechnen und skizzieren Sie

- (i) die Antwort auf $u_1(\tau) = \text{rect}[(\tau - 1)/2]$,
- (ii) die Sprungantwort,
- (iii) die Stoßantwort.

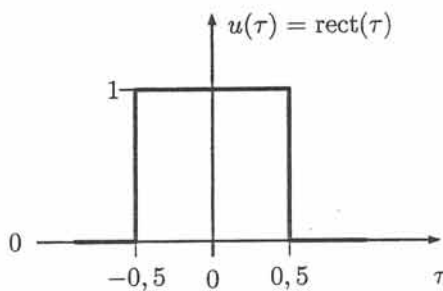


Abb.A1.15a

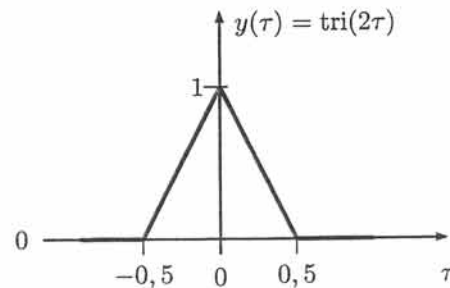


Abb.A1.15b

A1.16 R-C-Glied: Abb.1.16a zeigt ein einfaches R-C-Übertragungsglied mit der Spannung u_E als Eingangsgröße und der Leerlaufspannung u_A als Ausgangsgröße. Bestimmen und skizzieren Sie nach Einführung passender bezogener Größen

- (i) die Sprungantwort,
- (ii) die Stoßantwort,
- (iii) die Nullzustandsantwort auf die 50 Hz-Sinusschwingung

$$u_E = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ 10 \text{ V} \cdot \cos(\omega t) & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

Schreiben Sie das letzte Ergebnis in Originalvariablen.

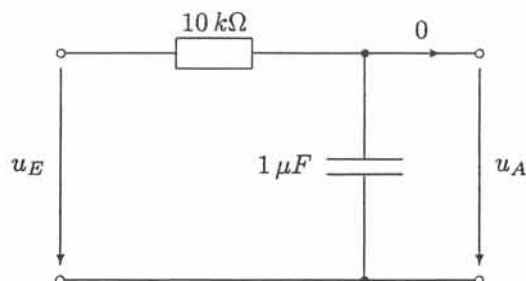


Abb.A1.16a

A1.17 Integrator: Ein System mit der Eingangs-Ausgangs-Beziehung

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} u(\tau') d\tau'$$

heißt Integrator.

- (i) Zeigen Sie, dass es sich dabei um ein lineares, zeitinvariantes System handelt.
- (ii) Bestimmen Sie die Stoßantwort des Integrators.
- (iii) Kombinieren Sie den Integrator mit einem idealen Laufzeitglied $g_0(\tau) = \delta(\tau - \tau_0)$ derart, dass die Stoßantwort

$$g(\tau) = \text{rect}(\tau/\tau_0 - 1/2)$$

entsteht. Welche Form nimmt jetzt die Eingangs-Ausgangs-Beziehung an? („Kurzzeit-Integrator“). Skizzieren Sie die zugehörige Sprungantwort.

A1.18 Kurzzeit-Integrator: Abb.A1.18 zeigt die Sprungantwort eines „Kurzzeit-Integrators“. Mit welchem Signal antwortet solch ein System – ausgehend vom Nullzustand – auf die Sinusschwingung

$$u(\tau) = \cos(\nu\tau + \varphi_0)\varepsilon(\tau).$$

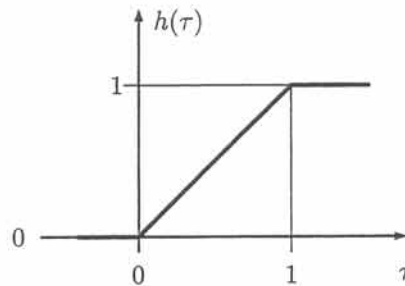


Abb.A1.18

A1.19 Antworten eines Integrators und eines Differentiators: Berechnen und skizzieren Sie die Antworten eines Integrators (s.A1.17) und eines Differentiators (liefert die Zeitableitung der Eingangsgröße) auf die Signale ($a = \text{const}$, $\tau_0 > 0$)

(i) $u(\tau) = a \text{rect}(\tau/\tau_0 + 1/2)$,

(ii) $u(\tau) = a \text{tri}(\tau/\tau_0 + 1)$.

A1.20 Stabilität: Untersuchen Sie, ob die folgenden Systeme, dargestellt durch ihre Stoßantworten, stabil oder instabil sind.

(i) $g(\tau) = [\tau e^{-\tau} + e^{-2\tau} \sin(3\tau)] \varepsilon(\tau)$, (iv) $g(\tau) = e^{\tau} \sin(2\tau) \varepsilon(\tau)$,

(ii) $g(\tau) = [e^{-\tau} - e^{0,01\tau}] \varepsilon(\tau)$, (v) $g(\tau) = [e^{-2\tau} + e^{-\tau}] \varepsilon(\tau)$,

(iii) $g(\tau) = [e^{-\tau} \sin(2\tau) - 1] \varepsilon(\tau)$, (vi) $g(\tau) = \tau^4 e^{-0,01\tau} \varepsilon(\tau)$.

A2.1 Einfacher Reihenschwingkreis: Geben Sie für die Schaltung in Abb. A2.1 die System-Differentialgleichung in bezogener Form an, wenn

- (i) $u_q(t)$ die Eingangsgröße und $i(t)$ die Ausgangsgröße,
- (ii) $u_q(t)$ die Eingangsgröße und $u_C(t)$ die Ausgangsgröße

darstellt.

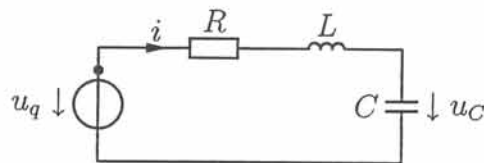
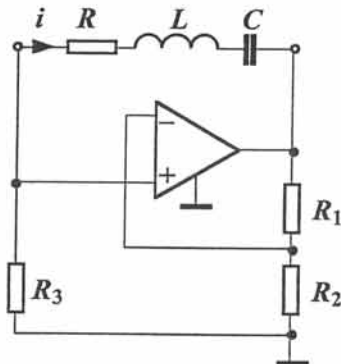


Abb.A2.1

A2.2 Beschalteter Reihenschwingkreis: Ein Reihenschwingkreis ist nach Abb.A2.2a mit einem idealen Operationsverstärker beschaltet. Stellen Sie die Differentialgleichung für den Strom i in bezogener Form unter Verwendung der bezogenen Kreisfrequenz ν_0 und des Dämpfungsgrads ϑ auf. Wie wirken sich unterschiedliche Werte von R_3 auf das Systemverhalten grundsätzlich aus?



$$L = 20 \text{ mH}, C = 2 \text{ } \mu\text{F},$$

$$R = 60 \text{ } \Omega,$$

$$R_1 = 100 \text{ } \Omega, R_2 = 10 \text{ k}\Omega,$$

$$R_3 = 5 \text{ k}\Omega \text{ oder } 7 \text{ k}\Omega$$

Abb.A2.2a

A2.3 Wien-Brücke: Die in Abb.A2.3a angegebene Schaltung enthält eine R-C-Brücke und einen (näherungsweise) idealen Operationsverstärker. Geben Sie die Differentialgleichung für die Ausgangsspannung u_A

- (i) in Originalvariablen,
- (ii) in der bezogenen Standardform,
- (iii) in der bezogenen Form unter Verwendung der bezogenen Kennkreisfrequenz ν_0 und des Dämpfungsgrads ϑ

an. Bestimmen Sie jeweils die Koeffizienten.

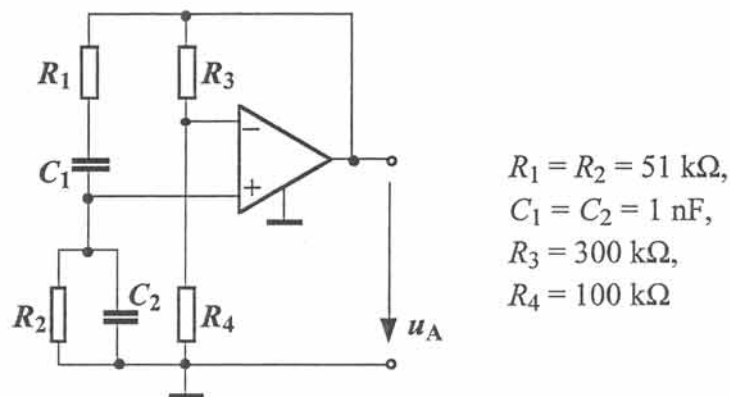


Abb.A2.3a

A2.4 Magnetsystem: In Abb.A2.4a sehen Sie die Ersatzschaltung eines Magnetsystems, gespeist von einer Gleichspannungsquelle. Der Schalter S wird zum Zeitpunkt $t = 0$ geöffnet.

- (i) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Kondensatorspannung u_C und die zugehörigen Anfangsbedingungen bei $t = 0+$ auf.
- (ii) Schreiben Sie diese Differentialgleichung und die Anfangsbedingungen nach Einführung bezogener Variablen und des Dämpfungsgrads ϑ in einer möglichst einfachen Form.

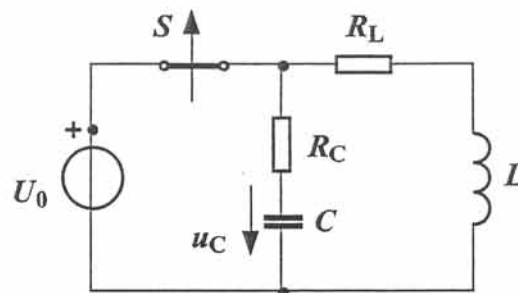


Abb.A2.4a

A2.5 Leitungsstück: Für die Ersatzschaltung Abb.A2.5a ist der Spannungsverlauf $u_0(t)$ bekannt.

- (i) Stellen Sie die Differentialgleichung für $u_2(t)$ in Originalvariablen auf.
- (ii) Wählen Sie $T_B = \sqrt{LC}/2$ als Bezugsdauer und U_B als eine allgemeine Bezugsspannung. Schreiben Sie damit die Differentialgleichung in bezogener Form.

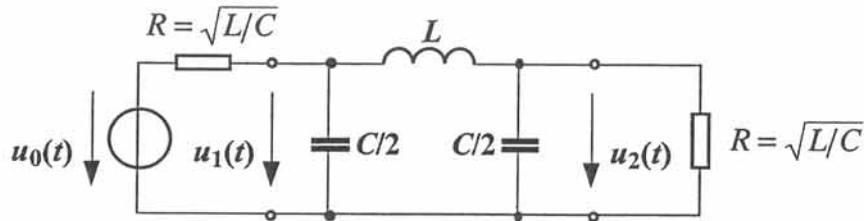


Abb.A2.5a

A2.6 Übertragungsglied: Bestimmen Sie die System-Differentialgleichung für das in Abb.A2.6a dargestellte Übertragungsglied in Originalvariablen.

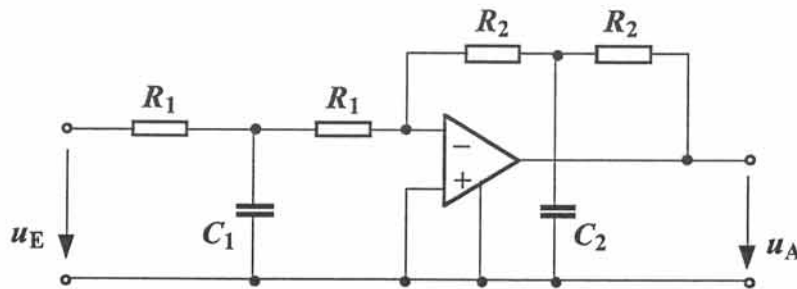


Abb.A2.6a

A2.7 Filter: Abb.A2.7a zeigt ein Filter, das, als lineares System betrachtet, die Eingangsspannung u_E als Eingangsgröße und die Leerlauf-Ausgangsspannung u_A als Ausgangsgröße besitzt. Wählen Sie $U_{EB} = U_{AB}$ und $\omega_B = 1/\sqrt{LC}$ als Bezugsgrößen und bestimmen Sie damit die Übertragungsfunktion $G(s)$.

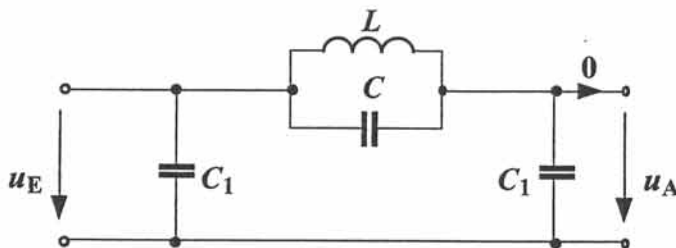


Abb.A2.7a

A2.8 Übertragungsfunktionen: Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen zu den folgenden Systemen.

- (i) $y' + 2y = 3u,$
- (ii) $y' + 2y = 3u' + 2u,$
- (iii) $y'' + 4y = u',$
- (iv) $y'' = u'' + 2u' + 10u.$

A2.9 Homogene Lösungen: Zu den folgenden Übertragungsfunktionen sind die allgemeinen Lösungen des homogenen Teils der System-Differentialgleichung gesucht. Geben Sie bei konjugiert komplexen Polen jeweils drei äquivalente Formen an.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad G(s) &= \frac{1}{(s+7)(s+8)}, & \text{(iii)} \quad G(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 0,4s + 4,04)}, \\ \text{(ii)} \quad G(s) &= \frac{s-1}{(s+7)(s+8)}, & \text{(iv)} \quad G(s) &= \frac{1}{(s+1)^2}. \end{aligned}$$

A2.10 Stabilität: Stellen Sie für jedes der in Aufgabe A2.8 angegebenen Systeme fest, ob Stabilität, Grenzstabilität oder Instabilität vorliegt. Markieren Sie dazu die Pole und Nullstellen in der komplexen Ebene.

A2.11 Partikuläre Lösung bei zusammengesetzter Erregung: Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung eines Systems mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2 + 10s + 1}$$

zum Eingang

$$u(\tau) = 2 + 3\tau - e^\tau.$$

A2.12 Partikuläre Lösung bei Sinuserregung: Bestimmen Sie zum Eingang

$$u(\tau) = \cos(2\tau)$$

gehörende partikuläre Lösungen der Differentialgleichungen für die Systeme mit den Übertragungsfunktionen

$$\text{(i)} \quad G(s) = \frac{s+1}{s-1}, \quad \text{(ii)} \quad G(s) = \frac{s-1}{s+1}.$$

Geben Sie die Lösungen jeweils in zwei äquivalenten Formen an.

A2.13 Realteilbildung als lineare Operation: Zeigen Sie, dass die Bildung des Realteils $\text{Re}[\cdot]$ eine lineare Operation an Funktionen $X(s)$ darstellt. Gilt Gleiches auch für $\text{Im}[\cdot]$?

A2.14 Partikuläre Lösung zu abklingendem Sprung: Bestimmen Sie für ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$$

eine zur Eingangsfunktion

$$u(\tau) = 2e^{-3\tau} \varepsilon(\tau)$$

gehörende Partikulärlösung. Zeigen Sie anschließend, dass die Lösung tatsächlich der Differentialgleichung genügt.

A2.15 Partikuläre Lösung zu abklingender Sinusschwingung: Sie untersuchen ein System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$.

(i) Zeigen Sie, dass sich eine Eingangsfunktion

$$u(\tau) = e^{\sigma\tau} \cos(\nu\tau)$$

in der Form

$$u(\tau) = \operatorname{Re} \left[e^{s\tau} \Big|_{s=\sigma+j\nu} \right]$$

schreiben lässt.

(ii) Wie sieht eine zugehörige Partikulärlösung allgemein aus?

(iii) Bestimmen Sie solch eine Partikulärlösung speziell für

$$u(\tau) = e^{-2\tau} \cos(4\tau), \quad G(s) = \frac{3}{s+1}.$$

A2.16 Vollständige Lösungen: Berechnen Sie die vollständigen Lösungen im Bereich $\tau \geq 0$ für die Systeme, Eingangssignale und Anfangsbedingungen

- (i) $y' + 7y = 2u;$ $u(\tau) = \varepsilon(\tau); y(0+) = 0.$
 (ii) $y' + 2y = u' + 3u;$ $u(\tau) = 4 \cos(5\tau)\varepsilon(\tau); y(0+) = -1.$
 (iii) $y'' + 7y' + 12y = 2u' + 2u;$ $u(\tau) = 5e^{-\tau}\varepsilon(\tau); y(0+) = 2, y'(0+) = -1.$

A2.17 Sprungantworten: Wie lauten die Sprungantworten der folgenden Systeme?

- (i) $G(s) = 1/(s^2 + 4s + 5),$
 (ii) $G(s) = (s + 1)/(s^2 + 4s + 5),$
 (iii) $G(s) = (s - 1)/(s^2 + 4s + 5),$
 (iv) $G(s) = (s^2 + 3s + 2)/(s^2 + 4s + 5),$
 (v) $G(s) = (s^2 + s - 2)/(s^2 + 4s + 5).$

A2.18 Stoßantworten: Berechnen Sie die Stoßantworten für die Systeme aus Aufgabe 2.17. Wie unterscheiden sich die Systeme mit und ohne Nullstellen bezüglich der Stoßantwort?

A2.19 Rechteckimpuls an $R - C$ -Glied: In der Schaltung Abb.A2.19a liefert die Quelle mit vernachlässigbarem Innenwiderstand einen Rechteckimpuls. Berechnen und zeichnen Sie die Anzeige eines geeignet kompensierten Oszilloskops, das die Schaltung nicht belastet.

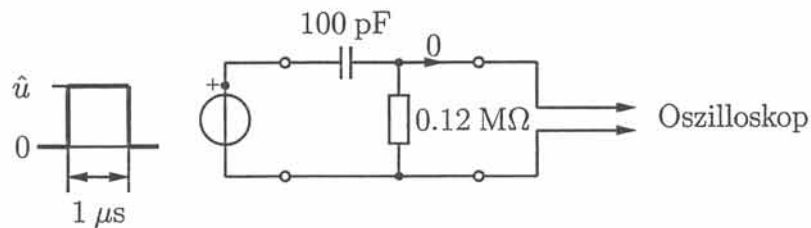


Abb.A2.19a

A2.20 Rechteckimpuls als Dirac-Stoß: Als LTI-System betrachtet, stellt in der Schaltung Abb.A2.20a die Spannung u_0 die Eingangsgröße und die Spannung u_1 die Ausgangsgröße dar.

- (i) Geben Sie zuerst die System-Differentialgleichung in der Standardform mit allgemeinen Bezugswerten U_{EB} , U_{AB} und T_B an.
- (ii) Die Quelle liefert einen relativ kurzen Rechteckimpuls (Abb.A2.20b, $t_0 \ll$ wirksame Zeitkonstanten $\approx T_B$). Stellen Sie damit die bezogene Eingangsgröße mit Hilfe des Dirac-Stoßes dar.
- (iii) Wählen Sie nun die Bezugswerte so, dass Sie eine möglichst einfache Differentialgleichung erhalten. Geben Sie diese an.

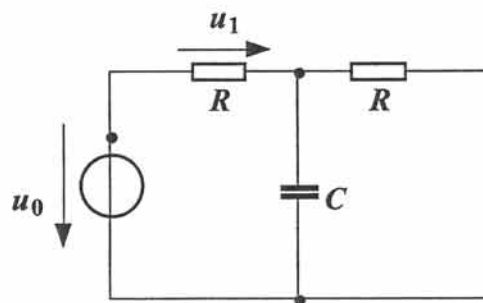


Abb.A2.20a

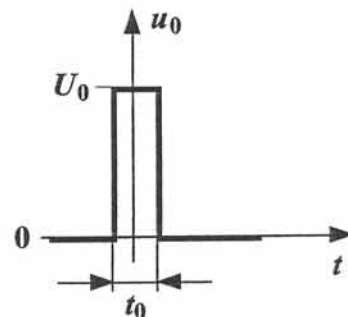


Abb.A2.20b

A2.21 Einschalten eines Relais: In der Schaltung Abb.A2.21a bedeuten R_L und L Ersatzgrößen für den Widerstand bzw. die Induktivität der Spule eines

(offenen) Relais. Um den Dauerstrom niedrig zu halten und trotzdem kleine Ansprechzeiten zu erreichen, wird der Strombegrenzungswiderstand R_C durch einen Kondensator mit der Kapazität C überbrückt. Geben Sie die Differentialgleichung und die zugehörigen Anfangsbedingungen für den Zeitverlauf des Stroms $i(t)$ an.

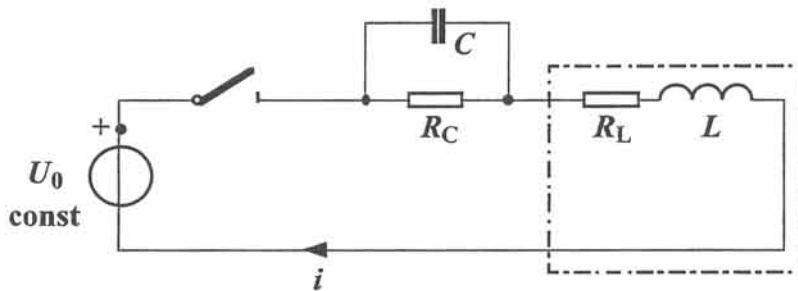


Abb.A2.21a

A2.22 Induktive Rückkopplung: In Abb.A2.22a ist eine Schaltung angegeben, die einen idealen, invertierenden Spannungsverstärker und einen näherungsweise streuungsfreien Transformator enthält.

- (i) Stellen Sie die Differentialgleichung für die Ausgangsspannung u_A auf.
- (ii) Wie groß muss die Verstärkung V für den Grenzfall einer freien, stationären Schwingung sein? Nehmen Sie dabei R_1, R_2, M, n und C als gegeben an.
- (iii) Wie groß ist die Frequenz dieser Schwingung?

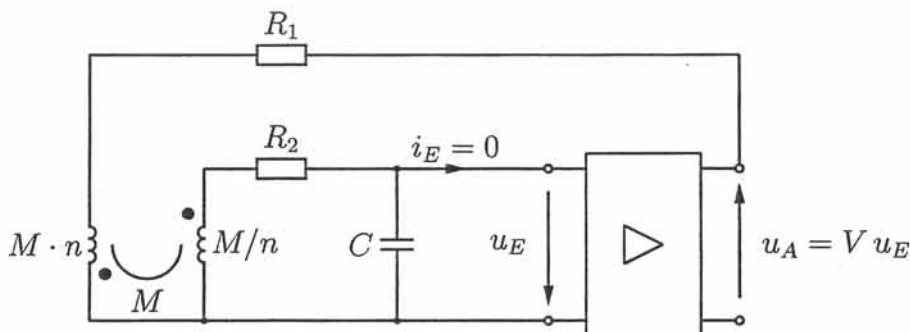


Abb.A2.22a

A2.23 Schwingungserzeuger: Die Schaltung aus Abb.A2.23a mit idealen Operationsverstärkern soll in einem Schwingungserzeuger eingesetzt werden.

- (i) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Glieds, z.B. durch Wechselstromanalyse und anschließender Normierung ($T_B = RC$, $U_{EB} = U_{AB}$).
- (ii) Welcher Bedingung müssen die drei Widerstände genügen, damit als Sprungantwort eine ungedämpfte Schwingung entsteht? Wie groß ist die dann sich einstellende Frequenz?

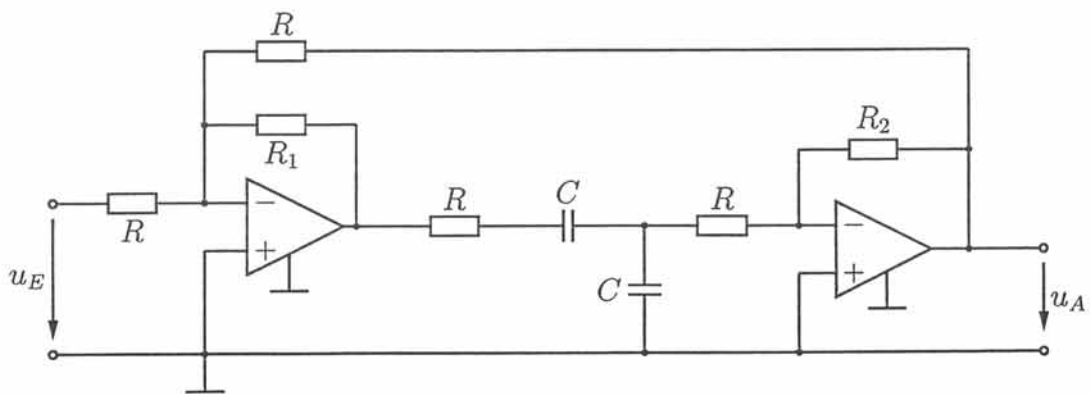


Abb.A2.23a

A2.24 Schalten induktiv gekoppelter Kreise: Die beiden Spulen in Abb. A2.24a sind angenähert ideal gekoppelt ($k = 1$), die Schaltung ist ursprünglich stromfrei.

- (i) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S geschlossen und damit die Primärseite an die Gleichspannung U_0 gelegt. Geben Sie die Differentialgleichung für den Sekundärstrom i_2 an. Berechnen und skizzieren Sie damit den Verlauf $i_2(t)$. Für die Festlegung der Anfangsbedingungen können Sie die Stetigkeit der in den ideal gekoppelten Spulen magnetisch gespeicherten Energie

$$W = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 - Mi_1i_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{L_1}i_1 - \sqrt{L_2}i_2)^2$$

bei Schaltvorgängen benutzen.

- (ii) Nach dem Erreichen des stationären Wertes von i_1 wird S wieder geöffnet. Berechnen und skizzieren Sie auch dafür $i_2(t)$.

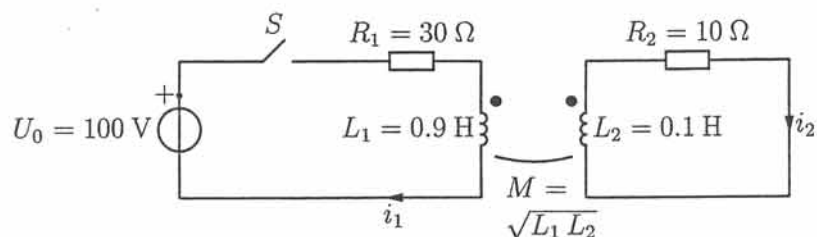


Abb.A2.24a

A2.25 Hochsetzsteller: Abb.A2.25a zeigt die Prinzipschaltung eines Hochsetzstellers zur Versorgung eines Lastwiderstands R aus einer Gleichspannungsquelle $U_0 = \text{const}$, wobei der Schalter S gemäß Abb.A2.25b periodisch arbeitet.

- (i) Berechnen Sie den Zeitverlauf des Stroms i für den eingeschwungenen Zustand.
- (ii) Geben Sie den zugehörigen Zeitverlauf der Spannung u_R an.
- (iii) Wie groß ist der Durchschnittswert von u_R nach (ii)?

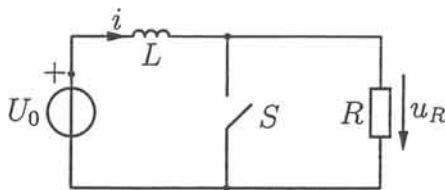


Abb.A2.25a

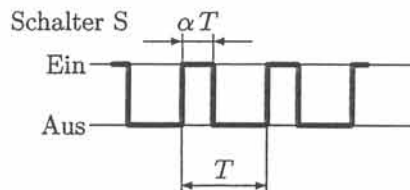


Abb.A2.25b

A2.26 Gleichstromglied: Wird eine widerstandsbehaftete Spule nach Abb. A2.26a an eine Sinusspannung gelegt, so findet i.A. ein Ausgleichsvorgang statt. Dabei überlagert sich dem eingeschwungenen Sinusstrom eine exponentiell abklingende Komponente, „Gleichstromglied“ genannt.

- (i) Lösen Sie die Differentialgleichung für den Strom $i(t)$ mit den zugehörigen Anfangsbedingungen nach Einführung passend bezogener Größen und diskutieren Sie den Ausgleichsvorgang in Abhängigkeit vom Einschaltzeitpunkt, d.h. vom Nullphasenwinkel φ_u .
- (ii) Wählen Sie speziell $\omega L/R = 20$ und zeichnen Sie den Verlauf $i(t)$ für den „ungünstigsten“ Schaltzeitpunkt (größtes „Gleichstromglied“).

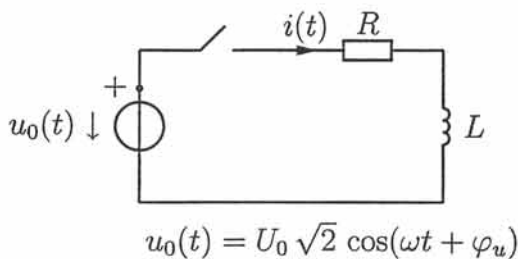


Abb.A2.26a

A2.27 Ausschalten eines leerlaufenden Transformators: Die in Abb. A2.27a angegebene Ersatzschaltung dient zur Untersuchung der Vorgänge beim Ausschalten eines leerlaufenden technischen Leistungstransformators.

Der Transformator liegt zunächst mit geschlossenem Schalter S an der Sinusspannung

$$u_0(t) = U_N \sqrt{2} \cos(\omega_N t + \varphi_u)$$

und nimmt dabei im eingeschwungenen Zustand den so genannten Magnetisierungsstrom auf, der durch die große Induktivität L bestimmt wird. Nach dem Öffnen von S werden Kapazitäten, zusammengefasst in C , wirksam. Dies führt zu einer Spannungsschwingung an der Wicklung, deren Kreisfrequenz typisch das 10- bis 20-fache von ω_N beträgt.

- (i) Bestimmen Sie diese Schwingung in Abhängigkeit vom Ausschaltzeitpunkt, d.h. in Abhängigkeit vom Nullphasenwinkel φ_u , wenn bei $t = 0$ ausgeschaltet wird. Der Widerstand R kann dabei vernachlässigt werden.
- (ii) Welcher Ausschaltzeitpunkt ist bezüglich der Spannungsbeanspruchung der Wicklung und des Schalters am ungünstigsten? Geben Sie die Spitzenwerte im Verhältnis zu $U_N \sqrt{2}$ an.

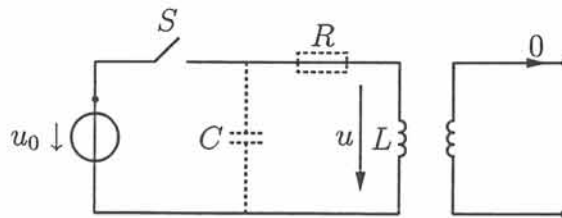


Abb.A2.27

A2.28 Ausschalten eines generatornahen Kurzschlusses: Für die vereinfachte Untersuchung der Spannungsbeanspruchung eines Leistungsschalters beim Ausschalten eines generatornahen Kurzschlusses wird das Modell nach Abb.A2.28a verwendet. Diese stark vereinfachte Ersatzschaltung fasst in L und C wirksame Induktivitäten bzw. Kapazitäten zusammen. R ist ein passend gewählter Dämpfungswiderstand.

- (i) Der Schalter S ist zunächst relativ lange geschlossen, so dass sich eine stationäre Stromschwingung $i(t) = i_D(t)$ (Dauerkurzschlussstrom) einstellt. Berechnen Sie diese.
- (ii) Genau bei einem Nulldurchgang von $i(t)$ wird dann der Schalter S geöffnet. Stellen Sie die Differentialgleichung für die Spannung $u_S(t)$ zwischen den Schaltkontakten zusammen mit den Anfangsbedingungen auf. Führen Sie anschließend bezogene Variablen gemäß

$$\tau = \omega t, \quad y = \frac{u_S}{U_0 \sqrt{2}}, \quad u = \frac{u_0}{U_0 \sqrt{2}}$$

ein und schreiben Sie die Differentialgleichung in der bezogenen Standardform für gedämpfte Schwingungen (Parameter ν_0 und ϑ).

- (iii) Bestimmen Sie die stationäre (eingeschwungene) Lösung $y_{st}(\tau)$ unter Berücksichtigung von $\nu_0^2 \gg 1$ und $\vartheta^2 \ll 1$.
- (iv) Lösen Sie nun die Differentialgleichung für die bezogene Differenzspannung

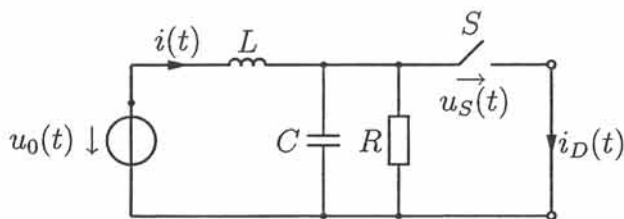
$$x(\tau) = y(\tau) - y_{st}(\tau)$$

mit den zugehörigen Anfangsbedingungen. Dies ist etwas übersichtlicher als die direkte Ermittlung von $y(\tau)$.

- (v) Zeichnen Sie schließlich den Verlauf von

$$y(\tau) = x(\tau) + y_{st}(\tau)$$

im Anfangsintervall $0 \leq \tau < 2\pi$.



$$u_0(t) = U_0 \sqrt{2} \cos(\omega_N t), U_0 = 12 \text{ kV},$$

$$\omega_N = 100 \pi \text{ s}^{-1}, \omega_N L = 0,3 \Omega,$$

$$R = 15 \Omega, \frac{1}{\omega_N C} = 120 \Omega$$

Abb.A2.28a

A2.29 PID-Glied: Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantwort des in Abb.A2.29a dargestellten Übertragungsglieds. Verwenden Sie dabei bezogene Größen mit $U_{EB} = U_{AB}$ und $T_B = RC$.

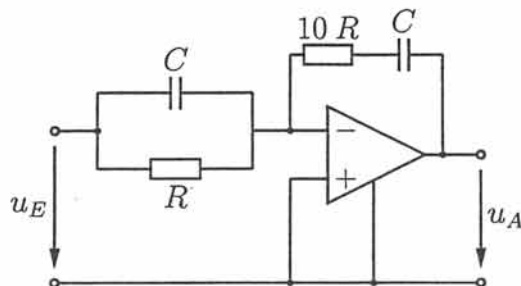


Abb.A2.29a

A2.30 Aktives Tiefpassfilter: Die Schaltung in Abb.A2.30a zeigt eine systematische, allerdings nicht aufwandsoptimale Realisierung eines Tiefpasses dritter Ordnung mit so genannter kritischer Dämpfung. Berechnen und zeichnen Sie dessen Sprungantwort ($U_{EB} = U_{AB}$, $T_B = RC$).

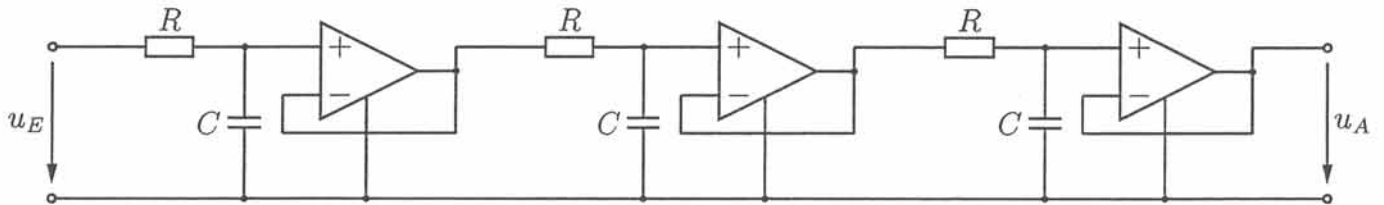


Abb.A2.30a

A3.1 Fourier-Transformation mit Tabelle: Bestimmen Sie die Fourier-Transformierten folgender Funktionen unter Verwendung von Transformationstabellen

- | | |
|--|--|
| (i) $2e^{-3\tau}\varepsilon(\tau)$, | (iv) $2\tau e^{-3\tau}\varepsilon(\tau)$, |
| (ii) $4e^{-2\tau}\sin(8\tau)\varepsilon(\tau)$, | (v) $(5e^{-4\tau} - 3e^{-7\tau})\varepsilon(\tau)$, |
| (iii) $3\sin(4\tau)$, $-\infty < \tau < \infty$, | (vi) $5\delta(\tau) + 4\varepsilon(\tau)$. |

A3.2 Fourier-Rücktransformation mit Tabelle: Bestimmen Sie mit Hilfe von Transformationstabellen die zu den Spektralfunktionen

$$(i) X(j\nu) = \frac{5 + j5\nu}{17 - \nu^2 + j2\nu}, \quad (ii) U(j\omega) = 40 \text{ Vs} \frac{\sin(2\omega/\omega_0)}{2\omega/\omega_0} + 5 \text{ Vs}$$

gehörenden Zeitfunktionen.

A3.3 Grundlegende Eigenschaften: Benutzen Sie eine Fourier-Transformationstabelle und die grundlegenden Eigenschaften der Fourier-Transformation zur Berechnung der Spektren folgender Signale.

- (i) $x(\tau) = \begin{cases} 8 & \text{für } |\tau| < 5, \\ 0 & \text{für } |\tau| > 5; \end{cases}$
- (ii) $x(\tau) = \begin{cases} 8 & \text{für } |\tau| < 10, \\ 0 & \text{für } |\tau| > 10; \end{cases}$
- (iii) $x(\tau) = \begin{cases} 8 & \text{für } |\tau + 2| < 5, \\ 0 & \text{für } |\tau + 2| > 5; \end{cases}$
- (iv) $x(\tau) = e^{-2(\tau-\tau_0)}\varepsilon(\tau)$;
- (v) $x(\tau) = e^{-2\tau}\varepsilon(\tau - \tau_0)$;
- (vi) $x(\tau) = e^{-2(\tau-\tau_0)}\varepsilon(\tau - \tau_0)$;
- (vii) $x(\tau) = e^{-2(\tau-5)}\varepsilon(\tau - 1)$;
- (viii) $x(\tau) = [e^{-3\tau}\varepsilon(\tau)] * [e^{-8\tau}\varepsilon(\tau)]$.

A3.4 Faltungsintegral: Zeigen Sie, dass sich der Ausdruck (viii) aus Aufgabe 3.3 in der Form

$$x(\tau) = e^{-3\tau}\varepsilon(\tau) \int_0^\tau e^{-5\tau'} d\tau'$$

schreiben lässt. Berechnen Sie diesen Ausdruck und bilden Sie dann die Fourier-Transformierte. Das Ergebnis sollte mit dem früheren übereinstimmen.

A3.5 Faltungsprodukt: Berechnen Sie das Faltungsprodukt

$$x(\tau) = \text{rect}(\tau) * \text{rect}(\tau)$$

- (i) direkt im Zeitbereich,

A3.16 Autokorrelation: Berechnen und skizzieren Sie die Autokorrelationsfunktionen der Signale

(i) $x(\tau) = \delta(\tau) + \delta(\tau - \tau_1)$,

(ii) Abb.A3.16a.

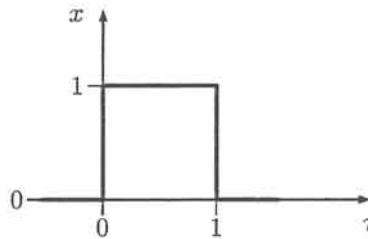


Abb.A3.16a

A3.17 Kreuzkorrelation: Drücken Sie für die beiden Signale

$$x_1(\tau) = x(\tau), \quad x_2(\tau) = x(\tau + \tau_0)$$

die Kreuzkorrelationsfunktionen

$$r_{12}^E = x_1 \otimes x_2, \quad r_{21}^E = x_2 \otimes x_1$$

durch die Autokorrelationsfunktion $r_{xx}^E = x \otimes x$ aus.

A3.18 Schranke für die Korrelationsfunktion: Für reellwertige Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx \right]^2 \leq \left[\int_a^b f^2(x)dx \right] \left[\int_a^b g^2(x)dx \right].$$

Zeigen Sie damit, dass die Kreuzkorrelationsfunktion $r_{12}^E(\tau)$ zweier reeller, energiebegrenzter Signale gemäß

$$|r_{12}^E(\tau)| \leq \sqrt{r_{11}^E(0)r_{22}^E(0)}$$

durch die Autokorrelationsfunktionen der beiden Signale beschränkt ist.

A3.19 Wigner-Verteilung: Zur „energetischen“ Charakterisierung von Signalen $x(\tau) \leftrightarrow X(j\nu)$ sowohl im Zeitbereich wie auch im Frequenzbereich erweist sich die Wigner-Verteilung

$$\begin{aligned} W_x(\tau, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau - \tau'/2)x(\tau + \tau'/2)e^{-j\nu\tau'} d\tau' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\nu - j\nu'/2)X(j\nu + j\nu'/2)e^{j\nu'\tau} d\nu' \end{aligned}$$

als vorteilhaft.

(i) Zeigen Sie

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\tau, \nu) d\nu = |x(\tau)|^2, \quad \text{zeitliche Signalenergiedichte,}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\tau, \nu) d\tau = \frac{1}{2\pi} |X(j\nu)|^2, \quad \text{spektrale Signalenergiedichte.}$$

(ii) Berechnen Sie die Wigner-Verteilung des Rechteck-Signals $x(\tau) = \text{rect}(\tau)$.

A3.20 Ambiguity-Funktion: Zur „korrelativen“ Charakterisierung von Signalen $x(\tau) \leftrightarrow X(j\nu)$ sowohl im Zeitbereich wie auch im Frequenzbereich wird die „ambiguity function“

$$A_x(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau' - \tau/2)x(\tau' + \tau/2) e^{-j\nu\tau'} d\tau'$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\nu' - j\nu/2)X(j\nu' + j\nu/2) e^{j\nu'\tau} d\nu'$$

verwendet.

(i) Zeigen Sie

$$A_x(\tau, 0) = (x \otimes x)(\tau), \quad \text{zeitliche Autokorrelation,}$$

$$A_x(0, \nu) = \frac{1}{2\pi} (X \otimes X)(j\nu), \quad \text{spektrale Autokorrelation.}$$

(ii) Welche charakteristische Signalgröße wird durch

$$A_x(0, 0) = (x \otimes x)(0) = \frac{1}{2\pi} (X \otimes X)(0)$$

dargestellt?

(iii) Berechnen Sie $A_x(\tau, \nu)$ für das Rechteck-Signal $x(\tau) = \text{rect}(\tau)$.

A4.1 Stationäre Schwingungen: Berechnen Sie die stationären Ausgänge des Systems

$$y'' + 0,4y' + 4y = u' + u$$

für die Sinuseingänge

$$(i) \cos(\tau), \quad (ii) \cos(2\tau), \quad (iii) \cos(8\tau).$$

A4.2 Existenz eingeschwungener Zustände: Bestimmen Sie für die Systeme

$$(i) y'' + 6y' + 5y = u' + 0,1u$$

$$(ii) y'' + 6y' + 5y = u' - 0,1u$$

$$(iii) y'' + 4y' - 5y = u' + 0,1u$$

$$(iv) y'' + 4y' - 5y = u' - 0,1u$$

$$(v) y'' - 6y' + 5y = u' - 0,1u$$

zum Eingang

$$u(\tau) = \cos(2\tau)$$

die Partikulärlösungen

$$y_p(\tau) = |G(j\nu)| \cos[\nu\tau + \varphi_G(\nu)].$$

Für welche der Systeme stellt y_p den eingeschwungenen Zustand y_{st} dar? Lokalisieren Sie jeweils Pole und Nullstellen.

A4.3 Eingeschwungener Zustand bei bekannter Sprungantwort: Ein Übertragungsglied nach Abb.A4.3 liefert zur Eingangsspannung

$$u_E = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ U_0 = \text{const} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

als Nullzustandsantwort für $t \geq 0$ die Leerlaufspannung

$$u_A = \frac{U_0}{2} \left(1 - e^{-t/T}\right), \quad T = 0,12 \text{ ms}.$$

Bestimmen Sie damit die stationäre Schwingung (eingeschwungener Zustand) der Leerlaufspannung am Ausgang (Amplitude, Frequenz, Nullphasenwinkel), wenn am Eingang die Sinusspannung

$$u_E = 5 \text{ V} \cdot \cos(\omega t)$$

mit einer Frequenz von 1 kHz liegt.

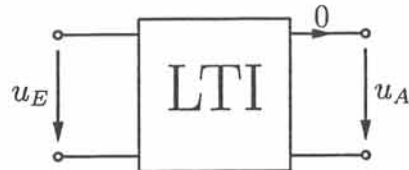


Abb.A4.3

A4.4 Komplexer Frequenzgang: Berechnen und skizzieren Sie für die Schaltung aus Abb.A4.4a den komplexen Frequenzgang der Übertragungsfunktion (Frequenzgangortskurve).

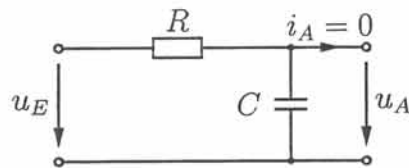


Abb.A4.4a

A4.5 Betragsteil von Bode-Diagrammen: Zeichnen Sie die Betragsteile der Bode-Diagramme für die Systeme aus Aufgabe A4.2. Welchen Systemen entspricht das gleiche Diagramm?

A4.6 Winkelteil von Bode-Diagrammen: Zeichnen Sie die Winkelteile der Bode-Diagramme für die Systeme aus Aufgabe A4.2. Welchen Systemen entspricht das gleiche Diagramm?

A4.7 Rekonstruktion der Übertragungsfunktion: Abb.A4.7 zeigt den Betragsteil des Bode-Diagramms eines Minimalwinkelsystems. Rekonstruieren Sie daraus die Übertragungsfunktion.

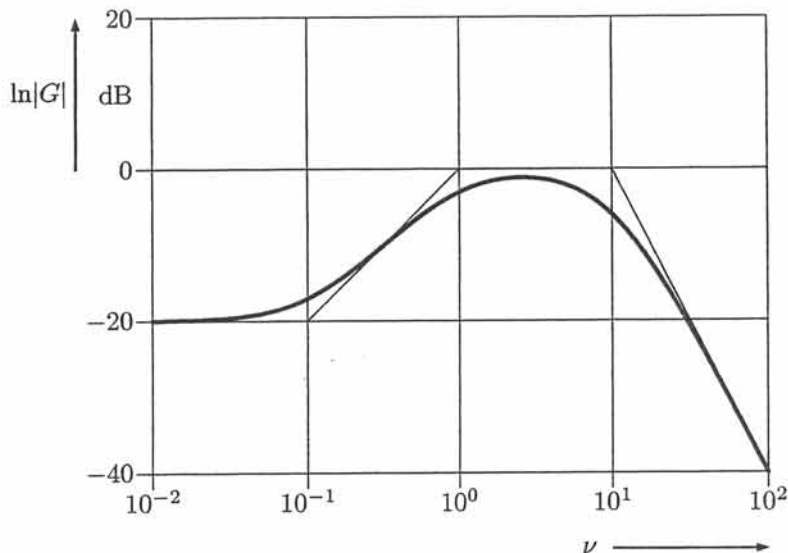


Abb.A4.7

A4.8 Gekoppelte Differenzierer: Das Strukturdiagramm Abb.A4.8a zeigt ein System mit zwei invertierenden Differenzierern.

- (i) Geben Sie die Differentialgleichung und die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems an.
- (ii) Zeichnen Sie den Betragsteil und den Winkelteil des Bode-Diagramms.

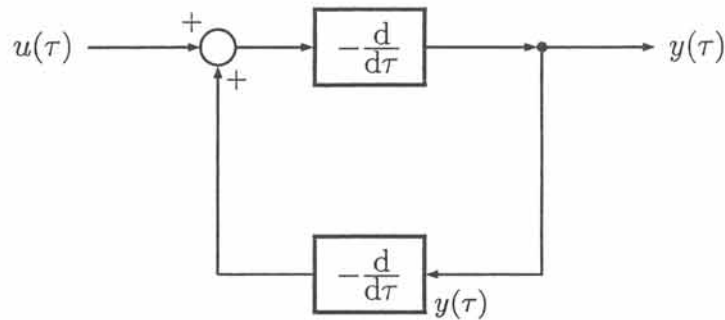


Abb.A4.8a

A4.9 Resonanz im Bode-Diagramm: Die Schaltung in Abb.A4.9a wird als Übertragungsglied verwendet. Zeichnen Sie das zugehörige Bode-Diagramm mit $\nu = \omega\sqrt{LC}$ als bezogener Frequenzvariablen.

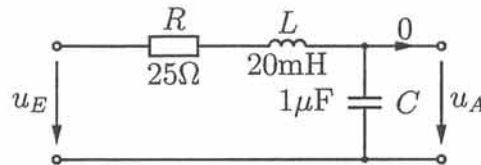


Abb.A4.9a

A4.10 Kreuzglied: Die Schaltung in Abb.A4.10a wird als Übertragungsglied mit u_E als Eingangsgröße und u_A als Ausgangsgröße (Leerlauf) benutzt. Verwenden Sie die Bezugsgrößen $U_{EB} = U_{AB}$, $T_B = RC$ und bestimmen Sie

- (i) den Frequenzgang des Übertragungsverhaltens als Bode-Diagramm,
- (ii) die Sprungantwort (Skizze!).

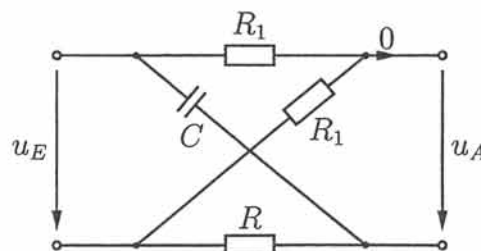


Abb.A4.10a

A4.11 Tiefpass: Ein aktives Tiefpassfilter zweiter Ordnung lässt sich beispielsweise durch die Schaltung in Abb.A4.11a realisieren. Bestimmen Sie zuerst die Übertragungsfunktion (Bezugswerte $U_{EB} = U_{AB}$, $T_B = RC$, Frequenzvariable $\nu = \omega RC$) und zeichnen Sie dann die Betragsteile der Bode-Diagramme für

- (i) $R_1/R_2 = 0$ („kritische Dämpfung“)
- (ii) $R_1/R_2 = 0,268$ (Bessel)
- (iii) $R_1/R_2 = 0,586$ (Butterworth)
- (iv) $R_1/R_2 = 0,955$ (Chebychev)

zum Vergleich in ein Bild.

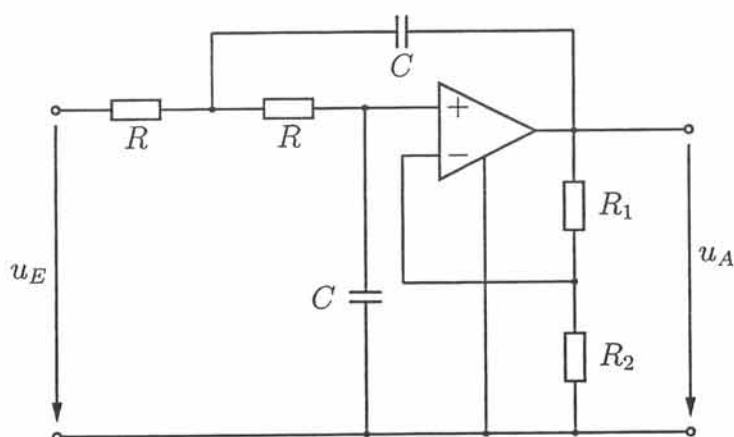


Abb.A4.11a

A4.12 Übertragen eines Rechteckimpulses: Am Eingang eines Filters, dessen Übertragungsfunktion $G(s)$ bekannt ist, liegt ein verschobener Rechteckimpuls $u(\tau)$ (Abb.A4.12a).

- (i) Berechnen Sie zunächst allgemein die Spektralfunktion $Y(j\nu)$ des Ausgangssignals.
- (ii) Skizzieren Sie $|Y(j\nu)|$ speziell für $\tau_2 - \tau_1 = 1$ und die Übertragungsfunktion $G(s) = 1/(s + 1)$ aus Aufgabe A4.4.

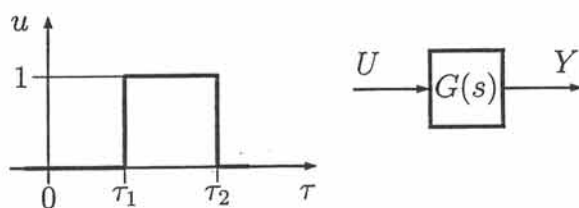


Abb.A4.12a

A4.13 Ideales Tiefpassfilter: Berechnen Sie formal die Stoßantwort eines idealen Tiefpassfilters der Grenzfrequenz f_g . Skizzieren Sie das Ergebnis und machen Sie deutlich, dass ein ideales Tiefpassfilter ein nichtkausales System darstellt.

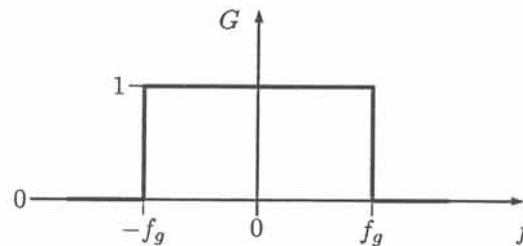


Abb.A4.13a

A4.14 Totzeitsysteme: Bestimmen Sie die Frequenzgänge $G(j\nu)$ von Systemen mit Zeitverzögerung, die durch folgende Differential-Differenzgleichungen beschrieben werden:

$$(i) \quad y''(\tau) + 2y'(\tau - 1) + 3y(\tau) = u'(\tau) + 0,5u(\tau);$$

$$(ii) \quad y''(\tau) + 5y'(\tau) + 2y(\tau) - y'(\tau - 0,2) = u(\tau - 0,5).$$

A4.15 Kammfilter: Das in Abb.A4.15a als Strukturdiagramm wiedergegebene System stellt ein „Kammfilter“ dar. Berechnen und skizzieren Sie seinen Betragsfrequenzgang in linearen Maßstäben (nicht als Bode-Diagramm).

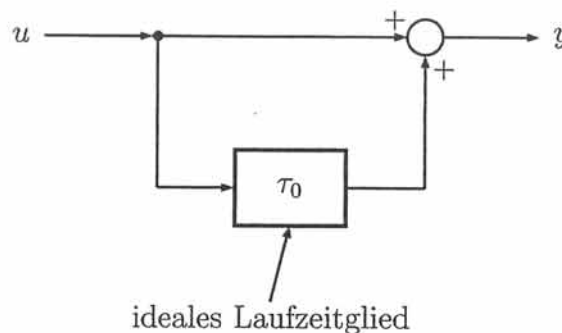


Abb.A4.15a

A4.16 Zufallssignal an einem Differenzierer: Am Eingang eines Differenzierers liegt ein stationäres Zufallssignal $\tilde{u}(\tau)$ mit bekannter Autokorrelationsfunktion $r_{uu}(\tau)$ (Abb.A4.16). Berechnen Sie das Leistungsspektrum $R_{yy}(j\nu)$ und die Autokorrelationsfunktion $r_{yy}(\tau)$ des Ausgangssignals.

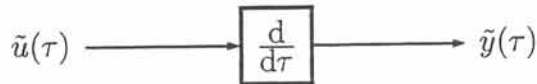


Abb.A4.16

A4.17 Kreuzkorrelationsfunktion: Gemäß Abb.A4.17 liegt an zwei Systemen mit den Stoßantworten $g_1(\tau)$ bzw. $g_2(\tau)$ das gleiche stationäre Zufallssignal $\tilde{u}(\tau)$, dessen Autokorrelationsfunktion $r_{uu}(\tau)$ bekannt ist. Berechnen Sie allgemein die Kreuzkorrelationsfunktion der beiden Ausgangssignale.

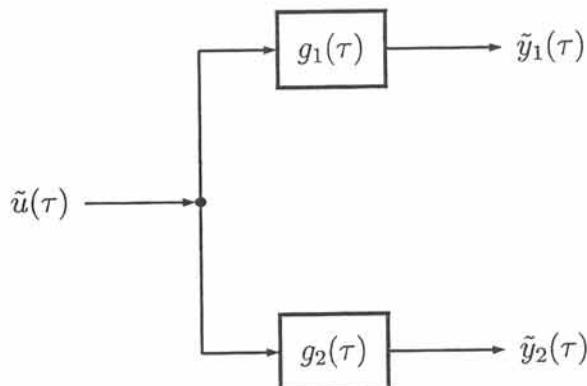


Abb.A4.17

A4.18 Monochromatischer Prozess: Ein stabiles LTI-System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ wird durch ein stationäres Zufallssignal $\tilde{u}(\tau)$ aus der Klasse der „monochromatischen Prozesse“ erregt, die durch Autokorrelationsfunktionen der Form

$$r_{uu}(\tau) = u_{\text{eff}}^2 \cos(\nu_0 \tau)$$

mit konstantem ν_0 gekennzeichnet sind. Berechnen Sie allgemein die Signalleistung y_{eff}^2 des Ausgangssignals.

A4.19 Weißes Rauschen an einem Bandpass: Abb.A4.19 zeigt den komplexen Frequenzgang eines idealen Bandpass-Filters mit der bezogenen Mittenfrequenz ν_0 und der bezogenen Bandbreite β .

Angenommen, am Eingang liegt weißes Rauschen mit dem Leistungsspektrum $R_{ww}(j\nu) = K$. Berechnen Sie für das Ausgangssignal

- (i) das Leistungsspektrum,
- (ii) die Autokorrelationsfunktion,
- (iii) den Effektivwert.

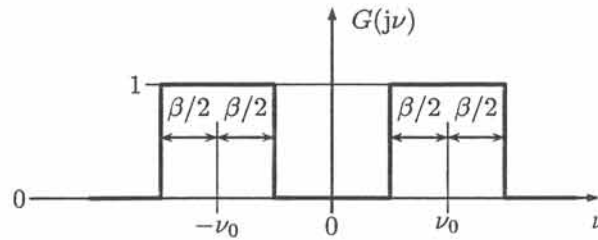


Abb.A4.19

A4.20 Weißes Rauschen an einem R-C-Glied: Das einfache R-C-Übertragungsglied aus Abb.A4.20 besitzt bekanntlich die Stoßantwort

$$g(\tau) = e^{-\tau} \varepsilon(\tau),$$

wenn für die Bezugsgrößen $U_{EB} = U_{AB}$ und $T_B = RC$ gewählt wird. Am Eingang liege weißes Rauschen mit dem Leistungsspektrum $R_{uu}(j\nu) = K$.

- (i) Berechnen Sie das Leistungsspektrum $R_{yy}(j\nu)$ des Ausgangssignals und daraus die Signalleistung y_{eff}^2 .
- (ii) Berechnen Sie die Autokorrelationsfunktion $r_{yy}(\tau)$ des Ausgangssignals. Wie finden Sie damit die Signalleistung y_{eff}^2 ?

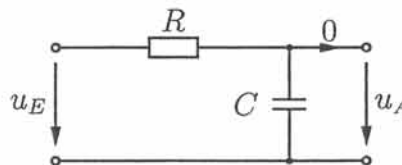


Abb.A4.20

A5.1 Diverse Fourier-Reihen: Geben Sie die Fourier-Reihendarstellung folgender Spannungsverläufe an.

(i) $u(t) = u_0 \cos[\pi(f_0 t - 1)/4];$

(ii) $u(t) = u_0 [\cos(4\omega_0 t) + \sin(6\omega_0 t)];$

(iii) $u(t)$ ist periodisch mit der Periodendauer 20 ms und

$$u(t) = u_0 \exp(-t/T) \text{ für } -T < t < T = 10 \text{ ms};$$

(iv) $u(t)$ ist periodisch mit der Periodendauer $4T$ und

$$u(t) = \hat{u} \cdot \begin{cases} \sin(\pi t/T) & \text{für } 0 < t < 2T, \\ 0 & \text{für } 2T < t < 4T; \end{cases}$$

(v) Verlauf nach Abb.A5.1a;

(vi) Verlauf nach Abb.A5.1b;

(vii) Verlauf nach Abb.A5.1c.

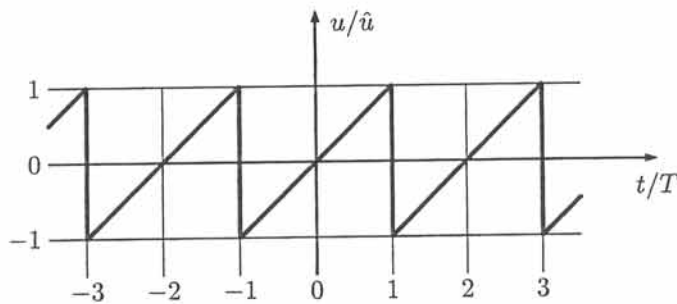


Abb.A5.1a

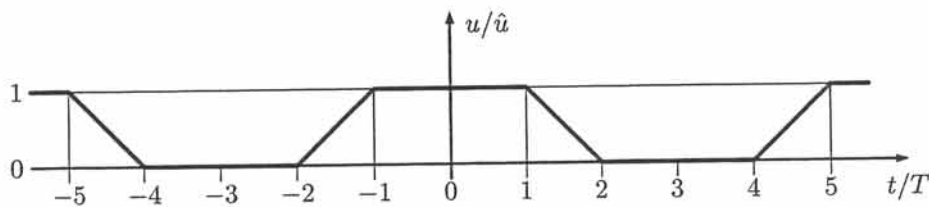


Abb.A5.1b

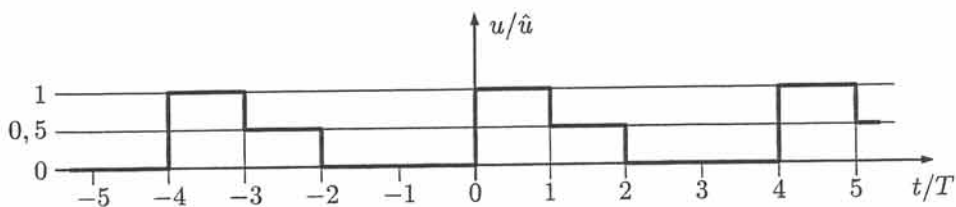


Abb.A5.1c

A5.2 Ausschnitt einer Sinusschwingung: Durch Ausschneiden eines Streifens der Breite $2b$ aus der Sinusschwingung Abb.A5.2a entsteht das periodische Signal Abb.A5.2b. Berechnen Sie dessen Grundschwingung.

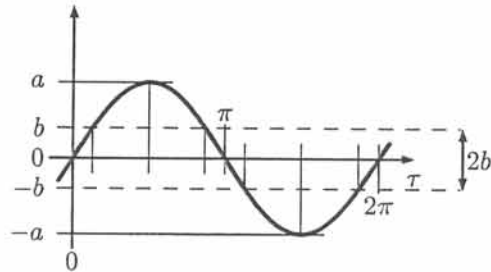


Abb.A5.2a

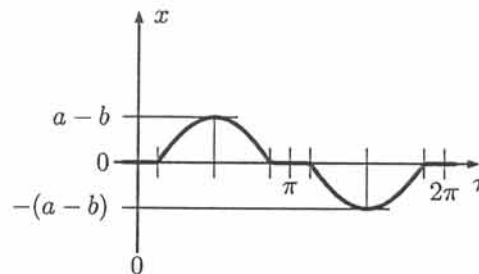


Abb.A5.2b

A5.3 Angeschnittene Sinusschwingung: Bestimmen Sie die Grundschwingung des 2π -periodischen Signals aus Abb.A5.3.

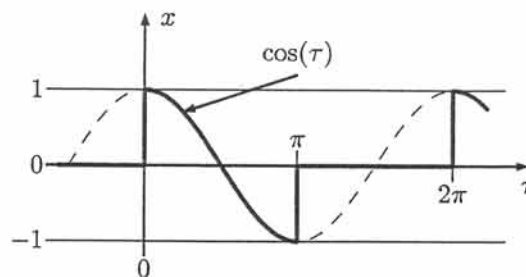


Abb.A5.3

A5.4 Pulsierende Spannung: Abb.A5.4a zeigt den Verlauf einer periodisch pulsierenden Spannung.

(i) Bestimmen Sie die zugehörige Fourier-Reihe in der Form

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_1 t).$$

- (ii) Skizzieren Sie die Abhängigkeit der Amplituden der Grundschwingung und der ersten nicht verschwindenden Oberschwingung vom Winkel α .

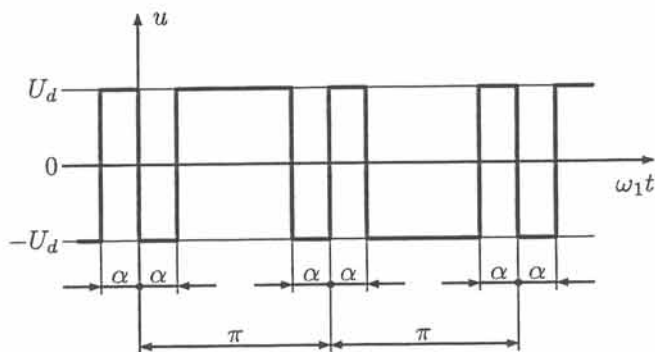


Abb.A5.4a

A5.5 Reelle Darstellung: Bestimmen Sie die zur Funktion

$$x(\tau) = (2\pi - \tau) \tau$$

gehörende, im Intervall $0 \leq \tau \leq 2\pi$ gültige Fourier-Reihe in reeller Darstellung.

A5.6 Periodische Schwingungsblöcke: Das in Abb.A5.6 skizzierte Signal besteht aus periodisch wiederholten Blöcken von Sinusschwingungen. Dabei sind n und $N \geq n$ natürliche Zahlen. Geben Sie die zugehörige Fourier-Reihe an.

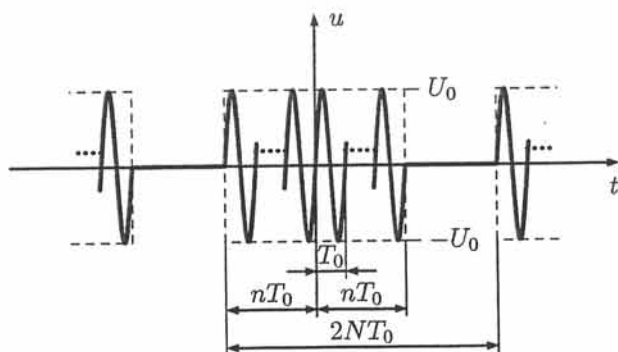


Abb.A5.6

A5.7 Spektrum eines Produkts: Ein Signal $x(\tau)$ habe die Fourier-Transformierte $X(j\nu)$. Weiters sei $p(\tau)$ eine 2π -periodische Funktion mit der Fourier-Reihendarstellung

$$p(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\tau}.$$

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte des Signals $y(\tau) = x(\tau)p(\tau)$.

A5.8 Periodische Antworten eines LTI-Systems: Ein lineares, zeitinvariantes System besitzt in Originalvariablen die Stoßantwort

$$\tilde{g}(t) = \frac{a}{T} e^{-4t/T} \varepsilon(t).$$

Berechnen Sie die Fourier-Reihendarstellung der stationären Ausgangsschwingungen $\tilde{y}(t)$ zu den Eingängen $\tilde{u}(t)$,

(i) $\tilde{u}(t) = \cos(2\pi t/T)$;

(ii) $\tilde{u}(t) = \sin(4\pi t/T) + \cos(6\pi t/T + \pi/4)$;

(iii) $\tilde{u}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}(t - kT)T$;

(iv) $\tilde{u}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \tilde{\delta}(t - kT)T$;

(v) $\tilde{u}(t)$ ist die Rechteckschwingung aus Abb.A5.8.

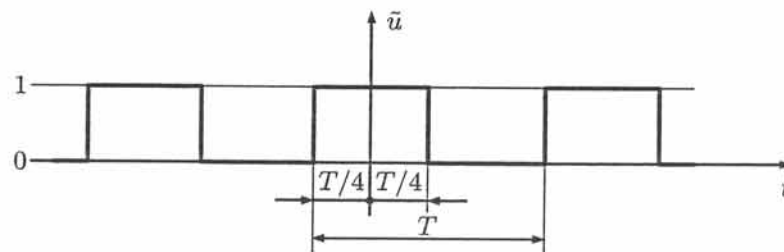


Abb.A5.8

A5.9 Ausgang als reelle Fourier-Reihe: Ein lineares, zeitinvariantes System ist durch die Übergangsfunktion (Sprungantwort)

$$h(\tau) = (1 - e^{-4\tau}) \varepsilon(\tau)$$

gekennzeichnet. Am Eingang liegt die Schwingung Abb.A5.9. Geben Sie die Fourier-Reihe der stationären Ausgangsschwingung in der Form

$$y(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{y}_k \cos(k\tau + \varphi_k)$$

an, d.h. ermitteln Sie die bezogenen Amplituden und die Nullphasenwinkel der Fourier-Teilschwingungen.

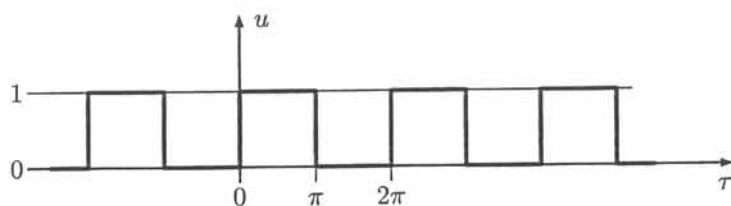


Abb.A5.9

A5.10 Summieren von Reihen: Die Darstellung der Funktion $x(\tau) = \tau^2$ im Intervall $-\pi \leq \tau \leq \pi$ als komplexe Fourier-Reihe liefert die Fourier-Koeffizienten

$$c_0 = \frac{\pi^2}{3}, \quad c_k = \frac{2}{k^2} \cos(k\pi).$$

Nutzen Sie dieses Ergebnis zur Berechnung der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}.$$

A6.1 Spannung an einer Spule: Eine Spule mit der Induktivität $L = 31,8 \text{ mH}$ besitzt den ohmschen Widerstand $R_L = 10 \Omega$ und wird von dem periodischen Strom

$$i(t) = 2 \text{ A} \cdot \cos(\omega t) + 0,5 \text{ A} \cdot \cos(3\omega t) + 0,2 \text{ A} \cdot \cos(5\omega t)$$

mit $\omega/(2\pi) = 50 \text{ Hz}$ durchflossen. Berechnen Sie den Zeitverlauf der anliegenden Spannung.

A6.2 Oberschwingungsgehalt: Berechnen Sie den Oberschwingungsgehalt (Klirrfaktor) der sägezahnförmigen Wechselspannung aus Abb.A6.2.

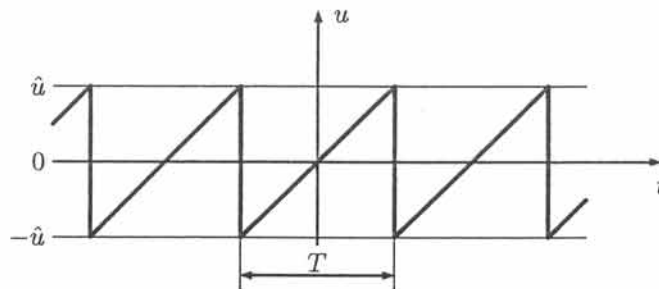


Abb.A6.2

A6.3 Periodisch wiederholte Stromblöcke: Ein Stromrichter erzeugt einseitige („unipolare“) Stromblöcke der Größe 10 A und der Dauer 10 ms mit dazwischen liegenden stromfreien Pausen der Dauer 10 ms . Berechnen Sie den Effektivwert dieses Stroms und die Effektivwerte seiner ersten drei nicht verschwindenden harmonischen Komponenten.

A6.4 Leistungsfaktor: An einem Anschlusspar werden im Verbraucher-Bezugssystem die Verläufe von Spannung und Strom gemäß

$$u = \sqrt{2} |U_1| [\cos(\omega t) + 0,800 \cos(3\omega t)],$$

$$i = \sqrt{2} |I_1| [\cos(\omega t) + 0,125 \cos(3\omega t)]$$

festgestellt. Wie groß ist der zugehörige Leistungsfaktor?

A6.5 Einweg-Gleichrichter mit Widerstand: In der Schaltung Abb.A6.5a wird ein Widerstand über eine angenähert ideale Diode von der Sinusspannung

$$u = U\sqrt{2} \cos(\omega t)$$

gespeist. Berechnen Sie – von den Anschlüssen 1,2 gesehen – die Wirkleistung, die Blindleistung, die Scheinleistung und den Leistungsfaktor im Verbraucher-Bezugssystem.

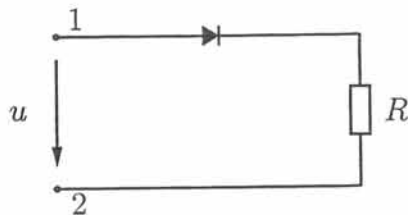


Abb.A6.5a

A6.6 Einweg-Gleichrichter mit Induktivität: In der Schaltung Abb.A6.6a wird eine relativ große Induktivität über eine angenähert ideale Diode von der Sinusspannung

$$u = U\sqrt{2} \sin(\omega t)$$

gespeist.

- (i) Skizzieren Sie in einem Diagramm die Verläufe von u und i im eingeschwungenen Zustand. Die real vorhandenen Widerstände sind dabei wegen der relativ großen Induktivität vernachlässigbar.
- (ii) Berechnen Sie – von den Anschlüssen 1,2 gesehen – die Wirkleistung, die Blindleistung, die Scheinleistung und den Leistungsfaktor im Verbraucher-Bezugssystem.

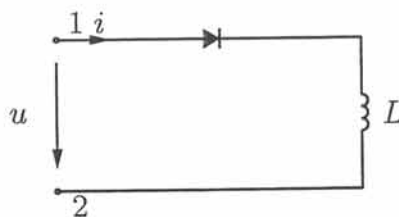


Abb.A6.6a

A6.7 Gleichstromsteller: Abb.A6.7a zeigt die Prinzipschaltung eines Gleichstromstellers zur unterbrechungsfreien, variablen Speisung einer Last, dargestellt durch den Widerstand R , aus einer Gleichspannungsquelle. Der Schalter S arbeitet dabei periodisch gemäß Abb.A6.7b, die Stromkreiselemente sind als ideal anzunehmen.

- (i) Berechnen Sie den Zeitverlauf des Stroms i für den eingeschwungenen (d.h. periodischen) Zustand.
- (ii) Bestimmen Sie für die zugehörige Spannung u_R den Durchschnittswert und die Grundschiwingung.

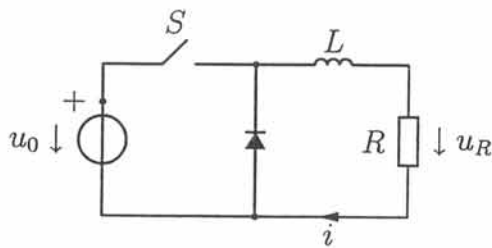


Abb.A6.7a

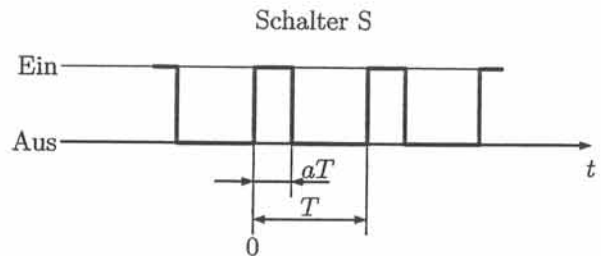


Abb.A6.7b

A6.8 Hystereseglied: Ein Element mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y besitze die Kennlinie Abb.A6.8a. Angenommen, am Eingang liegt das Sinussignal

$$u(\tau) = \hat{u} \cos(\tau), \quad \hat{u} > u_S.$$

Skizzieren Sie das Ausgangssignal und bestimmen Sie für dessen Grundschwingung die Amplitude und den Phasenverschiebungswinkel gegenüber dem Eingangssignal.

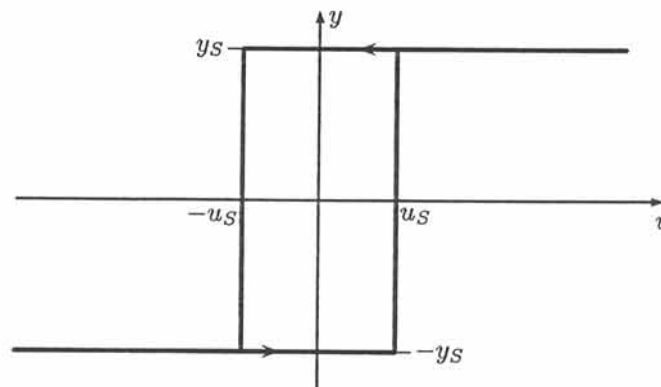


Abb.A6.8a

A6.9 Nichtlinearer Widerstand: Ein nichtlinearer Widerstand wird im Verbraucher-Bezugssystem durch die Elementgleichung

$$\frac{i}{1 \text{ A}} = \frac{u}{20 \text{ V}} + \left(\frac{u}{50 \text{ V}}\right)^2 + \left(\frac{u}{90 \text{ V}}\right)^3$$

dargestellt.

- (i) Zeichnen Sie die Spannungs-Strom-Kennlinie für den Bereich $|u| \leq 150 \text{ V}$.
- (ii) An dem Widerstand liegt eine Sinusspannung mit dem Effektivwert $U = 100 \text{ V}$. Geben Sie den Zeitverlauf des Stroms als reelle Fourier-Reihe an.

A6.10 Mischer: Die in Abb.A6.10a angegebene Schaltung wird als Dioden-Gegentakt-Modulator verwendet. Nehmen Sie die Transformatoren als ideal an und setzen Sie für die Dioden im betrachteten Bereich eine Elementgleichung der Form (Verbraucher-Bezugssystem)

$$i_D = a u_D + b u_D^2$$

voraus. Stellen Sie damit den Ausgangsstrom $i(t)$ als Summe von Sinusschwingungen dar.

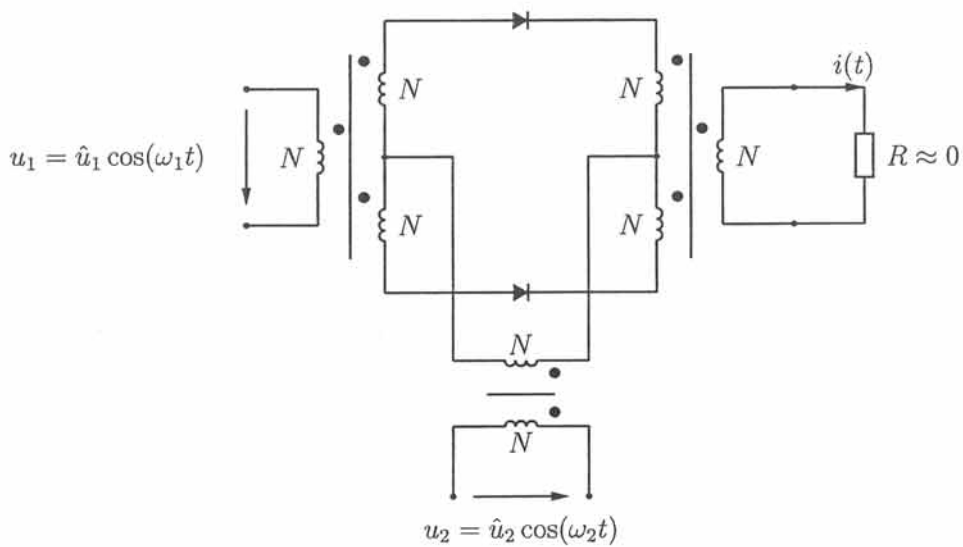


Abb.A6.10a

A7.1 Laplace-Transformation mit Tabelle: Bestimmen Sie die Laplace-Transformierten folgender Funktionen unter Verwendung von Transformationstabellen.

- (i) $2e^{-3\tau}\varepsilon(\tau)$, (iv) $2\tau e^{-3\tau}\varepsilon(\tau)$,
 (ii) $4e^{-2\tau}\sin(8\tau)\varepsilon(\tau)$, (v) $(5e^{-4\tau} - 3e^{-7\tau})\varepsilon(\tau)$,
 (iii) $3\sin(4\tau)\varepsilon(\tau)$, (vi) $5\delta(\tau) + 4\varepsilon(\tau)$.

A7.2 Laplace-Rücktransformation mit Tabelle: Bestimmen Sie mit Hilfe von Transformationstabellen die Originalfunktionen zu den folgenden Laplace-Transformierten.

- (i) $\frac{8s-1}{s^2+3s+2}$, (iii) $\frac{s+1}{s^2+2s+5}$,
 (ii) $\frac{4}{s^2+2s+17}$, (iv) $\frac{s+2}{s^2+2s+5}$.

A7.3 Partialbruchzerlegungen: Ermitteln Sie die zu den Laplace-Transformierten

- (i) $X(s) = \frac{2a^4s}{s^4+4a^4}$, $a \in \mathbb{R}$,
 (ii) $X(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)}$,
 (iii) $X(s) = \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{(s+1)^3}$

gehörenden Zeitfunktionen $x(\tau)$.

A7.4 Zeitverschiebung: Wie lauten die Laplace-Transformierten der folgenden Zeitfunktionen?

- (i) $(\tau-5)\varepsilon(\tau)$, (iv) $5e^{(6-2\tau)}\varepsilon(\tau)$,
 (ii) $(\tau-5)\varepsilon(\tau-5)$, (v) $5e^{(6-2\tau)}\varepsilon(\tau-3)$,
 (iii) $\tau\varepsilon(\tau-5)$, (vi) $5e^{-2\tau}\varepsilon(\tau-3)$.

A7.5 Vershobener Dreieckimpuls: Berechnen Sie die Laplace-Transformierte des in Abb.A7.5a skizzierten Dreieckimpulses für $\tau_1 \geq 0$.

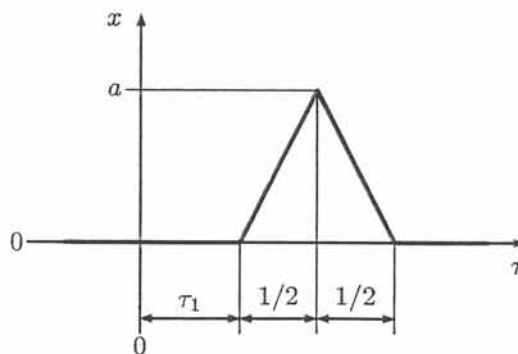


Abb.A7.5

A7.6 Laplace- und Fourier-Transformation im Vergleich: Berechnen Sie für das Signal

$$x(\tau) = \cos(\tau) \cos(2\tau) \varepsilon(\tau)$$

- (i) die Laplace-Transformierte,
- (ii) die Fourier-Transformierte.

A7.7 Potenzreihe: Angenommen, ein rechtsseitiges Signal lässt sich in eine Reihe gemäß

$$x(\tau) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \tau^n \right) \varepsilon(\tau)$$

entwickeln. Geben Sie eine entsprechende Reihenentwicklung für seine Laplace-Transformierte $X(s)$ an.

A7.8 Faltungen: Berechnen Sie die Faltungsprodukte

- (i) $x(\tau) = [e^{a\tau} \varepsilon(\tau)] * [e^{a\tau} \varepsilon(\tau)] * \dots * [e^{a\tau} \varepsilon(\tau)]$, n Faktoren,
- (ii) $x(\tau) = \varepsilon(\tau) * \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a-b}{(s-a)(s-b)} \right]$.

A7.9 Rechtsseitige periodische Signale: Angenommen, $x(\tau)$ ist ein stückweise stetiges, für $\tau > 0$ periodisches Signal mit der bezogenen Periodendauer τ_1 . Zeigen Sie, dass sich seine Laplace-Transformierte gemäß

$$\mathcal{L}[x(\tau)] = \frac{1}{1 - e^{-s\tau_1}} \int_0^{\tau_1} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

berechnen lässt. Bestimmen Sie damit die Laplace-Transformierten der Verläufe aus Abb.A7.9a - d.

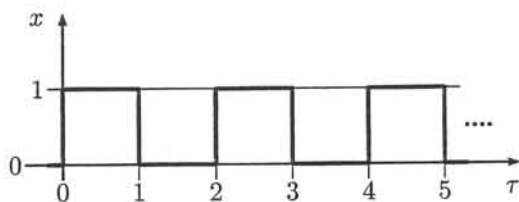


Abb.A7.9a

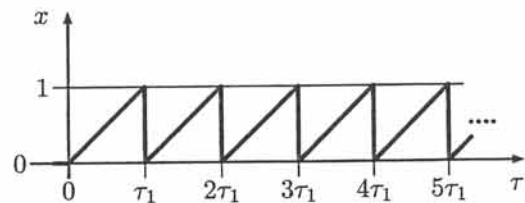


Abb.A7.9b

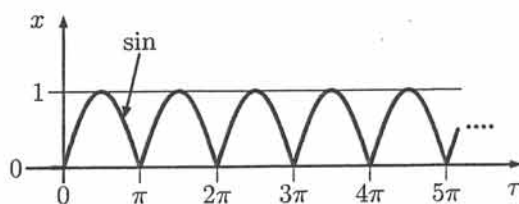


Abb.A7.9c

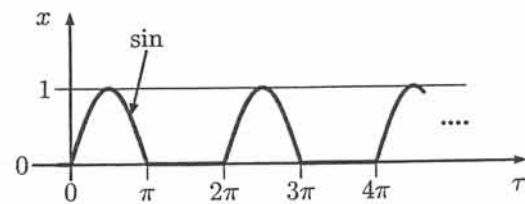


Abb.A7.9d

A7.10 Anfangs- und Endwertsatz: Bestimmen Sie für die zu den Laplace-Transformierten

(i) $X(s) = 7 / (s^3 + 2s^2 + 9s + 7)$,

(ii) $X(s) = 2 / (s^3 + 7s^2 - 15s)$

gehörenden Funktionen $x(\tau)$ die Grenzwerte $x(0+)$ und $x(\infty)$.

A8.1 Differentialgleichungen: Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme mit Hilfe der Laplace-Transformation.

(i) $y' + 7y = 2u$, $u(\tau) = \varepsilon(\tau)$, $y(0^-) = 0$;

(ii) $y' + 3y = u' + 2u$, $u(\tau) = 25 \cos(4\tau)\varepsilon(\tau)$, $y(0^-) = -5$;

(iii) $y'' + 7y' + 12y = 2u' + 2u$, $u(\tau) = \varepsilon(\tau)$, $y(0^-) = 2$, $y'(0^-) = -3$.

A8.2 Integralgleichung: Eine Funktion $x(\tau)$ soll für $\tau \geq 0$ der Integralgleichung vom Faltungstypus

$$x(\tau) = \tau + 2 \int_0^\tau \cos(\tau - \tau') x(\tau') d\tau'$$

genügen. Berechnen Sie $x(\tau)$.

A8.3 Differentialgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten: Bestimmen Sie zur Differentialgleichung

$$\tau x'' + 2x' + \tau x = 0$$

eine Lösungsfunktion $x(\tau)$ für $\tau > 0$, deren Werte für $\tau \rightarrow \infty$ verschwinden.

A8.4 Differential-Differenzengleichung: Die Sprungantwort eines linearen, zeitinvarianten Systems werde durch die Gleichung

$$y'(\tau) + y(\tau - 1) = \varepsilon(\tau) \quad \text{mit} \quad y(\tau) = 0 \quad \text{für} \quad \tau < 0$$

beschrieben. Bestimmen Sie $y(\tau)$.

A8.5 Eingang mit Verzögerung: Ein lineares, zeitinvariantes System wird durch die Gleichung

$$y'(\tau) + 2y(\tau) = u'(\tau) - 3u(\tau - 1)$$

beschrieben. Berechnen und zeichnen Sie seine Sprungantwort.

A8.6 Identifikation: Ein lineares, zeitinvariantes System liefert zum Eingang

$$u(\tau) = (e^{-\tau} + e^{-3\tau}) \varepsilon(\tau)$$

die Nullzustandsantwort

$$y_{0z}(\tau) = (2e^{-\tau} - 2e^{-4\tau}) \varepsilon(\tau).$$

Leiten Sie daraus die System-Differentialgleichung ab.

A8.7 Stoßantworten: Berechnen und skizzieren Sie die Stoßantworten von Systemen mit den Übertragungsfunktionen

$$(i) \quad G(s) = \frac{3s+1}{s^2+3s+2}, \quad (iii) \quad G(s) = \frac{2}{s^2+0,4s+4,04},$$

$$(ii) \quad G(s) = \frac{s+2}{s+1}, \quad (iv) \quad G(s) = \frac{1}{s^2-0,2s+4,01}.$$

A8.8 Sprungantworten: Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantworten von Systemen mit den Übertragungsfunktionen

$$(i) \quad G(s) = 1/(s^2 + 4s + 4),$$

$$(ii) \quad G(s) = (s + 1)/(s^2 + 4s + 4),$$

$$(iii) \quad G(s) = (s - 1)/(s^2 + 4s + 4)$$

A8.9 Übergangsverhalten: Die Schaltung in Abb.A8.9a wird als Übertragungsglied mit u_E als Eingangsgröße und u_A als Ausgangsgröße verwendet. Führen Sie passende Variablenbezüge ein und bestimmen Sie

- (i) die Übertragungsfunktion,
- (ii) die Übergangsfunktion (Sprungantwort).

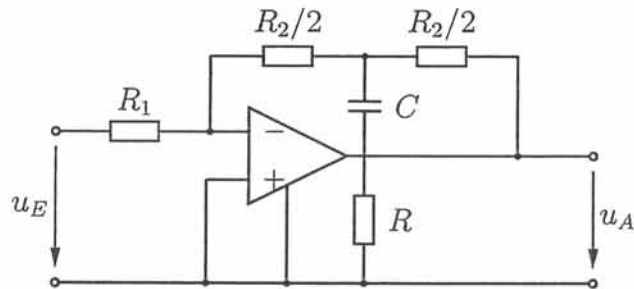


Abb.A8.9a

A8.10 Antwort auf kurzen Rechteckimpuls: Als LTI-System betrachtet, stellt in der Schaltung Abb.A8.10a die Spannung u_0 die Eingangsgröße und die Spannung u_1 die Ausgangsgröße dar. Die Eingangsgröße (Abb.A8.10b) sei ein relativ kurzer Rechteck-Impuls, der sich als Dirac-Stoß

$$u_0(t) = U_0 t_0 \delta(t)$$

darstellen lässt.

- (i) Eine elementare Analyse der Schaltung liefert mit den Bezugswerten

$$U_{EB} = U_{AB} = U_0 t_0 / T_B, \quad T_B = RC/2$$

die System-Differentialgleichung

$$y' + y = u' + u/2, \quad u(\tau) = \delta(\tau).$$

Bestimmen Sie deren Lösung als Nullzustandsantwort.

- (ii) Schreiben Sie diese Lösung als Funktion $u_1(t)$ in Originalvariablen und skizzieren Sie den Verlauf.

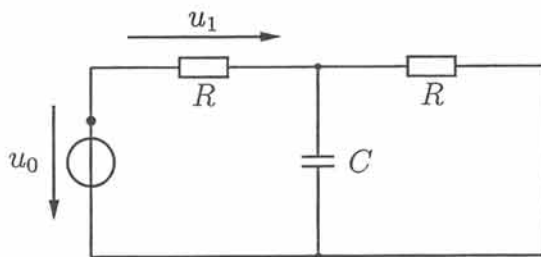


Abb.A8.10a

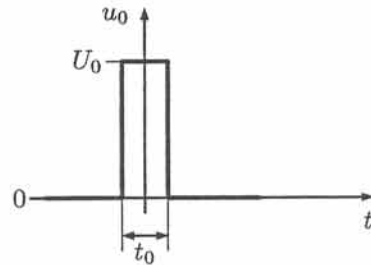


Abb.A8.10b

A8.11 Kombination zweier Differenzierer: Gegeben ist das in Abb.A8.11 skizzierte System mit zwei invertierenden Differenzierern.

- (i) Stellen Sie die System-Differentialgleichung auf und untersuchen Sie die Stabilität des Systems.
 (ii) Berechnen Sie die Sprungantwort.

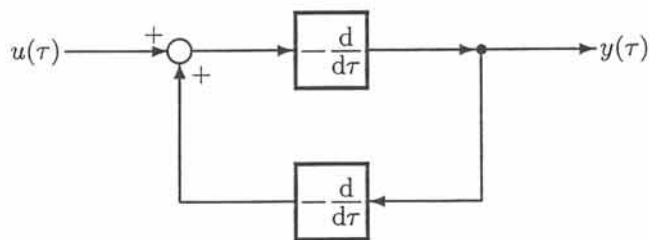


Abb.A8.11

A8.12 Kombination zweier Integratoren: Zwei annähernd ideale Integratoren werden wie in Abb.A8.12 a angegeben kombiniert. Berechnen und zeichnen Sie die Sprungantwort des Systems.

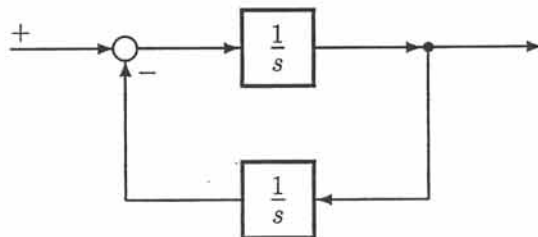


Abb.A8.12a

A8.13 Kombination von Systemen: Wie lautet die Übertragungsfunktion der in Abb.A8.13 angegebenen Kombination rückwirkungsfreier Teilsysteme?

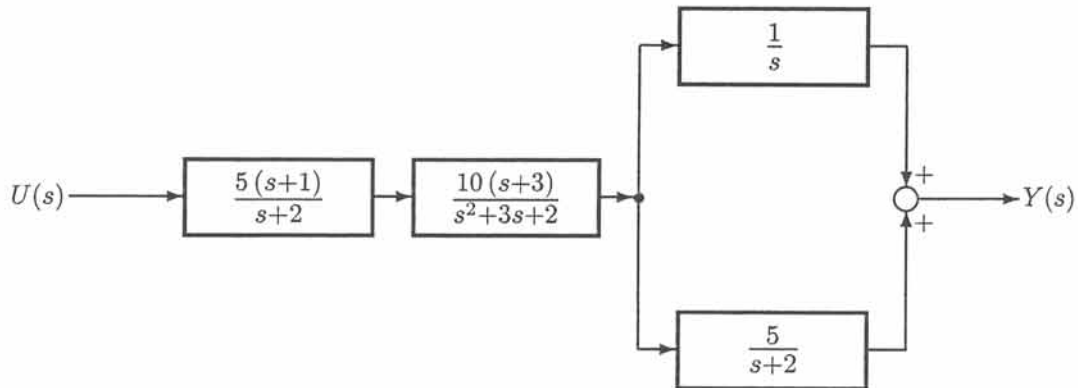


Abb.A8.13

A8.14 Systeme mit Rückführung: Ermitteln Sie die Pole und Nullstellen der beiden Systeme mit Rückführung aus Abb.A8.14a,b.

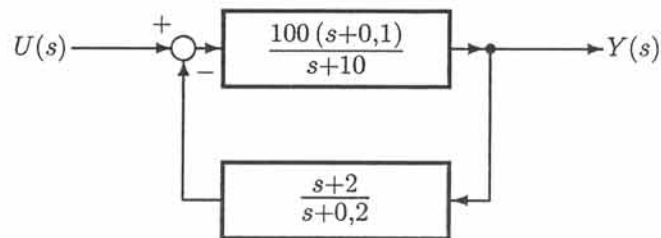


Abb.A8.14a

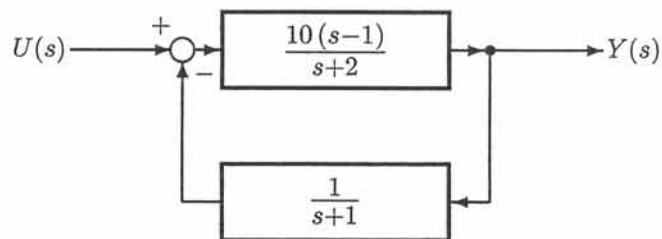


Abb.A8.14b

A8.15 System-Differentialgleichung aus Strukturdiagramm: Abb.A8.15 zeigt das Strukturbild eines linearen, zeitinvarianten Systems. Wie sieht die zugehörige System-Differentialgleichung aus?

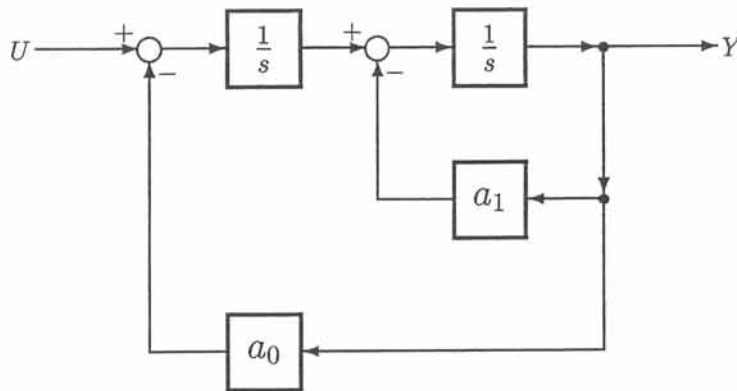


Abb.A8.15

A8.16 Stabilisierung: Berechnen und skizzieren Sie die Sprungantworten des Systems aus Abb.A8.16a

- (i) für S offen, d.h. ohne Rückführung,
- (ii) für S geschlossen, d.h. mit direkter Rückführung.

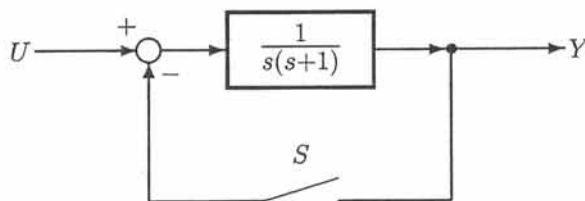


Abb.A8.16a

A8.17 Partialbruchzerlegung und Parallelschaltung: Ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)(s+c)}; \quad a \neq b \neq c, \text{ reell,}$$

soll durch eine Parallelkombination rückwirkungsfreier Systeme erster Ordnung realisiert werden. Geben Sie die Übertragungsfunktionen dieser Teilsysteme an.

A8.18 Integrator und Laufzeitglieder: Ein lineares, zeitinvariantes System besitzt die Sprungantwort aus Abb.A8.18a.

- (i) Bestimmen Sie die zugehörige Übertragungsfunktion.
- (ii) Stellen Sie das System durch die Kombination eines idealen Integrators mit mehreren Laufzeitgliedern dar.

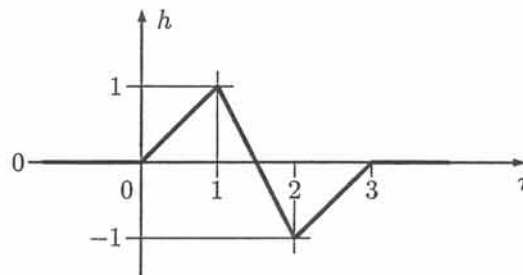


Abb.A8.18a

A8.19 Gleitende Mittelwertbildung: Die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-s})$$

charakterisiert ein LTI-System.

- (i) Skizzieren Sie die Frequenzgang-Ortskurve für $\nu \geq 0$.
- (ii) Stellen Sie das System als Kombination elementarer Übertragungsglieder wie Differenzierer, Integrierer, Verstärker und Laufzeitglieder dar.
- (iii) Wie lässt sich die Wirkung des Systems auf ein beliebiges Eingangssignal interpretieren?

A8.20 PID-Glied: Die Schaltung aus Abb.A8.20a wird als Standard-Übertragungsglied verwendet, wobei u_E die Eingangsgröße und u_A die Ausgangsgröße darstellt.

- (i) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems für allgemeine Bezugswerte $U_{AB} = U_{EB}$ und T_B .
- (ii) Durch die Parallelkombination welcher elementarer Übertragungsglieder (Differenzierer, Integrierer, Verstärker, Laufzeitglieder) ist das Glied darstellbar? Geben Sie das zugehörige Strukturbild und die Teilübertragungsfunktionen an.

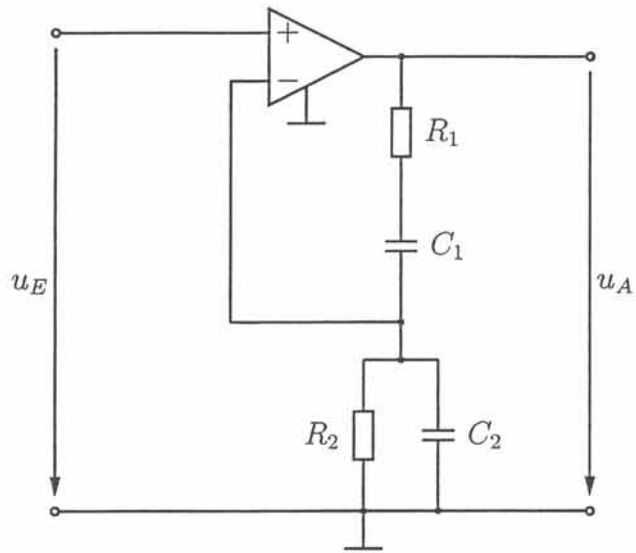


Abb.A8.20a

A9.1 Zustandsmodelle mit Phasen-Variablen: Bestimmen Sie die Zustandsmodelle mit Phasen-Variablen der SISO-Systeme mit den folgenden Übertragungsfunktionen.

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|
| (i) $G(s) = 3/(s+2)$ | (vi) $G(s) = (3s+9)/(s^2+3s+2)$ |
| (ii) $G(s) = 5/(s-2)$ | (vii) $G(s) = (3s^2+6s-4)/(s^2+3s+2)$ |
| (iii) $G(s) = (3s+8)/(s+2)$ | (viii) $G(s) = (5s+15)/(s^2+s)$ |
| (iv) $G(s) = (5s+10)/(s-2)$ | (ix) $G(s) = (5s^2+4s-10)/(s^2+s)$ |
| (v) $G(s) = 3/(s^2+3s+2)$ | |

A9.2 Anfangswerte der Zustandsvariablen: Für die in A9.1 bestimmten Zustandsmodelle sollen die Anfangswerte $\underline{x}(0)$ der Zustandsvariablen angegeben werden. Wählen Sie dazu aus

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = 4, \quad u(0) = -2, \quad u'(0) = 1.$$

A9.3 Physikalische Zustandsvariablen: In den Schaltungen Abb.A9.3a,b sind die Spannungen $u_E(t)$ als Eingangsgrößen und die Ströme $i_A(t)$ als Ausgangsgrößen aufzufassen. Führen Sie passende Bezüge ein und bestimmen Sie die Zustandsmodelle mit physikalischen Zustandsvariablen.

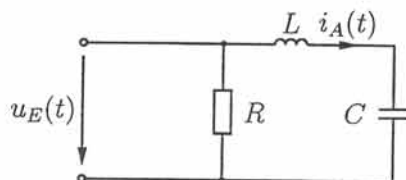


Abb.A9.3a

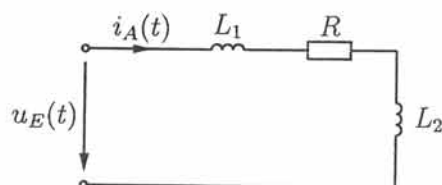


Abb.A9.3b

A9.4 Strukturdiagramm: Von zwei MIMO-Systemen sind die Übertragungsfunktionen in Matrixform bekannt,

$$(a) \quad G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+6s+5} & \frac{3}{s+5} \end{bmatrix} \quad (b) \quad G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s^2+6s+5} \\ \frac{3}{s+5} \end{bmatrix}$$

- Zeichnen Sie für jedes der zwei Systeme ein Strukturdiagramm zur Darstellung als Kombination von Teilsystemen mit jeweils nur einer Eingangs- und Ausgangsgröße.
- Geben Sie für jedes der Systeme ein vollständiges Zustandsmodell unter Verwendung von Phasen-Variablen an.

A9.5 System erster Ordnung: Ein SISO-System erster Ordnung ist durch sein Zustandsmodell

$$\begin{aligned}x'(\tau) &= -2x(\tau) + 3u(\tau), \\y(\tau) &= 5x(\tau) + 4u(\tau)\end{aligned}$$

gegeben.

- (i) Bestimmen Sie die vollständigen Lösungen $x(\tau)$ und $y(\tau)$ für einen rechtsseitigen Eingang $u(\tau)$ und einen allgemeinen Anfangswert $x(0)$.
- (ii) Überprüfen Sie, ob die berechnete Funktion $x(\tau)$ tatsächlich die Differentialgleichung des Zustandsmodells und die Anfangsbedingung erfüllt.
- (iii) Werten Sie die gefundenen Ausdrücke $x(\tau)$ und $y(\tau)$ speziell für den Heaviside-Sprung $u(\tau) = \varepsilon(\tau)$ am Eingang und $x(0) = 0$ aus.
- (iv) Geben Sie die Übertragungsfunktion des Systems an.

A9.6 Resolvente: Berechnen Sie für die folgenden Matrizen \underline{A} jeweils die Resolvente $(s\underline{E} - \underline{A})^{-1}$ und die Matrix-Exponentialfunktion $e^{\underline{A}\tau}$.

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad \underline{A} &= \begin{bmatrix} -1 + 2j & 0 \\ 0 & -1 - 2j \end{bmatrix} & \text{(ii)} \quad \underline{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ \text{(iii)} \quad \underline{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} & \text{(iv)} \quad \underline{A} &= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

A9.7 Übertragungsfunktion: Die folgenden SISO-Systeme sind durch ihre Zustandsmodelle gegeben.

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad \underline{x}' &= \begin{bmatrix} -1 + 2j & 0 \\ 0 & -1 - 2j \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [2 - 3j \quad 2 + 3j] \underline{x}; \\ \text{(ii)} \quad \underline{x}' &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [5 \quad -1] \underline{x}; \\ \text{(iii)} \quad \underline{x}' &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [16 \quad 4] \underline{x}; \\ \text{(iv)} \quad \underline{x}' &= \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 1] \underline{x};\end{aligned}$$

Die Systemmatrizen \underline{A} sind übrigens die in A9.6 untersuchten. Berechnen Sie für jedes dieser Systeme die Übertragungsfunktion $G(s)$.

A9.8 Matrix-Exponentialfunktion: Nehmen Sie speziell die Systemmatrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

aus A9.6(ii) und zeigen Sie dafür durch direktes Ausrechnen beider Seiten die Gültigkeit der für alle regulären Matrizen \underline{A} bestehenden Beziehung

$$\int_0^\tau e^{\underline{A}\tau'} d\tau' = \underline{A}^{-1} (e^{\underline{A}\tau} - \underline{E}) = (e^{\underline{A}\tau} - \underline{E}) \underline{A}^{-1}.$$

A9.9 Transitionsmatrix: Zur Systemmatrix \underline{A} gehört die Transitionsmatrix

$$\underline{\Phi}(\tau) = e^{\underline{A}\tau} \varepsilon(\tau).$$

Benutzen Sie die Matrix-Differentialgleichung für $e^{\underline{A}\tau}$, um für die Systemmatrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

ein System skalarer Differentialgleichungen für die vier Elemente von $\underline{\Phi}$ abzuleiten. Geben Sie auch die Anfangsbedingungen an.

A9.10 Lösungsdarstellung: Angenommen zum SISO-System aus A9.7(ii),

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \underline{x},$$

gehört der Eingang und die Anfangsbedingung

$$u(\tau) = 4 \sin(7\tau) \varepsilon(\tau + 3), \quad \underline{x}(-3) = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

Geben Sie die Lösungsdarstellungen für $\underline{x}(\tau)$ und $y(\tau)$ als Integrale an.

A9.11 Stoßantwort: Verwenden Sie die Darstellung

$$\underline{g}(\tau) = \underline{C} \underline{\Phi}(\tau) \underline{B} + \underline{D} \delta(\tau)$$

der $q \times p$ -Stoßantwort-Matrix zur Berechnung der Stoßantwort des SISO-Systems A9.7(ii),

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}.$$

Vergleichen Sie die Laplace-Transformierte der so berechneten Stoßantwort mit den Ergebnissen aus A9.7.

A9.12 Anfangszustände: Ein System mit einer Eingangsgröße ($p = 1$) und q Ausgangsgrößen besitze das Zustandsmodell

$$\begin{aligned} \underline{x}' &= \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u, \\ \underline{y} &= \underline{C} \underline{x} \end{aligned}$$

mit der $n \times n$ -Systemmatrix \underline{A} , der $n \times 1$ -Eingangsmatrix \underline{B} und der $q \times n$ -Ausgangsmatrix \underline{C} . Das System besitzt also keinen direkten Durchgriff ($\underline{D} = 0$).

Das System befinde sich anfänglich im Nullzustand, $\underline{x}(0^-) = \underline{0}$, und am Eingang liege der Dirac-Stoß, $u(\tau) = \delta(\tau)$. Berechnen Sie $\underline{x}(0^+)$, d.h. die rechtsseitigen Anfangszustände.

A9.13 Euklidische Vektorräume: Die Spaltenmatrizen

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= [1 \ 0 \ 2 \ 0]^T, & \underline{v}_2 &= [-2 \ -1 \ 1 \ 2]^T, \\ \underline{v}_3 &= [1 \ 1/2 \ -1/2 \ -1]^T, & \underline{v}_4 &= [-3 \ -2 \ 4 \ 4]^T \end{aligned}$$

seien Elemente des Vektorraums \mathbb{R}^4 , der mit der üblichen euklidischen Norm und dem damit verträglichen inneren Produkt ausgestattet ist.

- (i) Berechnen Sie die Normen der Elemente $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4$.
- (ii) Geben Sie die zu $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4$ gehörenden normierten Elemente $\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_4$ an.
- (iii) Bestimmen Sie die inneren Produkte von $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4$ mit dem Element

$$\underline{v} = [4 \ 1 \ -2 \ -1]^T.$$

- (iv) Verifizieren Sie

$$\underline{v}_1 \cdot \underline{v}_2 = 0, \quad \underline{v}_1 \cdot \underline{v}_3 = 0, \quad \underline{v}_3 = -\underline{v}_2/2, \quad \underline{v}_4 = \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2.$$

- (v) Welche Dimensionen besitzen folgende Unter-Vektorräume des \mathbb{R}^4 . Benutzen Sie die Beziehungen aus (iv).

- | | |
|--|---|
| (a) $\text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$, | (b) $\text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$, |
| (c) $\text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_4)$, | (d) $\text{span}(\underline{v}_2, \underline{v}_3)$, |
| (e) $\text{span}(\underline{v}_2, \underline{v}_4)$, | (f) $\text{span}(\underline{v}_3, \underline{v}_4)$, |
| (g) $\text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$, | (h) $\text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_4)$, |
| (i) $\text{span}(\underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4)$, | (j) $\text{span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4)$. |

- (vi) Welche Paare der Elemente $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4$ bilden eine Basis der linearen Hülle $\text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4)$?
- (vii) Welche Paare der Elemente $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4$ bilden eine orthogonale Basis von $\text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4)$?

A9.14 Koordinatentransformation: Die Paare $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ und $(\underline{v}_3, \underline{v}_4)$ von Elementen des \mathbb{R}^4 aus A9.13 bilden jeweils eine Basis \mathcal{A} bzw. \mathcal{B} der linearen Hülle $\text{span}(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_4)$, eines Unter-Vektorraums von \mathbb{R}^4 .

- (i) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix \underline{P} , deren Spalten von den Koordinaten der Basisvektoren $(\underline{v}_3, \underline{v}_4)$ in der Basis $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ gebildet werden.

$$(ii) \quad \underline{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 1 \quad 0] \underline{x};$$

$$(iii) \quad \underline{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0 \quad 0] \underline{x};$$

$$(iv) \quad \underline{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}.$$

Stellen Sie für jeden Fall fest, ob das System vollständig steuerbar ist. Geben Sie jeweils den ansteuerbaren und den nicht ansteuerbaren Unterraum an.

A9.25 Beobachtbarkeit: Stellen Sie für jedes der in A9.24 angegebenen Zustandsmodelle fest, ob sie vollständig beobachtbare Systeme repräsentieren. Geben Sie jeweils die Unterräume der beobachtbaren und der nicht beobachtbaren Zustände an.

- A1.1:** Kombination von Zeitdehnung, Zeitspiegelung und Zeitverschiebung.
- A1.2:** Beachten Sie die grundlegende Normierung des Dirac-Stoßes.
- A1.3:** An Knickstellen springen die Werte der Ableitung, an Sprungstellen entstehen gewichtete Dirac-Stöße.
- A1.4:** Abtasteigenschaft des Dirac-Stoßes, passende Variablensubstitution. Unterscheiden Sie in (iv) die Fälle der beiden möglichen Vorzeichen von δ .
- A1.5:** Bestimmen Sie zuerst y_{0E} ($u = 0$) und y_{0A} ($\alpha = 0$). Prüfen Sie dann die drei grundlegenden Eigenschaften.
- A1.6:** Nutzen Sie die Linearität der Nullzustandsantwort bezüglich des Eingangssignals.
- A1.7:** Zeitinvarianz bedeutet: Bilden $u(\tau)$ und $y(\tau)$ ein zusammengehörendes Paar, so müssen auch $u(\tau - \lambda)$ und $y(\tau - \lambda)$ für beliebige, feste λ ein zusammengehörendes Paar ergeben, vorausgesetzt, der Anfangszustand wird mit verschoben. Demnach muss sich die selbe Differentialgleichung in $\bar{\tau} = \tau - \lambda$ ergeben, wenn $u(\tau)$ durch $u(\tau - \lambda)$ und $y(\tau)$ durch $y(\tau - \lambda)$ ersetzt wird.
- A1.8:** Faltungsintegral auswerten! Das System startet im Nullzustand.
- A1.9:** Gehen Sie von der Definition der Stoßantwort aus.
- A1.10:** Schicken Sie einen Dirac-Stoß in das erste System und dessen Antwort in das durch seine Faltungsdarstellung repräsentierte zweite System.
- A1.11:** Wie hängen die Funktionen $g(\tau)$ und $h(\tau)$ zufolge der Linearität notwendig zusammen? (Die Zeitableitung ist eine lineare Operation). Beachten Sie die Stetigkeit von $h(\tau)$ bei $\tau = 0$.
- A1.12:** Die Sprungantwort ist eine spezielle Nullzustandsantwort. Berechnen Sie diese mit dem Faltungsintegral.
- A1.13:** Wegen der LTI-Eigenschaft antwortet das System auf die Ableitung des Eingangssignals mit der Ableitung des Ausgangssignals. Bestimmen Sie damit die Sprungantwort und daraus die Stoßantwort.
- A1.14:** Partielle Integration!
- A1.15:** Nutzen Sie möglichst direkt die Linearität und die Zeitinvarianz.
- A1.16:** Ermitteln Sie durch eine elementare Analyse den Verlauf der Leerlauf-Ausgangsspannung nach dem Anlegen einer Gleichspannung.

A1.17: Die Prüfung der Linearität des Systems reduziert sich hier auf die Prüfung der Nullzustandslinearität.

A1.18: Bestimmen Sie die Stoßantwort und werten Sie damit das Faltungsintegral aus.

A1.19: Skizzieren Sie die Eingangssignale und führen Sie Integrationen bzw. Differentiationen stückweise aus, oder stellen Sie $\text{rect}(\tau)$ und $\text{tri}(\tau)$ durch den Heaviside-Sprung dar.

A1.20: Prüfen Sie, ob die Stoßantworten absolut integrierbar sind.

A2.1: Die Kirchhoff-Regeln zusammen mit den Elementgleichungen liefern nach Elimination von u_C oder i zunächst eine Differentialgleichung für i bzw. u_C in Originalvariablen. Allgemeine Bezugsgrößen und damit bezogene Variablen führen dann auf die gesuchten Standardformen.

A2.2: Durch welche Eigenschaften ist ein idealer Operationsverstärker gekennzeichnet? Verwenden Sie diese zusammen mit den Kirchhoff-Regeln und den Elementgleichungen. Die entstehende Differentialgleichung ist homogen.

A2.3: Eigenschaften des idealen Operationsverstärkers, Kirchhoff-Regeln und Elementgleichungen! Eliminieren Sie dann alle abhängigen Variablen bis auf u_A . Es entsteht eine homogene Differentialgleichung

A2.4: Analysieren Sie die Schaltung mit offenem Schalter S. Die Anfangsbedingungen sind durch die Kondensatorspannung und den Spulenstrom vor dem Öffnen bestimmt.

A2.5: Kirchhoff-Regeln und Elementgleichungen! Eliminieren Sie alle abhängigen Variablen bis auf u_2 und die Eingangsfunktion u_0 .

A2.6: Am einfachsten ist eine Wechselstromanalyse mit anschließendem Übergang in den Zeitbereich.

A2.7: Wechselstromanalyse (Spannungsteiler), $j\omega \rightarrow \omega_B s$.

A2.8: Übertragungsfunktion $G(s) = Q(s)/P(s)$. Die Koeffizienten der Polynome $P(s)$ und $Q(s)$ entsprechen den Koeffizienten der linken bzw. rechten Seite der Differentialgleichung.

A2.9: Bestimmen Sie die Systempole, d.h. die Wurzeln des charakteristischen Polynoms. Unter Beachtung der Regel für mehrfache Pole lässt sich damit die homogene Lösung sofort angeben.

A2.10: Pole in der rechten Halbebene bedeuten Instabilität. Pole auf der imaginären Achse besonders beachten!

A2.11: Wegen der Linearität können Sie die partikuläre Lösung wie die Eingangsfunktion aus einzelnen Summanden zusammensetzen. Diese sind aus der reellen Exponentialfunktion ableitbar.

A2.12: Wie sieht die Partikulärlösung für ein System mit der Übertragungsfunktion $G(s)$ bei $u(\tau) = \exp(j\nu\tau)$ aus? Verwenden Sie davon den Realteil.

A2.13: Es ist die Erhaltung von Linearkombinationen mit reellen Koeffizienten nachzuweisen.

A2.14: Unterscheiden Sie $\tau < 0$ und $\tau > 0$. Wie gehen Sie vor, wenn ein Pol der Übertragungsfunktion im Exponenten der Erregungsfunktion erscheint?

A2.15: Wie sieht die lineare Operation aus, die $u(\tau)$ aus $e^{s\tau}$ erzeugt? Wenden Sie diese auf $G(s)e^{s\tau}$ an.

A2.16: Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und Partikulärlösung übertragen; an die Anfangsbedingungen anpassen!

A2.17: Bestimmen Sie jeweils die homogene Lösung und eine partikuläre Lösung zu $u(\tau) = \varepsilon(\tau)$. Die Randwerte bei $0-$ (gleich Null für eine Nullzustandsantwort) sind mit Hilfe der Sprungbedingungen nach $0+$ zu übertragen.

A2.18: Wie hängen Sprungantwort und Stoßantwort zusammen? Anfangssprünge der Sprungantwort beachten!

A2.19: Bestimmen Sie zuerst mit elementaren Methoden die Sprungantwort des R-C-Glieds. Nutzen Sie dann die Linearität und die Zeitinvarianz des Systems.

A2.20: Die Differentialgleichung ergibt sich aus den Kirchhoff-Regeln und den Elementgleichungen. Bei der Darstellung des Rechteckimpulses mit Hilfe des Dirac-Stoßes beachten Sie dessen grundlegende Normierungseigenschaft.

A2.21: Kirchhoff-Regeln und Elementgleichungen! Wie viele Anfangsbedingungen gehören zur resultierenden Differentialgleichung?

A2.22: Die Differentialgleichung für u_A ergibt sich aus den Kirchhoff-Regeln und den Elementgleichungen nach Elimination der anderen abhängigen Variablen. Vergleichen Sie diese Differentialgleichung dann mit der Normalform für gedämpfte Schwingungen.

A2.23: Berechnen Sie zuerst $G = U_A/U_E$ mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung als Funktion der bezogenen Kreisfrequenz $\nu = \omega RC$, ersetzen Sie dann $j\nu \mapsto s$. Untersuchen Sie schließlich das charakteristische Polynom.

A2.24: Die beiden Maschengleichungen führen nach Elimination des Primärstroms auf eine Differentialgleichung erster Ordnung.

A2.25: Lösen Sie die Differentialgleichungen allgemein für die beiden Schalterstellungen. Berücksichtigen dann die Stetigkeitsbedingungen für i zu den Schaltzeitpunkten und die Periodizitätsbedingung für den eingeschwungenen Zustand, insbesondere $i(T) = i(0)$.

A2.26: Stellen Sie die Differentialgleichung für $i(t)$ mit Hilfe der Maschenregel auf. Führen Sie dann bezogene Variablen ein gemäß $\tau = \omega t$, $y = \frac{i}{I_0\sqrt{2}}$; $I_0 =$

$$\frac{U_0}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} = \frac{U_0}{\omega L} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad a = \frac{R}{\omega L}$$

A2.27: Berechnen Sie zuerst für geschlossenen Schalter ohne Berücksichtigung von R und C den Magnetisierungsstrom. Stellen Sie dann für den offenen Schalter ohne Berücksichtigung von R die Differentialgleichung für u auf (einfachste

Schwingungsgleichung) und passen Sie deren allgemeine Lösung an die Anfangsbedingungen an.

A2.28: Bei geschlossenem Schalter wird der Strom lediglich durch die Induktivität begrenzt. Die Differentialgleichung für die Spannung am geöffneten Schalter folgt aus den Kirchhoff-Regeln und den Elementgleichungen.

A2.29: Benutzen Sie die Eigenschaften idealer Operationsverstärker. Die entstehende Differentialgleichung lässt sich unmittelbar integrieren.

A2.30: Rollen Sie die Schaltung unter Einführung der Kondensatorspannungen systematisch von rechts nach links auf. Das charakteristische Polynom hat mehrfache Wurzeln.

A3.1: Nutzen Sie die in der Transformationstabelle angegebenen Korrespondenzen zusammen mit der Linearitätseigenschaft.

A3.2: Bringen Sie die Spektralfunktion auf eine Form, mit der Sie direkt oder über Linearkombinationen in die Tabelle eintreten können. Bei Signalen oder Spektralfunktionen in Originalvariablen ist es meist günstig, zuerst auf bezogene Variablen überzugehen.

A3.3: Von den grundlegenden Eigenschaften benötigen Sie die Zeitdehnung und die Zeitverschiebung.

A3.4: Wie ist das Faltungsprodukt allgemein definiert?

A3.5: Werten Sie für (i) das Faltungsintegral stückweise aus. Für (ii) benutzen Sie am Besten eine Fourier-Tabelle, die Eigenschaften der Fourier-Transformation bezüglich der Faltung und die angegebene Korrespondenz.

A3.6: Fourier-Tabelle, Zeitverschiebung!

A3.7: Linearität, Zeitverschiebung!

A3.8: Das Spektrum des ungeraden Teils ist der ungerade Teil des Spektrums.

A3.9: Das Signal ist gerade. Einer Integraltafel entnehmen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-a^2 x^2) \cos(bx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right), \quad a > 0.$$

A3.10: Drücken Sie die Signum-Funktion durch den Heaviside-Sprung aus.

A3.11: Den Teil (i) der Aufgabe lösen Sie am Besten an Hand einer Skizze, in der Sie zu einem rechtsseitigen Signal $x(\tau)$ die beiden Signale $x_g(\tau)$ und $x_u(\tau)$ zeichnen. Wenn Sie dann für (ii) die angegebene Beziehung Fourier-transformieren (Faltung im Frequenzbereich), den Realteil und den Imaginärteil des Spektrums mit dessen geradem bzw. ungeradem Anteil in Verbindung bringen, sind Sie fast fertig.

A3.12: Fourier-Transformation des Dirac-Stoßes, Zeitverschiebung! Die entstehende endliche Reihe lässt sich zu einem geschlossenen Ausdruck summieren.

A3.13: Die Bildung des „Kurzzeitspektrums“ entspricht einer Zeitbegrenzung des Signals mit dem Fenster $\text{rect}(\tau/\tau_0)$. Faltung im Frequenzbereich!

A3.14: Verwenden Sie direkt das Paar der Fourier-Transformationsgleichungen.

A3.15: Benutzen Sie direkt die Definitionsgleichung für die Spektralfunktion.

A3.16: Wie ist die Korrelationsfunktion im Allgemeinen und die Autokorrelation reeller Funktionen im Besonderen erklärt?

A3.17: Gehen Sie von den definierenden Integralen für die Kreuzkorrelationsfunktionen und für die Autokorrelationsfunktion aus.

A3.18: Wie sind die Auto- und die Kreuzkorrelationsfunktionen definiert? Identifizieren Sie die linke Seite der Ungleichung über $f(x) \mapsto x_1(\tau')$ und $g(x) \mapsto x_2(\tau + \tau')$ mit $r_{12}^E(\tau)^2$.

A3.19: Beachten Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\nu\tau} d\nu = 2\pi\delta(\tau), \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j\nu\tau} d\tau = 2\pi\delta(\nu).$$

A3.20: Verwenden Sie die Integral-Definitionen der genannten Funktionen und führen Sie passende Substitutionen für die Integrationsvariablen durch.

A4.1: Die stationären Ausgänge lassen sich – falls sie existieren – als partikuläre Lösungen zu den gegebenen Sinusschwingungen bestimmen.

A4.2: Die angegebene Form der partikulären Lösung stellt für Standard-Sinuseingänge dann den eingeschwingenen Zustand dar, wenn transiente Vorgänge („homogene“ Lösungskomponenten) abklingen, wenn das System also stabil ist. Wie beurteilen Sie die Stabilität nach der Lage der Pole und Nullstellen?

A4.3: Schreiben Sie zuerst die Sprungantwort in bezogenen Variablen. Wie sieht die zugehörige System-Differentialgleichung und die Übertragungsfunktion aus?

A4.4: Komplexe Wechselstromanalyse!

A4.5: Allen angegebenen Systemen entspricht der gleiche Betragsteil des Bode-Diagramms. Warum? Bestimmen Sie die Knickfrequenzen und bauen Sie dann das Diagramm von links nach rechts auf.

A4.6: Gehen Sie von den Übertragungsfunktionen $G(s)$ aus, bestimmen Sie die Knickfrequenzen und die Grenzwerte $\arg G(j\nu)_{\nu \rightarrow 0}$. Bauen Sie dann die Treppennäherung von links nach rechts auf.

A4.7: Was bedeutet „Minimalwinkelsystem“ in Bezug auf die Lage der Pole und Nullstellen? Bestimmen Sie die Knickfrequenzen und die Steigungen und daraus die Pole und Nullstellen.

A4.8: Das Ausgangssignal entsteht durch Differentiation der Summe zweier Signale. Dies liefert die Differentialgleichung.

A4.9: Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung (Spannungsteilerregel).

A4.10: Ermitteln Sie zuerst die Übertragungsfunktion, z.B. mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung.

A4.11: Komplexe Wechselstromrechnung!

A4.12: Berechnen Sie zuerst das Spektrum des Eingangssignals. Wenn Sie dieses und den Frequenzgang des Systems kennen, wie finden Sie dann das Spektrum des Ausgangssignals?

A4.13: Wie sieht der Frequenzgang $G(j\nu)$ eines idealen Tiefpasses aus? Welchen Zusammenhang besteht zwischen $G(j\nu)$ und der Stoßantwort $g(\tau)$?

A4.14: Transformieren Sie die Gleichungen in den Spektralbereich. Wie wirken sich dabei Zeitableitungen und Zeitverschiebungen aus?

A4.15: Schreiben Sie die Stoßantwort hin. Was liefert deren Fourier-Transformation?

A4.16: Bestimmen Sie den komplexen Frequenzgang des Differenzierers und dann das Leistungsspektrum des Ausgangs.

A4.17: Berechnen Sie – unter Berufung auf die Ergodizität – die gesuchte Kreuzkorrelationsfunktion aus irgend zwei Realisierungen durch determinierte Signale. Stellen Sie diese als Faltungsintegrale dar.

A4.18: Berechnen Sie zuerst das Leistungsspektrum des Eingangssignals und dann die gesuchte Signalleistung durch Integration des Leistungsspektrums des Ausgangssignals.

A4.19: Mit dem gegebenen Frequenzgang und dem konstanten Leistungsspektrum des weißen Rauschens lässt sich das Leistungsspektrum am Ausgang des idealen Bandpasses sofort angeben. Die zugehörige AKF folgt daraus durch Fourier-Rücktransformation.

A4.20: Bestimmen Sie zuerst den komplexen Frequenzgang des Systems. Zusammen mit dem konstanten Leistungsspektrum des weißen Rauschens ist dann das Leistungsspektrum des Ausgangs – die Fourier-Transformierte der Ausgangs-AKF – bekannt.

A5.1: Manchmal lässt sich die Fourier-Reihe ohne viel zu rechnen sofort anschreiben. Im Allgemeinen sind die Fourier-Koeffizienten mit Hilfe der Analysegleichung entweder in Originalvariablen oder – meist etwas übersichtlicher – für 2π -periodische oder für 1-periodische Funktionen zu berechnen.

A5.2: Sie können die "Sinus-Symmetrie" des entstehenden Signals vorteilhaft nutzen.

A5.3: Welche Terme der komplexen Fourier-Reihe bilden zusammen die Grundschwingung?

A5.4: Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten unter Nutzung der Symmetrie.

A5.5: Berechnen Sie zuerst die Fourier-Koeffizienten c_k der komplexen Fourier-Reihe und fassen Sie dann jeweils Terme mit c_k und c_{-k} zusammen.

A5.6: Berechnen Sie die Koeffizienten C_k der komplexen Fourier-Reihe. Vorsicht bei $k = \pm 2N$.

A5.7: Berechnen Sie zuerst das Spektrum der periodischen Funktion. Wie überträgt sich die Produktbildung im Zeitbereich in den Frequenzbereich?

A5.8: Führen Sie eine bezogene Zeitvariable so ein, dass die Eingangsfunktion 2π -periodisch ist. Wie hängen die Fourier Koeffizienten der Ausgangsfunktion mit denen der Eingangsfunktion zusammen?

A5.9: Bestimmen Sie aus der Sprungantwort die Stoßantwort und daraus den Frequenzgang.

A5.10: Schreiben Sie die Fourier-Reihe zuerst als reelle Kosinus-Reihe an und wählen Sie dann spezielle Werte von τ .

A6.1: Die Spule ist für konstante Werte der Induktivität und des Widerstands ein LTI-System. Sie können deshalb die Harmonischen getrennt betrachten und überlagern.

A6.2: Wie ist der Oberschwingungsgehalt definiert?

A6.3: Skizzieren Sie den Stromverlauf.

A6.4: Wie finden Sie die Wirkleistung und die Scheinleistung, wenn Sie die Harmonischen von Strom und Spannung kennen? Wie ist der Leistungsfaktor definiert?

A6.5: Skizzieren Sie die Verläufe von Strom und Spannung.

A6.6: Legen Sie die angegebene Sinusspannung bei $t = 0$ an die zunächst stromlose Schaltung und berechnen Sie $i(t)$ mit $i(0) = 0$.

A6.7: Lösen Sie die Differentialgleichung allgemein für die beiden Schalterstellungen. Berücksichtigen Sie die Stetigkeitsbedingungen für den Strom, insbesondere die Periodizitätsbedingung $i(0) = i(T)$.

A6.8: Erreicht u den Wert u_S von unten, so springt y von $-y_S$ nach $+y_S$.

A6.9: Formen Sie die Potenzen der Winkelfunktionen mit der Euler-Beziehung $e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j\sin(\alpha)$ um.

A6.10: Drücken Sie i durch die beiden Diodenströme und diese über die Diodegleichung und die Maschenregel durch die beiden Spannungen u_1 und u_2 aus. Produkte von Winkelfunktionen können Sie mit der Euler-Beziehung auf Summen von Winkelfunktionen bringen.

A7.1: Nutzen Sie die in der Transformationstabelle angegebenen Korrespondenzen zusammen mit der Linearitätseigenschaft. In einfachen Fällen führt die direkte Berechnung des Laplace-Integrals oft rascher zum Ziel als das Nachschlagen.

A7.2: Bringen Sie die Laplace-Transformierten auf eine Form, mit der Sie direkt oder über Linearkombinationen in die Tabelle eintreten können. Partialbruchzerlegungen erweisen sich dabei oft als hilfreich.

A7.3: Vollständige Partialbruchzerlegungen sind meistens recht umständlich, oft aber gar nicht notwendig.

A7.4: Skizzen sind oft hilfreich.

A7.5: Sie können entweder direkt das Laplace-Integral ausrechnen, oder das Signal aus Rampen aufbauen.

A7.6: Sie können das gegebene Signal z.B. in eine Summe rechtsseitiger Sinusschwingungen umformen und dann Tabellen benutzen.

A7.7: Nutzen Sie die Linearitätseigenschaft zur gliedweisen Ausführung der Laplace-Transformation.

A7.8: Wie wirkt sich eine Faltung im Zeitbereich im Laplace-Unterbereich aus?

A7.9: Definieren Sie ein auf die Periodendauer eingeschränktes Signal $x_1(\tau)$ und stellen Sie x als Reihe von zeitverschobenen x_1 dar. Führen Sie dann die Laplace-Transformation mit dem Zeitverschiebungssatz durch. Es entsteht eine geometrische Reihe, die sich leicht summieren lässt.

A7.10: Es sind die Funktionen $sX(s)$ für $s \rightarrow 0$ bzw. $s \rightarrow \infty$ zu untersuchen. Achten Sie auf die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Grenzwertsätze.

A8.1: Wenn Sie die Differentialgleichung Laplace-transformieren, können Sie die linksseitigen Anfangsbedingungen direkt einbauen. Drücken Sie dann $Y(s)$ aus und kehren Sie in den Zeitbereich zurück.

A8.2: Setzen Sie $x(\tau) = 0$ für $\tau < 0$ und bestimmen Sie $x(\tau)$ für $\tau \geq 0$ aus $X(s) = \mathcal{L}[x(\tau)]$.

A8.3: Bildet $x(\tau) \leftrightarrow X(s)$ ein Laplace-Transformationspaar, so gilt $dX(s)/ds \leftrightarrow -\tau x(\tau)$.

A8.4: Sie können die Gleichung Laplace-transformieren und $Y(s)$ ausdrücken. Für die Rücktransformation erweist sich die Entwicklung (geometrische Reihe)

$$(1 + e^{-s}/s)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-s}/s)^n, \quad |e^{-s}/s| < 1$$

als hilfreich.

A8.5: Laplace-Transformation unter Verwendung des Zeitverschiebungssatzes.

A8.6: Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ aus den Laplace-Transformierten $U(s)$ und $Y_{0z}(s)$.

A8.7: Wie hängen die Übertragungsfunktion und die Stoßantwort eines Systems zusammen?

A8.8: Wie hängen Sprungantwort und Stoßantwort zusammen? Wie stellt sich dieser Zusammenhang im Laplace-Unterbereich dar?

A8.9: Die Übertragungsfunktion finden Sie am einfachsten durch eine Wechselstromanalyse mit anschließender Normierung ($U_{EB} = U_{AB}$, $T_B = RC$, $\nu = \omega RC$, $j\nu \mapsto s$).

A8.10: Sie können z.B. die Laplace-Transformation verwenden. Beachten Sie beim Übergang von bezogenen zu Originalvariablen die Eigenschaft $\delta(\tau) = |a|\delta(a\tau)$ des Dirac-Stoßes.

A8.11: Der Eingang des Vorwärtszweiges wird durch die Überlagerung des Eingangssignals mit dem Ausgang des Rückwärtszweigs gebildet.

A8.12: Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion der Kombination. Wie hängt sie mit der Laplace-Transformierten der Sprungantwort zusammen?

A8.13: Verwenden Sie die Kombinationsregeln für die Reihenschaltung und die Parallelschaltung rückwirkungsfreier Teilsysteme.

A8.14: Wie sieht die Kombinationsregel für diese häufig verwendete Struktur aus?

A8.15: Stellen Sie möglichst direkt die Beziehung zwischen den Laplace-Transformierten der Eingangsgröße und der Ausgangsgröße her. Daraus können Sie das charakteristische Polynom und das Nullstellenpolynom ablesen.

A8.16: Wie sehen die Übertragungsfunktionen für die beiden Fälle aus? Wenn Sie die Übertragungsfunktion kennen, wie finden Sie dann die Sprungantwort?

A8.17: Bei einer Parallelkombination werden die Übertragungsfunktionen addiert. Führen Sie eine Partialbruchzerlegung durch, um die gegebene Übertragungsfunktion auf die gewünschte Form zu bringen.

A8.18: Ermitteln Sie aus der gegebenen Sprungantwort die Stoßantwort und daraus die Übertragungsfunktion.

A8.19: Wie hängen die Übertragungsfunktion eines Systems und dessen Frequenzgang zusammen?

A8.20: Die Übertragungsfunktion finden Sie am schnellsten über eine elementare Wechselstromanalyse der Schaltung.

A9.1: Ermitteln Sie die Koeffizienten des Differentialgleichungsmodells. Wie sind die Matrizen des Zustandsmodells bei Verwendung von Phasen-Variablen aufgebaut?

A9.2: Die Ausgangsgleichung und deren Ableitungen liefert zusammen mit der Systemgleichung nach Auswertung für den Anfangszeitpunkt ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der gesuchten Anfangswerte.

A9.3: Als physikalische Zustandsvariablen sind die Zustandsgrößen - meist vorteilhaft in bezogener Form - der voneinander unabhängigen Energiespeicher zu wählen.

A9.4: Sehen Sie sich die gegebenen Übertragungsmatrizen an! Was bestimmt die Anzahl der Zeilen und der Spalten? Was bedeuten die Matrix-Elemente? Für jedes der Teilsysteme können Sie dann vom SISO-Differentialgleichungsmodell ausgehen.

A9.5: Zur Bestimmung der vollständigen Lösung können Sie z.B. die Laplace-Transformation benutzen. Ist die Eingangsfunktion nicht explizit bekannt, erscheint sie in der Lösungsdarstellung in einem Faltungsintegral.

A9.6: Wie hängen die Matrizen $e^{A\tau}$ und $(sE - A)^{-1}$ zusammen?

A9.7: Nach Laplace-Transformation des allgemeinen Zustandsmodells lässt sich unter Elimination der Zustandsvariablen der Ausdruck $\underline{G}(s) = \underline{C}(sE - A)^{-1}\underline{B} + \underline{D}$ für Matrix der Übertragungsfunktionen gewinnen. Werten Sie diesen aus.

A9.8: Sie können die in A9.6(ii) bereits berechnete Matrix-Exponentialfunktion verwenden und elementweise auswerten.

A9.9: Gehen Sie von der Differentiationsregel $de^{A\tau}/d\tau = Ae^{A\tau} = e^{A\tau}A$ für Matrix-Exponentialfunktionen aus.

A9.10: Die Transitionsmatrix $\underline{\Phi}(\tau)$ ist mit der Matrix-Exponentialfunktion aus A9.6(ii) bereits bekannt. Werten Sie damit die Lösungsdarstellung

$$\underline{x}(\tau) = \underline{\Phi}(\tau - \tau_0)\underline{x}(\tau_0^-) + \int_{\tau_0}^{\tau} \underline{\Phi}(\tau - \tau')\underline{B}\underline{u}(\tau')d\tau'$$

aus und benutzen Sie anschließend die Ausgangsgleichung.

A9.11: Auch hier können Sie für die Transitionsmatrix die in A9.6(ii) berechnete Matrix-Exponentialfunktion verwenden.

A9.12: Benutzen Sie die im Hinweis zu A9.10 angegebene allgemeine Lösungsdarstellung, um den Zustand von 0^- nach 0^+ zu übertragen.

A9.13: Benutzen Sie Definitionen der auftretenden Begriffe und Größen.

A9.14: Aus den in A9.13(iv) gegebenen Zusammenhängen können Sie direkt die Beziehung zwischen den beiden Basispaaren $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$ und $(\underline{v}_3, \underline{v}_4)$ ablesen.

A9.15: Wenn die neuen Zustandskoordinaten mit den alten gemäß $\underline{x} = P \tilde{\underline{x}}$ zusammenhängen, wie sind dann die beschreibenden Matrizen zu transformieren, damit sich ein äquivalentes Zustandsmodell ergibt?

A9.16: Wie sind die Eigenwerte einer quadratischen Matrix erklärt?

A9.17: Ist \underline{M} eine $m \times p$ -Matrix, so hat das lineare Gleichungssystem $\underline{M} \underline{x} = \underline{d}$ genau dann eine Lösung, wenn $\underline{d} \in \text{im}(\underline{M})$. Gibt es solch eine Lösung, so hat sie die Form $\underline{x} = \underline{x}_p + \underline{x}_h$ mit irgend einem speziellen Lösungsvektor \underline{x}_p und einem allgemeinen Element $\underline{x}_h \in \text{ker}(\underline{M})$. Sie ist genau dann eindeutig, wenn $\text{ker}(\underline{M}) = \{0\}$, d.h. wenn $\text{ran}(\underline{M}) = p$.

A9.18: Wie finden Sie die Eigenvektoren, wenn sie die Eigenwerte bereits kennen?

A9.19: Lösen Sie zuerst das jeweilige Eigenwertproblem. Bestimmen Sie dann die Modalmatrix aus den Eigenvektoren.

A9.20: Die Modalmatrix lässt sich nach Lösung des Eigenwertproblems für die Systemmatrix finden. Mit ihr sind auch die Eingangsmatrix und die Ausgangsmatrix passend zu transformieren.

A9.21: Die Systemmatrix besitzt einen Eigenwert mit der Vielfachheit 3. Berechnen Sie den zugehörigen Eigenvektor und die beiden verallgemeinerten Eigenvektoren. Sie bilden die Spalten der gesuchten Transformationsmatrix.

A9.22: Berechnen Sie die Eigenvektoren - sie sollten orthogonal sein - und normieren Sie diese. Sie bilden die Spalten der gesuchten Modalmatrix.

A9.23: Was besagt das Cayley-Hamilton-Theorem und was folgt daraus für die Darstellung von Matrix-Exponentialfunktionen?

A9.24: Stellen Sie die Steuerbarkeitsmatrix auf und untersuchen Sie die dadurch vermittelte Abbildung.

A9.25: Stellen Sie die Beobachtbarkeitsmatrix auf und untersuchen Sie die dadurch vermittelte Abbildung.

A1.1 Transformation der Zeitvariablen

(i) Ursprüngliches Signal: $x(\tau) = e^{-\tau}\varepsilon(\tau)$.

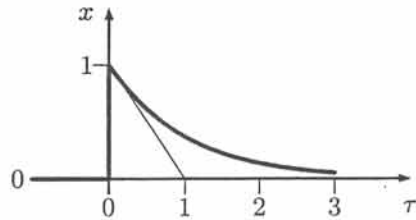


Abb.A1.1a

(ii) $a = 2, b = 0$: $x(\tau/2) = e^{-\tau/2}\varepsilon(\tau/2) = e^{-\tau/2}\varepsilon(\tau)$. Zeitdehnung.

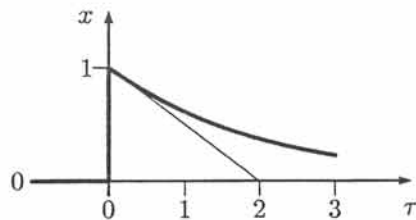


Abb.A1.1b

(iii) $a = -2, b = 0$: $x(-\tau/2) = e^{\tau/2}\varepsilon(-\tau/2) = e^{\tau/2}\varepsilon(-\tau)$. Zeitdehnung und Zeitspiegelung.

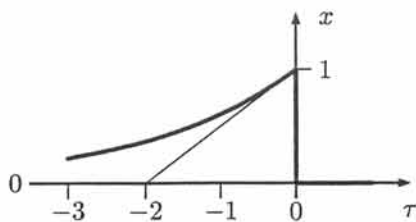


Abb.A1.1c

- (iv) $a = 2, b = 1$: $x(\tau/2 + 1) = e^{-(\tau/2+1)}\varepsilon(\tau/2 + 1) = e^{-(\tau/2+1)}\varepsilon(\tau + 2)$.
Zeitdehnung und Zeitverschiebung nach links.

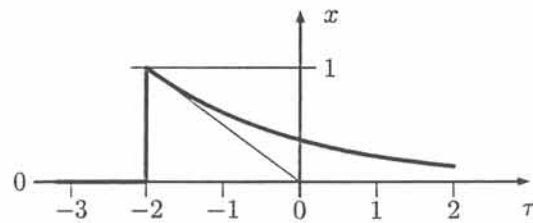


Abb.A1.1d

- (v) $a = -2, b = 1$: $x(-\tau/2 + 1) = e^{\tau/2-1}\varepsilon(-\tau/2 + 1) = e^{(\tau-2)/2}\varepsilon[-(\tau - 2)]$.
Zeitdehnung, Zeitspiegelung und Zeitverschiebung nach rechts.

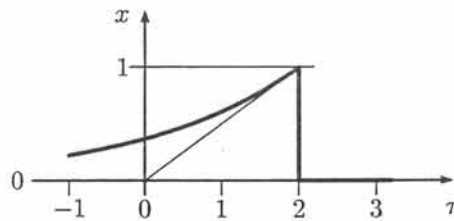


Abb.A1.1e

- (vi) $a = 2, b = -1$: $x(\tau/2 - 1) = e^{-\tau/2+1}\varepsilon(\tau/2 - 1) = e^{-(\tau-2)/2}\varepsilon(\tau - 2)$.
Zeitdehnung und Zeitverschiebung nach rechts.

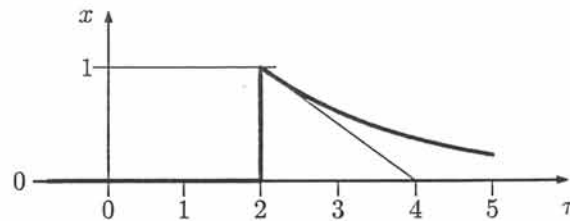


Abb.A1.1f

- (vii) $a = -2, b = -1$: $x(-\tau/2 - 1) = e^{\tau/2+1} \varepsilon(-\tau/2 - 1) = e^{(\tau+2)/2} \varepsilon[-(\tau+2)]$.
Zeitdehnung, Zeitspiegelung und Zeitverschiebung nach links.

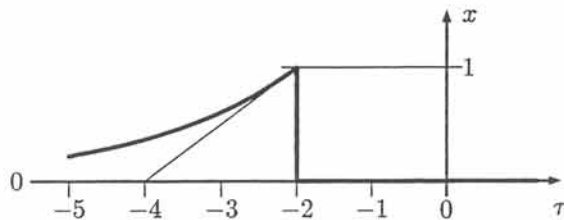


Abb.A1.1g

A1.2 Spannungsimpuls

Aus der grundlegenden Normierungseigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

des Dirac-Stoßes folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau = \frac{1}{a} \int_{-t_0}^{t_0} \frac{u(t)}{U_B} d\left(\frac{t}{T_B}\right) = \frac{1}{a U_B T_B} \int_{-t_0}^{t_0} u(t) dt = 1,$$

also der gesuchte Gewichtfaktor

$$a = \frac{1}{U_B T_B} \int_{-t_0}^{t_0} u(t) dt.$$

A1.3 Verallgemeinerte Ableitung

Die Darstellung der Dreieckfunktion

$$x(\tau) = (\tau + 1)\varepsilon(\tau + 1) - 2\tau\varepsilon(\tau) + (\tau - 1)\varepsilon(\tau - 1)$$

liefert die Ableitungen im Sinn der verallgemeinerten Funktionen

$$x'(\tau) = \varepsilon(\tau + 1) - 2\varepsilon(\tau) + \varepsilon(\tau - 1),$$

$$x''(\tau) = \delta(\tau + 1) - 2\delta(\tau) + \delta(\tau - 1).$$

A1.4 Integrale mit Dirac-Stößen

Die Berücksichtigung der Eigenschaften

$$f(\tau)\delta(\tau - \tau') = f(\tau')\delta(\tau - \tau'), \quad \delta(\tau - \tau') = \delta(\tau' - \tau),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau')\delta(\tau - \tau') d\tau' = f(\tau)$$

führt auf

$$(i) I_{(i)} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin [2(\tau - \tau')] \delta(3 - \tau') d\tau' = \sin [2(\tau - 3)],$$

$$(ii) I_{(ii)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau+2\tau'} \delta(\tau' + 3) d\tau' = e^{-2(\tau+3)}.$$

(iii) Mit der Substitution

$$\tau'' = a\tau + b\tau', \quad \tau' = \frac{\tau'' - a\tau}{b}, \quad d\tau' = \frac{1}{b} d\tau''$$

folgt

$$I_{(iii)} = \int_{-\infty}^{(a+b)\tau} \frac{1}{b} x \left(\frac{\tau'' - a\tau}{b} \right) \delta(\tau'') d\tau'' = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau < 0, \\ \frac{1}{b} x \left(-\frac{a}{b} \tau \right) & \text{für } \tau > 0, \end{cases}$$

also

$$I_{(iii)} = \frac{1}{b} x \left(-\frac{a}{b} \tau \right) \varepsilon(\tau).$$

(iv) Ähnlich gilt mit der Substitution $\tau' = b\tau + \tau_1$ und der Abtasteigenschaft

$$b > 0: I_{(iv)} = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(a \frac{\tau' - \tau_1}{b} + \tau_0 \right) \delta(\tau') \frac{1}{b} d\tau' = \frac{1}{b} x \left(\tau_0 - \frac{a}{b} \tau_1 \right),$$

$$b < 0: I_{(iv)} = \int_{+\infty}^{-\infty} [\dots] \frac{1}{b} d\tau' = - \int_{-\infty}^{+\infty} [\dots] \frac{1}{b} d\tau' = - \frac{1}{b} x \left(\tau_0 - \frac{a}{b} \tau_1 \right),$$

insgesamt also

$$I_{(iv)} = \frac{1}{|b|} x \left(\tau_0 - \frac{a}{b} \tau_1 \right).$$

A1.5 Prüfen der Linearität

1. Zerlegungseigenschaft

$$(i) y_{0E}(\tau) = \alpha\tau, \quad y_{0Z}(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\tau'} u(\tau') d\tau',$$

$$y_{0E}(\tau) + y_{0Z}(\tau) \neq y(\tau): \text{ nicht erfüllt}$$

$$(ii) y_{0E}(\tau) = \sin(\alpha\tau), \quad y_{0Z}(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \tau' u(\tau') d\tau',$$

$$y_{0E}(\tau) + y_{0Z}(\tau) = y(\tau): \text{ erfüllt}$$

$$(iii) y_{0E}(\tau) = \alpha\tau, \quad y_{0Z}(\tau) = \sin(\tau) \int_{\tau_0}^{\tau} u(\tau') d\tau',$$

$$y_{0E}(\tau) + y_{0Z}(\tau) = y(\tau): \text{ erfüllt}$$

2. Nulleingangslinearität

- (i) $y_{0E}(\tau) = \alpha\tau$: **erfüllt**
- (ii) $y_{0E}(\tau) = \sin(\alpha\tau)$: **nicht erfüllt**
- (iii) $y_{0E}(\tau) = \alpha\tau$: **erfüllt**

3. Nullzustandslinearität

- (i) $y_{0Z}(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} e^{\tau'} u(\tau') d\tau'$: **erfüllt**
- (ii) $y_{0Z}(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \tau' u(\tau') d\tau'$: **erfüllt**
- (iii) $y_{0Z}(\tau) = \sin(\tau) \int_{\tau_0}^{\tau} u(\tau') d\tau'$: **erfüllt**

Lediglich das System (iii) erfüllt alle drei Bedingungen und ist damit linear. ■

A1.6 Linearität bezüglich des Eingangs

Linearität des Systems bedeutet insbesondere Linearität der Nullzustandsantwort bezüglich der Eingangsfunktion, d.h.

$$\left. \begin{array}{l} u_1(\tau) \mapsto y_{0Z1}(\tau) \\ u_2(\tau) \mapsto y_{0Z2}(\tau) \end{array} \right\} \implies c_1 u_1(\tau) + c_2 u_2(\tau) \mapsto c_1 y_{0Z1}(\tau) + c_2 y_{0Z2}(\tau).$$

Hier ist speziell $c_1 = 2$ und $c_2 = 0,5$, also

$$y_{0Z}(\tau) = (6,2 + 1,5\tau + 3,8e^{-5\tau})\varepsilon(\tau). \quad \blacksquare$$

A1.7 Prüfen der Zeitinvarianz

Wir untersuchen die Forminvarianz der Differentialgleichungen gegenüber Zeitverschiebungen $\tau \mapsto \bar{\tau} = \tau - \lambda$ mit beliebigem $\lambda = \text{const}$, wobei

$$(\cdot)' = d(\cdot)/d\tau = d(\cdot)/d\bar{\tau}.$$

- (i) $y'(\tau - \lambda) + 5y(\tau - \lambda) = 7u(\tau - \lambda)$,
 $y'(\bar{\tau}) + 5y(\bar{\tau}) = 7u(\bar{\tau})$: **zeitinvariant**
- (ii) $y'(\tau - \lambda) + 5(\tau - 2)y(\tau - \lambda) = 7u(\tau - \lambda)$,
 $y'(\bar{\tau}) + 5(\bar{\tau} - 2 + \lambda)y(\bar{\tau}) = 7u(\bar{\tau})$: **nicht zeitinvariant**
- (iii) und (iv) sind offensichtlich **zeitinvariant**. ■

A1.8 Faltungsintegral

Das System startet im Nullzustand, d.h. $y_{0E}(\tau) = 0$, $y(\tau) = y_{0Z}(\tau)$.

(i) Sprungantwort

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - \tau') u(\tau') d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-(\tau - \tau')} \varepsilon(\tau - \tau') \varepsilon(\tau') d\tau' \\ &= \varepsilon(\tau) 2 \int_0^{\tau} e^{-(\tau - \tau')} d\tau' = \varepsilon(\tau) 2e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^{\tau'} d\tau', \\ y(\tau) &= 2(1 - e^{-\tau}) \varepsilon(\tau). \end{aligned}$$

Verlauf in Abb.A1.8a.

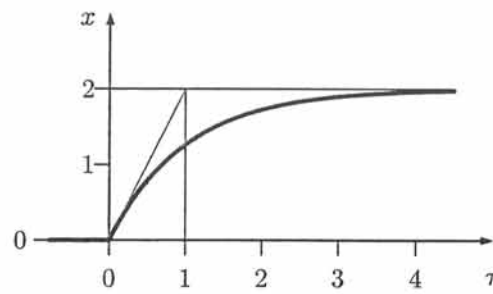


Abb.A1.8a

(ii) Rampenantwort

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-(\tau - \tau')} \varepsilon(\tau - \tau') \tau' \varepsilon(\tau') d\tau' = \varepsilon(\tau) 2e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^{\tau'} \tau' d\tau', \\ y(\tau) &= 2(\tau - 1 + e^{-\tau}) \varepsilon(\tau). \end{aligned}$$

Verlauf in Abb.A1.8b.

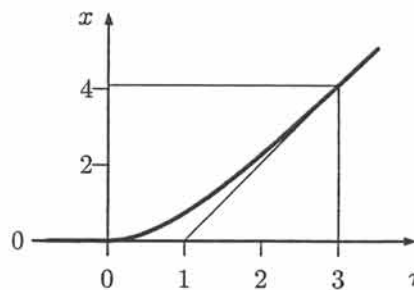


Abb.A1.8b

A1.9 Direkte Ableitung des Faltungsintegrals

Aus der Definition der Stoßantwort und aus der Zeitinvarianz erhalten wir zunächst

$$\mathcal{S}[\delta(\tau); \underline{0}] = g(\tau), \quad \mathcal{S}[\delta(\tau - \lambda); \underline{0}] = g(\tau - \lambda).$$

Die Linearität erlaubt dann die folgenden Schritte:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\delta(\tau - \lambda)u(\lambda); \underline{0}] &= g(\tau - \lambda)u(\lambda), \\ \mathcal{S}\left[\int_0^\tau \delta(\tau - \lambda)u(\lambda)d\lambda; \underline{0}\right] &= \int_0^\tau g(\tau - \lambda)u(\lambda)d\lambda, \\ \mathcal{S}[u(\tau); \underline{0}] &= \int_0^\tau g(\tau - \lambda)u(\lambda)d\lambda. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung benutzt auf der linken Seite die Abtasteigenschaft des Dirac-Stoßes. Links steht nun $y_{0Z}(\tau)$ und rechts das Faltungsintegral. ■

A1.10 Reihenkombination

Das erste System antwortet auf den Dirac-Stoß mit $g_1(\tau)$. Wird dieses Signal an den Eingang des zweiten Systems gelegt, so lässt sich dessen Ausgang als Faltungsintegral

$$y_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau')u_2(\tau - \tau')d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau')g_1(\tau - \tau')d\tau'$$

angeben. Dies ist die Stoßantwort der Reihenkombination. Der gesuchte Zusammenhang ist also durch

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau')g_1(\tau - \tau')d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(\tau - \tau')g_1(\tau')d\tau'$$

bestimmt. ■

A1.11 Stoßantwort zu bekannter Sprungantwort

In beiden Fällen ist $h(0^-) = h(0^+) = 0$. Aus $g(\tau) = h'(\tau)$ folgt daher

$$(i) \quad g(\tau) = e^{-2\tau} [4e^{-2\tau} + \cos(\tau) - 2\sin(\tau)] \varepsilon(\tau),$$

$$(ii) \quad g(\tau) = e^{-\tau} [\cos(2\tau) + 2\sin(2\tau)] \varepsilon(\tau). \quad \blacksquare$$

A1.12 Sprungantwort zu bekannter Stoßantwort

Aus der Faltungsdarstellung folgt mit $u(\tau) = \varepsilon(\tau)$

$$\begin{aligned} h(\tau) &= \int_{0^-}^{\tau} g(\tau')d\tau' = \int_{0^-}^{\tau} [2\delta(\tau') - e^{-\tau'/2}\varepsilon(\tau') - \delta(\tau' - 3)] d\tau' \\ &= 2\varepsilon(\tau) + 2(e^{-\tau/2} - 1)\varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau - 3), \\ h(\tau) &= 2e^{-\tau/2}\varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau - 3). \end{aligned}$$

Grafische Darstellungen in Abb.A1.12a,b.

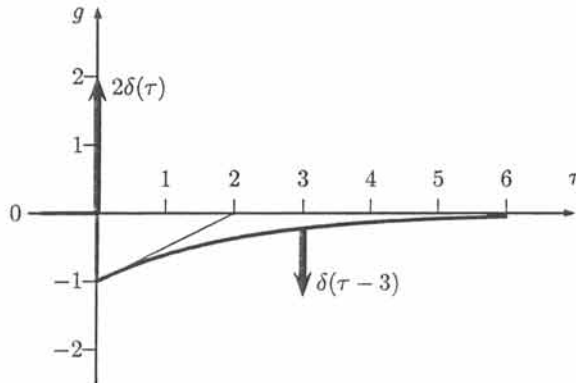


Abb.A1.12a

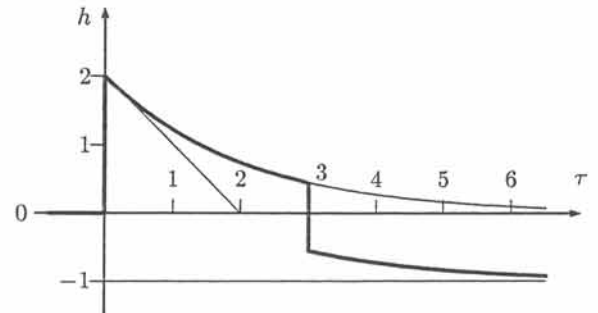


Abb.A1.12b

A1.13 Bestimmen der Stoßantwort

Aus dem gegebenen Zusammenhang $u(\tau) \mapsto y(\tau)$ folgt wegen der Linearität

$$u'(\tau) = \frac{1}{\tau_1} [\varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau - \tau_1)] \mapsto y'(\tau) = \delta(\tau - \tau_0) - \delta(\tau - \tau_0 - \tau_1).$$

Zusammen mit der Zeitinvarianz schließen wir daraus auf

$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau) &\mapsto h(\tau) = \tau_1 \delta(\tau - \tau_0), \\ \delta(\tau) &\mapsto g(\tau) = \tau_1 \delta'(\tau - \tau_0). \end{aligned}$$

Die Stoßantwort ist demnach ein Doppelstoß bei τ_0 mit dem Gewicht τ_1 .

A1.14 Duhamel-Integral

Als Voraussetzungen für die Gültigkeit des Faltungsintegrals haben wir *Linearität* und *Zeitinvarianz* anzunehmen. Wegen

$$g(\tau) = \frac{d}{d\tau} h(\tau), \quad g(\tau - \tau') = \frac{d}{d\tau} h(\tau - \tau') = -\frac{d}{d\tau'} h(\tau - \tau')$$

folgt dann mit $u(\tau) = 0$ für $\tau < 0$

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \int_{0-}^{\infty} g(\tau - \tau') u(\tau') d\tau' = - \int_{0-}^{\infty} \left[\frac{d}{d\tau'} h(\tau - \tau') \right] u(\tau') d\tau' \\ &= h(\tau - \tau') u(\tau') \Big|_{0-}^{\infty} + \int_{0-}^{\infty} h(\tau - \tau') \frac{d}{d\tau'} u(\tau') d\tau'. \end{aligned}$$

Wenn wir weiters *Kausalität* des Systems voraussetzen ($h(\tau) = 0$ für $\tau < 0$), verschwindet im letzten Ausdruck der erste Term, und die obere Grenze des Integrals wird gleich τ . Besitzt schließlich $u(\tau)$ einen Sprung bei $\tau = 0$, so gilt

$$\frac{d}{d\tau} u(\tau) = \left\{ \frac{d}{d\tau} u(\tau) \right\} + u(0+) \delta(\tau)$$

und damit

$$y(\tau) = \int_{0-}^{\tau} h(\tau - \tau') \frac{d}{d\tau'} u(\tau') d\tau' = h(\tau) u(0+) + \int_{0+}^{\infty} h(\tau - \tau') \frac{d}{d\tau'} u(\tau') d\tau'.$$

Die Darstellung der Systemantwort als Duhamel-Integral lässt sich als Überlagerung der Antworten auf infinitesimale Sprünge interpretieren (Abb.A1.14).

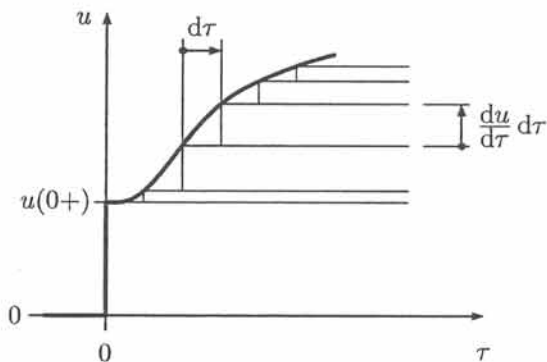


Abb.A1.14

■

A1.15 Dreieckantwort auf Rechteckimpuls

- (i) Der Eingang $u_1(\tau)$ lässt sich aus zwei der ursprünglichen Rechteckimpulse zusammensetzen (Abb.A1.15c),

$$u_1(\tau) = u(\tau - 1/2) + u(\tau - 3/2).$$

Linearität und Zeitinvarianz liefern dann (Abb.A1.15d)

$$y_1(\tau) = y(\tau - 1/2) + y(\tau - 3/2).$$

- (ii) Analog ergibt sich wegen

$$\varepsilon(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{rect}(\tau - 1/2 - k)$$

als Sprungantwort die Reihe von Dreieckimpulsen (Abb.A1.15e)

$$h(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{tri}(2\tau - 1 - 2k).$$

- (iii) Für die Stoßantwort erhalten wir schließlich die Rechteckschwingung (Abb. A1.15f)

$$g(\tau) = h'(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} 2(-1)^k \text{rect}(2\tau - 1/2 - k).$$

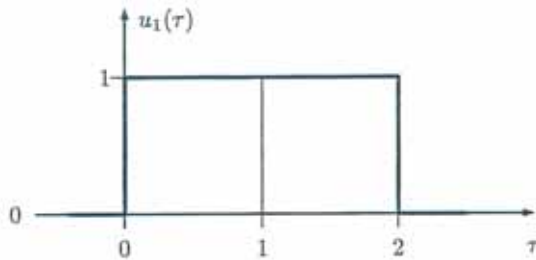


Abb.A1.15c

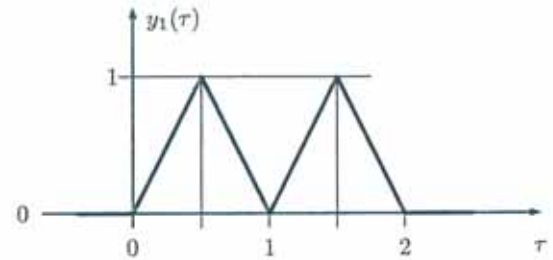


Abb.A1.15d

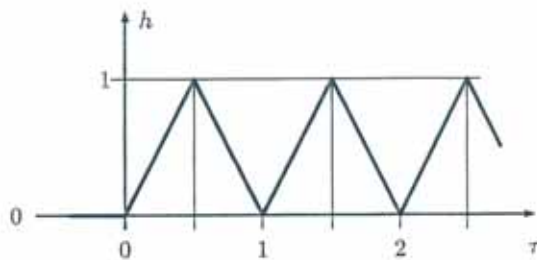


Abb.A1.15e

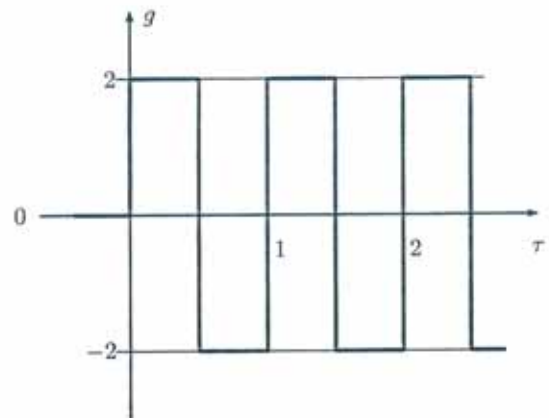


Abb.A1.15f

A1.16 R-C-Glied

Eine elementare Behandlung der Schaltung liefert, wenn bei zunächst ungeladenem Kondensator (Nullzustand) zum Zeitpunkt $t = 0$ an den Eingang die Gleichspannung U_0 gelegt wird, die Ausgangsspannung

$$u_A(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0, \\ U_0 [1 - e^{-t/(RC)}] & \text{für } t \geq 0. \end{cases}$$

(i) Unter Verwendung der Bezugsgrößen

$$U_{EB} = U_{AB} = U_0, \quad T_B = RC = 10 \text{ ms}$$

und der bezogenen Größen

$$\tau = t/T_B, \quad u = u_E/U_{EB}, \quad y = u_A/U_{AB}$$

entsteht daraus die Sprungantwort (Abb.A1.16b)

$$h(\tau) = (1 - e^{-\tau}) \varepsilon(\tau).$$

(ii) Die zugehörige Stoßantwort ist (Abb.A1.16c)

$$g(\tau) = h'(\tau) = e^{-\tau} \varepsilon(\tau).$$

(iii) Wir schreiben die Sinusschwingung mit

$$U_0 = 10 \text{ V}, \quad \nu = \omega T_B = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 10 \text{ ms} = \pi$$

in der Form

$$u(\tau) = \cos(\nu\tau)\varepsilon(\tau).$$

Die Auswertung des Faltungsintegrals liefert dann

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - \tau')u(\tau')d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\tau-\tau')}\varepsilon(\tau - \tau') \cos(\nu\tau')\varepsilon(\tau')d\tau' \\ &= \varepsilon(\tau)e^{-\tau} \int_0^{\tau} e^{\tau'} \cos(\nu\tau')d\tau' = \frac{1}{1 + \nu^2} [\cos(\nu\tau) + \nu \sin(\nu\tau) - e^{-\tau}] \varepsilon(\tau), \end{aligned}$$

d.h. (Abb.A1.16d)

$$y(\tau) = \frac{1}{1 + \pi^2} [\cos(\pi\tau) + \pi \sin(\pi\tau) - e^{-\tau}] \varepsilon(\tau)$$

oder, in Originalvariablen,

$$u_A(t) = \frac{10 \text{ V}}{1 + \pi^2} [\cos(\omega t) + \pi \sin(\omega t) - e^{-\omega t/\pi}] \varepsilon(\tau), \quad \omega = 100\pi \text{ s}^{-1}.$$

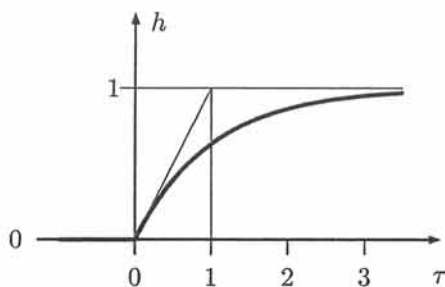


Abb.A1.16b

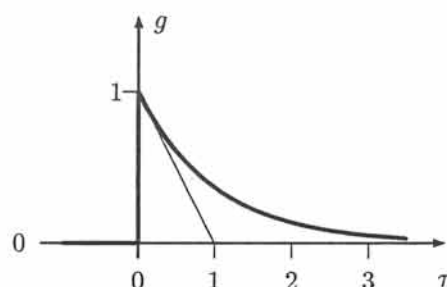


Abb.A1.16c

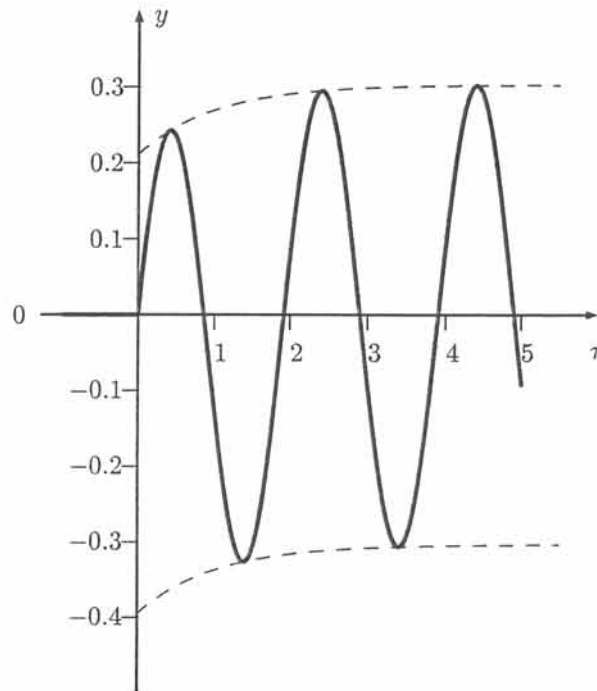


Abb.A1.16d

A1.17 Integrator

- (i) Der Anfangszeitpunkt liegt formal bei $\tau = -\infty$, es gibt daher keine explizite Abhängigkeit vom Anfangszustand. „Linearität des Systems“ reduziert sich demnach auf die Linearität der angegebenen Eingangs-Ausgangs-Beziehung. Diese liegt aber offensichtlich vor, da mit

$$y_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} u_1(\tau') d\tau', \quad y_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} u_2(\tau') d\tau'$$

die Linearkombination $u(\tau) = c_1 u_1(\tau) + c_2 u_2(\tau)$ mit beliebigen, festen c_1, c_2 auf die Linearkombination

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} u(\tau') d\tau' = \int_{-\infty}^{\tau} [c_1 u_1(\tau') + c_2 u_2(\tau')] d\tau' = c_1 y_1(\tau) + c_2 y_2(\tau)$$

mit den gleichen Koeffizienten führt. Ersetzen wir weiters $u(\tau)$ durch $u(\tau - \lambda)$ mit beliebigem, konstantem λ , so antwortet das System mit

$$\int_{-\infty}^{\tau} u(\tau' - \lambda) d\tau' = \int_{-\infty}^{\tau - \lambda} u(\tau'') d\tau'' = y(\tau - \lambda).$$

Es ist also auch zeitinvariant.

- (ii) Die angegebene Eingangs-Ausgangs-Beziehung liefert speziell für $u(\tau) = \delta(\tau)$ die Stoßantwort

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau') d\tau' = \varepsilon(\tau).$$

Die Stoßantwort des Integrators ist also der Heaviside-Sprung.

- (iii) Eine passende Kombination zeigt Abb.A1.17a. Am Ausgang des Integrators erscheint dann

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} [u(\tau') - u(\tau' - \tau_0)] d\tau',$$

für $u(\tau) = \delta(\tau)$ also

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} [\delta(\tau') - \delta(\tau' - \tau_0)] d\tau' = \varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau - \tau_0) = \text{rect}(\tau/\tau_0 - 1/2),$$

die gewünschte Stoßantwort. Die Umformung des Integrals für $y(\tau)$,

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} u(\tau') d\tau' - \int_{-\infty}^{\tau - \tau_0} u(\tau'') d\tau'',$$

liefert direkt die Eingangs-Ausgangs-Beziehung des Kurzzeit-Integrators

$$y(\tau) = \int_{\tau - \tau_0}^{\tau} u(\tau') d\tau'$$

und die zugehörige Sprungantwort

$$h(\tau) = \int_{\tau - \tau_0}^{\tau} \varepsilon(\tau') d\tau' = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau < 0, \\ \tau & \text{für } 0 \leq \tau < \tau_0, \\ \tau_0 & \text{für } \tau \geq \tau_0, \end{cases}$$

dargestellt in Abb.A1.17b.

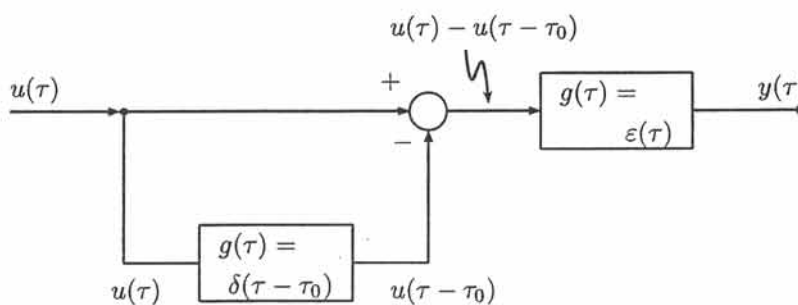


Abb.A1.17a

■

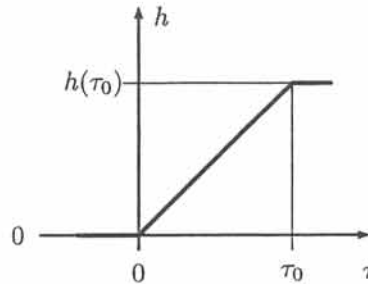


Abb.A1.17b

A1.18 Kurzzeit-Integrator

Für die Berechnung des Ausgangssignals ist mit der Stoßantwort

$$g(\tau) = \varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau - 1)$$

und der gegebenen Eingangsfunktion das Faltungsintegral

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon(\tau - \tau') - \varepsilon(\tau - 1 - \tau')] \varepsilon(\tau') \cos(\nu\tau' + \varphi_0) d\tau'$$

auszuwerten. Wir erhalten für $\tau < 0$:

$$y(\tau) = 0,$$

für $0 < \tau < 1$:

$$y(\tau) = \int_0^{\tau} \cos(\nu\tau' + \varphi_0) d\tau' = \frac{1}{\nu} [\sin(\nu\tau + \varphi_0) - \sin(\varphi_0)],$$

und für $\tau > 1$:

$$y(\tau) = \int_{\tau-1}^{\tau} \cos(\nu\tau' + \varphi_0) d\tau' = \frac{1}{\nu} [\sin(\nu\tau + \varphi_0) - \sin(\nu(\tau - 1) + \varphi_0)].$$

■

A1.19 Antworten eines Integrators und eines Differentiators

Mit den Eingangs-Ausgangs-Beziehungen für den Integrator,

$$y_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} u(\tau') d\tau',$$

und für den Differentiator,

$$y_2(\tau) = \frac{d}{d\tau} [u(\tau)],$$

erhalten wir:

(i) $u(\tau) = a \operatorname{rect}(\tau/\tau_0 + 1/2) = a [\varepsilon(\tau + \tau_0) - \varepsilon(\tau)]$, Abb.A1.19a;

$$y_1(\tau) = a [(\tau + \tau_0)\varepsilon(\tau + \tau_0) - \tau\varepsilon(\tau)], \text{ Abb.A1.19b;}$$

$$y_2(\tau) = a [\delta(\tau + \tau_0) - \delta(\tau)], \text{ Abb.A1.19c;}$$

(ii) $u(\tau) = \frac{a}{\tau_0} [(\tau + 2\tau_0)\varepsilon(\tau + 2\tau_0) - 2(\tau + \tau_0)\varepsilon(\tau + \tau_0) + \tau\varepsilon(\tau)], \text{ Abb.A1.19d;}$

$$y_1(\tau) = \frac{a}{\tau_0} \left[\int_0^{\tau+2\tau_0} \tau' \varepsilon(\tau') d\tau' - 2 \int_0^{\tau+\tau_0} \tau' \varepsilon(\tau') d\tau' + \int_0^{\tau} \tau' \varepsilon(\tau') d\tau' \right]$$

$$= \frac{a}{2\tau_0} [(\tau + 2\tau_0)^2 \varepsilon(\tau + 2\tau_0) - 2(\tau + \tau_0)^2 \varepsilon(\tau + \tau_0) + \tau^2 \varepsilon(\tau)],$$

$$y_1(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau < -2\tau_0, \\ \frac{a}{2\tau_0} (\tau + 2\tau_0)^2 & \text{für } -2\tau_0 \leq \tau < -\tau_0, \\ \frac{a}{2\tau_0} (2\tau_0^2 - \tau^2) & \text{für } -\tau_0 \leq \tau < 0, \\ a\tau_0 & \text{für } \tau \geq 0, \end{cases} \text{ Abb.A1.19e;}$$

$$y_2(\tau) = \frac{a}{\tau_0} [\varepsilon(\tau + 2\tau_0) - 2\varepsilon(\tau + \tau_0) + \varepsilon(\tau)], \text{ Abb.A1.19f.}$$

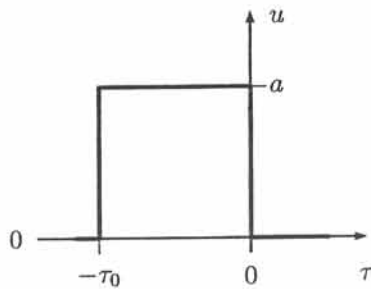


Abb.A1.19a

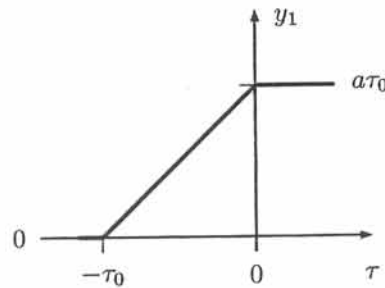


Abb.A1.19b

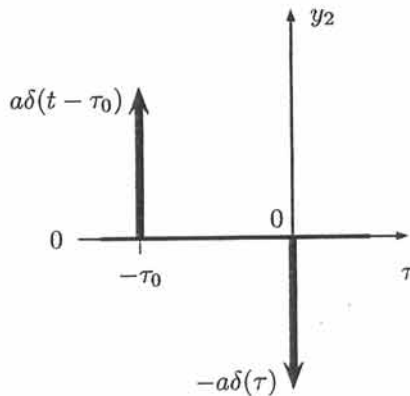


Abb.A1.19c

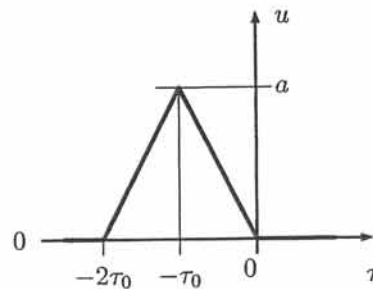


Abb.A1.19d

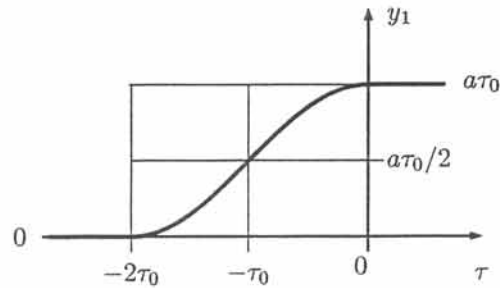


Abb.A1.19e

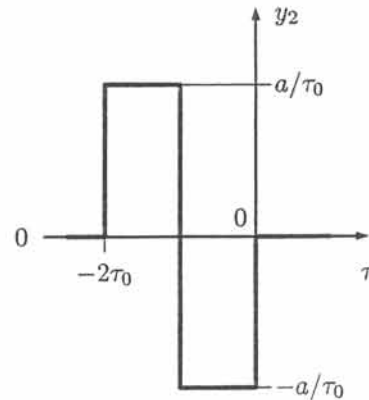


Abb.A1.19f

A1.20 Stabilität

Notwendig und hinreichend für die System-Stabilität ist die Existenz einer oberen Schranke des Integrals

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau.$$

$$(i) \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau < \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} (\tau' e^{-\tau'} + e^{-2\tau'}) d\tau' = 3/2 \quad \text{stabil}$$

$$(ii) \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} (e^{0,01\tau'} - e^{-\tau'}) d\tau' = \infty \quad \text{instabil}$$

$$(iii) \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} [1 - e^{-\tau'} \sin(2\tau')] d\tau' = \infty \quad \text{instabil}$$

$$(iv) \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} e^{\tau'} |\sin(2\tau')| d\tau' = \infty \quad \text{instabil}$$

$$(v) \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} (e^{-2\tau'} + e^{-\tau'}) d\tau' = 3/2 \quad \text{stabil}$$

$$(vi) \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} \tau'^4 e^{-0,01\tau'} d\tau' = 24 \cdot 10^{10} \quad \text{stabil}$$

A2.1 Einfacher Reihenschwingkreis

Die Kirchhoff-Maschenregel zusammen mit den Elementgleichungen,

$$u_q = Ri + L \frac{di}{dt} + u_C, \quad i = C \frac{du_C}{dt},$$

liefert

(i) nach Elimination von u_C ,

$$\frac{du_q}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} = R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i,$$

die Differentialgleichung

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{du_q}{dt}.$$

Mit zunächst allgemeinen Bezugswerten U_B, I_B und T_B werden die bezogenen Variablen

$$y = i/I_B, \quad u = u_q/U_B, \quad \tau = t/T_B$$

in die Differentialgleichung eingeführt,

$$LC \frac{I_B}{T_B^2} y'' + RC \frac{I_B}{T_B} y' + I_B y = C \frac{U_B}{T_B} u'.$$

Daraus entsteht die gesuchte bezogene Form

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1 u'}$$

mit den Koeffizienten

$$a_1 = T_B \frac{R}{L}, \quad a_0 = \frac{T_B^2}{LC}, \quad b_1 = \frac{U_B}{I_B} \frac{T_B}{L}.$$

Durch eine spezielle Wahl der Bezugswerte können die Koeffizienten vereinfacht werden, z.B.

$$T_B = L/R, \quad U_B/I_B = R \implies a_1 = b_1 = 1, \quad a_0 = L/(R^2 C),$$

oder

$$T_B = \sqrt{LC}, \quad U_B/I_B = \sqrt{L/C} \implies a_0 = b_1 = 1, \quad a_1 = R\sqrt{C/L}.$$

(ii) Die Elimination von i liefert die Differentialgleichung

$$LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_q.$$

Die allgemeinen Bezugswerte U_{AB}, U_{EB} und T_B und bezogenen Variablen

$$y = u_C/U_{AB}, \quad u = u_q/U_{EB}, \quad \tau = t/T_B$$

führen dann auf

$$LC \frac{U_{AB}}{T_B^2} y'' + RC \frac{U_{AB}}{T_B} y' + U_{AB} y = U_{EB} u,$$

d.h. auf die Standardform

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_0 y = b_0 u}$$

mit den Koeffizienten

$$a_1 = T_B \frac{R}{L}, \quad a_0 = \frac{T_B^2}{LC}, \quad b_0 = \frac{U_{EB}}{U_{AB}} \frac{T_B^2}{LC}.$$

Vereinfachung der Koeffizienten durch spezielle Wahl der Bezugswerte möglich, z.B.

$$T_B = L/R, \quad U_{EB}/U_{AB} = R^2 C/L \implies a_1 = b_0 = 1, \quad a_0 = L/(R^2 C),$$

oder

$$T_B = \sqrt{LC}, \quad U_{EB} = U_{AB} \implies a_0 = b_0 = 1, \quad a_1 = R\sqrt{C/L}.$$

■

A2.2 Beschalteter Reihenschwingkreis

Unter Berücksichtigung der Eigenschaften des idealen Operationsverstärkers ergibt sich mit den Bezeichnungen aus Abb.A2.2b

$$Ri + L \frac{di}{dt} + u_C + u_1 = 0, \quad i = C \frac{du_C}{dt}, \quad u_1 = \frac{R_1}{R_2} u_2 = -\frac{R_1}{R_2} R_3 i,$$

und daraus nach Elimination von u_C und u_1 die homogene Differentialgleichung

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(R - \frac{R_1}{R_2} R_3 \right) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Mit den Bezugsgrößen I_B und T_B und den bezogenen Variablen

$$y = i/I_B, \quad \tau = t/T_B$$

folgt

$$L \frac{I_B}{T_B^2} y'' + \frac{I_B}{T_B} \left(R - \frac{R_1}{R_2} R_3 \right) y' + \frac{I_B}{C} y = 0,$$

d.h.

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_0 y = 0}$$

wobei

$$a_1 = \frac{T_B}{L} \left(R - \frac{R_1}{R_2} R_3 \right), \quad a_0 = \frac{T_B^2}{LC}$$

oder, äquivalent,

$$y'' + 2\vartheta\nu_0 y' + \nu_0^2 y = 0$$

mit

$$\nu_0 = \frac{T_B}{\sqrt{LC}} = \frac{T_B}{0,2 \text{ ms}}, \quad \vartheta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \left(R - \frac{R_1}{R_2} R_3 \right) = \begin{cases} 0,05 & \text{für } R_3 = 5 \text{ k}\Omega, \\ -0,05 & \text{für } R_3 = 7 \text{ k}\Omega. \end{cases}$$

Die spezielle Wahl von $T_B = 0,2 \text{ ms}$ liefert $\nu_0 = 1$. Für $R_3 = 5 \text{ k}\Omega$ ist der Dämpfungsgrad $\vartheta > 0$, d.h. eine Stromstörung klingt ab. Für $R_3 = 7 \text{ k}\Omega$ ergibt sich $\vartheta < 0$ entsprechend einer aufklingenden Stromschwingung (Selbsterregung, Instabilität).

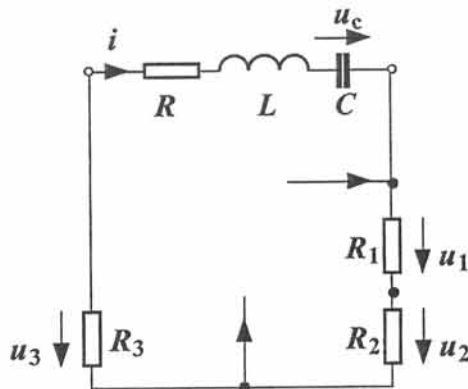


Abb.A2.2b

A2.3 Wien-Brücke

Unter Verwendung der Eigenschaften des idealen Operationsverstärkers gilt mit den Bezeichnungen aus Abb.A2.3b

$$u_1 = \frac{R_3}{R_3 + R_4} u_A = R_1 i + u_{C1}, \quad i = C_1 \frac{du_{C1}}{dt},$$

$$u_2 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} u_A, \quad i = \frac{u_2}{R_2} + C_2 \frac{du_2}{dt},$$

und damit

$$R_1 C_1 R_2 C_2 \frac{d^2 u_A}{dt^2} + \left[\left(1 - \frac{R_2 R_3}{R_1 R_4} \right) R_1 C_1 + R_2 C_2 \right] \frac{du_A}{dt} + u_A = 0.$$

(i) Die Differentialgleichung in Originalvariablen lässt sich daher in der Form

$$\frac{d^2 u_A}{dt^2} + 2\delta \frac{du_A}{dt} + \omega_0^2 u_A = 0$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}\omega_0 &= 2\pi f_0 = 1/\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}, \quad f_0 = 3,12 \text{ kHz (Kennfrequenz)}, \\ \delta &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_1 C_1} + \left(1 - \frac{R_2 R_3}{R_1 R_4} \right) \frac{1}{R_2 C_2} \right] \\ &= -9,804 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \text{ (Abklingkoeffizient)}\end{aligned}$$

schreiben.

- (ii) Mit den allgemeinen Bezugswerten U_B, T_B und den bezogenen Variablen $y = u_A/U_A$, $\tau = t/T_B$ entsteht daraus die bezogene Standardform

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

wobei

$$a_1 = 2\delta T_B = -\frac{T_B}{51 \mu\text{s}}, \quad a_0 = (\omega_0 T_B)^2 = \left(\frac{T_B}{51 \mu\text{s}} \right)^2.$$

Wählen wir speziell $T_B = 51 \mu\text{s}$, so reduziert sich die Differentialgleichung auf

$$y'' - y' + y = 0.$$

- (iii) Äquivalent ist die Form

$$y'' + 2\vartheta\nu_0 y' + \nu_0^2 y = 0$$

mit

$$\begin{aligned}\nu_0 &= \omega_0 T_B = T_B/51 \mu\text{s} \text{ (bezogene Kennkreisfrequenz)}, \\ \vartheta &= \delta/\omega_0 = -1/2 \text{ (Dämpfungsgrad)}.\end{aligned}$$

Für $T_B = 51 \mu\text{s}$ ist speziell $\nu_0 = 1$. Der negative Dämpfungsgrad bewirkt ein Aufklingen der entstehenden Schwingung (Instabilität). Tatsächlich werden Schaltungen dieser Art als (spulenfreie!) Schwingungserzeuger eingesetzt, wobei allerdings das lineare Modell zur vollständigen Beschreibung nicht ausreicht.

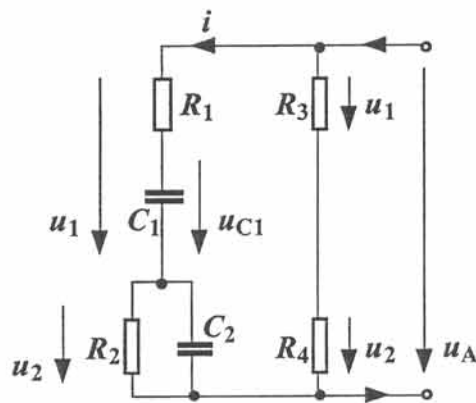


Abb. A2.3b

A2.4 Magnetsystem

(i) Mit den Bezeichnungen aus Abb. 2.4b gilt für $t > 0$ (Schalter geöffnet)

$$u_C = (R_C + R_L) i + L \frac{di}{dt}, \quad i = -C \frac{du_C}{dt}$$

und damit

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R_C + R_L) C \frac{du_C}{dt} + u_C = 0, \quad t > 0.$$

Die Anfangsbedingungen folgen aus

$$u_C(0+) = u_C(0-) = U_0, \quad i(0+) = i(0-) = U_0/R_L$$

zu

$$u_C(0+) = U_0, \quad \frac{d}{dt} u_C(0+) = -\frac{U_0}{R_L C}.$$

(ii) Über die bezogenen Größen und Abkürzungen

$$\tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad y = u_C/U_0,$$

$$\vartheta = \frac{1}{2} (R_C + R_L) \sqrt{C/L}, \quad \alpha = \sqrt{L/C}/R_L$$

erhalten wir schließlich die einfache Form

$$y'' + 2\vartheta y' + y = 0, \quad \tau > 0; \quad y(0+) = 1, \quad y'(0+) = -\alpha$$

für das vorliegende Anfangswertproblem.

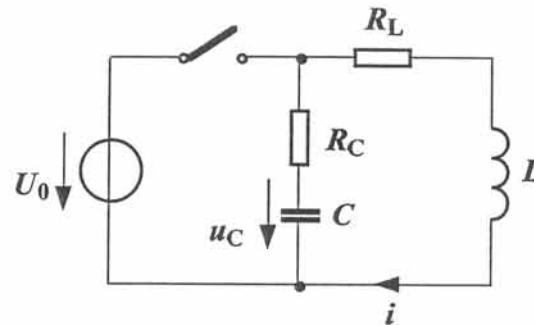


Abb.A2.4b

A2.5 Leitungstück

Unter Verwendung der Bezeichnungen aus Abb.A2.5b erhalten wir zunächst

$$i_2 = \frac{1}{R}u_2, \quad i_3 = i_2 + \frac{C}{2} \frac{du_2}{dt}, \quad i_1 = i_3 + \frac{C}{2} \frac{du_1}{dt},$$

$$u_1 = u_2 + L \frac{di_3}{dt}, \quad u_0 = u_1 + Ri_1.$$

(i) Die schrittweise Elimination aller Unbekannten zugunsten u_2 liefert dann

$$u_0 = u_1 + \frac{1}{2}RC \frac{du_1}{dt} + Ri_3 = u_2 + L \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{2}RC \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{2}RLC \frac{d^2i_3}{dt^2} + Ri_3$$

$$= u_2 + \frac{1}{2}LC \frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{2}RC \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{4}RCLC \frac{d^3u_2}{dt^3}$$

$$+ \frac{1}{2}LC \frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{1}{2}RC \frac{du_2}{dt} + u_2,$$

und, zusammen mit $R = \sqrt{L/C}$, die Differentialgleichung für $u_2(t)$ in Originalvariablen,

$$\boxed{\frac{1}{8} (\sqrt{LC})^3 \frac{d^3u_2}{dt^3} + \frac{LC}{2} \frac{d^2u_2}{dt^2} + \sqrt{LC} \frac{du_2}{dt} + u_2 = \frac{1}{2}u_0.}$$

(ii) Die Einführung bezogener Variablen gemäß

$$y = u_2/U_B, \quad u = u_0/U_B$$

$$\tau = t/T_B, \quad T_B = \sqrt{LC}/2$$

führt auf die bezogene Form der Differentialgleichung

$$\boxed{y''' + 2y'' + 2y' + y = \frac{1}{2}u.}$$

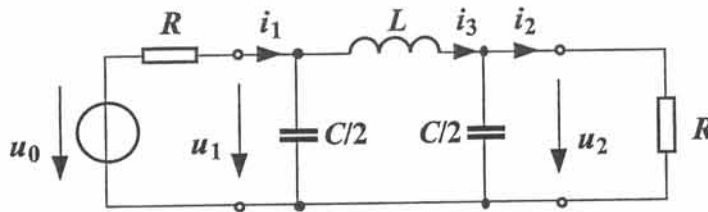


Abb.A2.5b

A2.6 Übertragungsglied

Mit Bezug auf Abb.A2.6b liefert eine elementare Wechselstromanalyse

$$I_{C1} = j\omega C_1 U_1, \quad U_1 = R_1 I,$$

$$U_E = U_1 + R_1 (I + I_{C1}) = R_1 (2 + j\omega R_1 C_1) I$$

und

$$I_{C2} = j\omega C_2 U_2, \quad U_2 = -R_2 I,$$

$$U_A = U_2 + R_2 (-I + I_{C2}) = -R_2 (2 + j\omega R_2 C_2) I.$$

Die durch Elimination von I daraus entstehende Beziehung

$$R_1 (2 + j\omega R_1 C_1) U_A = -R_2 (2 + j\omega R_2 C_2) U_E$$

lässt sich sofort in den Zeitbereich rückübersetzen:

$$R_1 \left(R_1 C_1 \frac{du_A}{dt} + 2u_A \right) = -R_2 \left(R_2 C_2 \frac{du_E}{dt} + 2u_E \right).$$

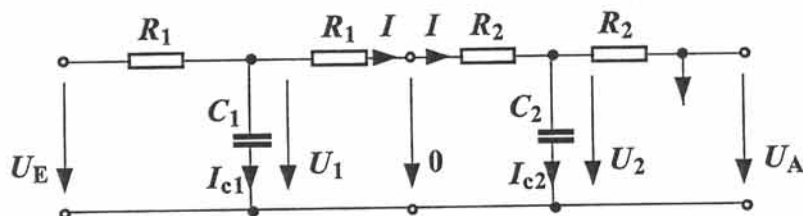


Abb.A2.6b

A2.7 Filter

Die Spannungsteilerregel der elementaren Wechselstromrechnung liefert (Abb. A2.7b)

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{1}{j\omega C_1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_1} + \frac{j\omega L}{1 + (j\omega)^2 LC}} = \frac{1}{1 + \frac{(j\omega)^2 LC_1}{1 + (j\omega)^2 LC}} = \frac{1 + (j\omega)^2 LC}{1 + (j\omega)^2 L(C + C_1)}$$

Führen wir nun die bezogene Kreisfrequenz ν gemäß

$$j\omega = j\nu\omega_B = j\nu/\sqrt{LC}$$

ein und ersetzen dann $j\nu \mapsto s$, so ergibt sich die gesuchte Übertragungsfunktion zu

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{(1 + C_1/C)s^2 + 1}$$

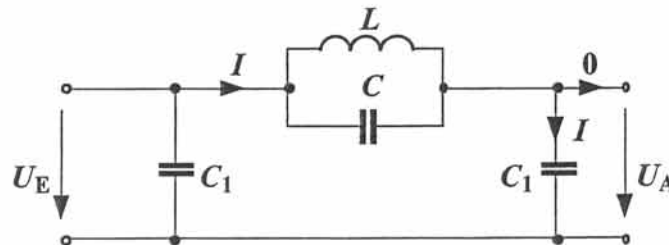


Abb.A2.7b

A2.8 Übertragungsfunktion

Für Systeme, die durch lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben werden, ist die Übertragungsfunktion eine rationale Funktion (Quotient zweier Polynome). Allgemeines Schema:

- Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

- Charakteristisches Polynom

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

- Nullstellenpolynom

$$Q(s) = b_m s^m + \dots + b_1s + b_0$$

- Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}.$$

$$(i) \quad G(s) = \frac{3}{s+2}, \quad m=0, \quad n=1,$$

$$(ii) \quad G(s) = \frac{3s+2}{s+2} = 3 - \frac{4}{s+2}, \quad m=1, \quad n=1,$$

$$(iii) \quad G(s) = \frac{s}{s^2+4} = \frac{s}{(s-j2)(s+j2)}, \quad m=1, \quad n=2,$$

$$(iv) \quad G(s) = \frac{s^2+2s+10}{s^2} = 1 + 2\frac{s+5}{s^2}, \quad m=2, \quad n=2.$$

■

A2.9 Homogene Lösungen

Bestimmend sind allein die Pole p_1, \dots, p_n des Systems n -ter Ordnung, d.h. die Wurzeln (Nullstellen) des charakteristischen Polynoms $P(s)$. Sind sie alle unterschiedlich, so ist

$$y_h(\tau) = c_1 e^{p_1 \tau} + \dots + c_n e^{p_n \tau}$$

mit n freien Konstanten c_1, \dots, c_n . Tritt ein Pol p_i mehrfach auf, so haben wir für die k -te Wiederholung den entsprechenden Term mit τ^k zu multiplizieren.

$$(i) \quad p_1 = -7, \quad p_2 = -8 : \quad y_h(\tau) = c_1 e^{-7\tau} + c_2 e^{-8\tau}.$$

$$(ii) \quad \text{wie (i)}.$$

$$(iii) \quad p_1 = 0, \quad p_{2,3} = -0,2 \pm j2 :$$

$$\begin{aligned} y_h(\tau) &= c_1 + c_2 e^{(-0,2+j2)\tau} + c_3 e^{(-0,2-j2)\tau} \\ &= c_1 + e^{-0,2\tau} [a_2 \cos(2\tau) + a_3 \sin(2\tau)] \\ &= c_1 + b_2 e^{-0,2\tau} \cos(2\tau + \varphi_2). \end{aligned}$$

$$(iv) \quad p_1 = p_2 = -1 : \text{Zweifacher Pol, } y_h(\tau) = (c_1 + c_2 \tau) e^{-\tau}.$$

■

A2.10 Stabilität

- (i) $p_1 = -2$; Abb.A2.10a: **stabil**, da alle Pole in li. HE.
- (ii) $p_1 = -2$, $q_1 = -2/3$; Abb.A2.10b: **stabil**, da alle Pole in li. HE.
- (iii) $p_{1,2} = \pm j2$, $q_1 = 0$; Abb.A2.10c: **grenzstabil**, da Pole auf im. Achse einfach und kein Pol in re. HE.
- (iv) $p_1 = p_2 = 0$, $q_{1,2} = -1 \pm j3$; Abb.A2.10d: **instabil**, da zweifacher Pol auf im. Achse.

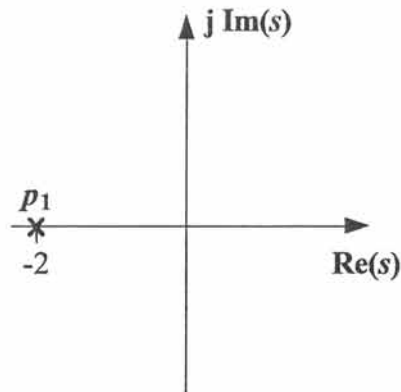


Abb.A2.10a

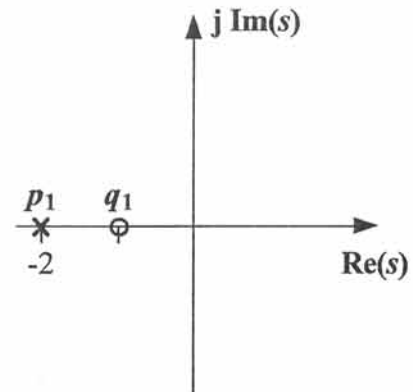


Abb.A2.10b

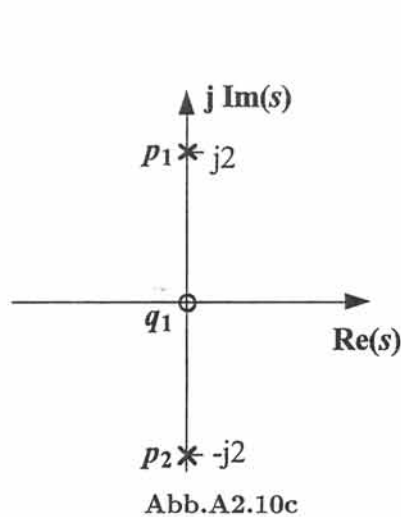


Abb.A2.10c

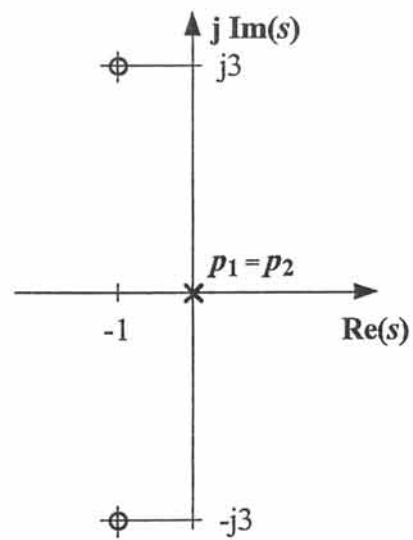


Abb.A2.10d

■

A2.11 Partikuläre Lösung bei zusammengesetzter Erregung

Die Eingangsfunktion ist als Summe von Termen darstellbar, die sich aus der reellen Exponentialfunktion ableiten lassen:

$$\begin{aligned} u_1(\tau) = 2 &\implies y_{p1}(\tau) = 2, \\ u_2(\tau) = 3\tau &\implies y_{p2}(\tau) = -27 + 3\tau, \\ u_3(\tau) = -e^\tau &\implies y_{p3}(\tau) = -\frac{1}{6}e^\tau. \end{aligned}$$

Die Überlagerung liefert

$$y_p(\tau) = -25 + 3\tau - \frac{1}{6}e^\tau.$$

Kontrolle: $y'' + 10y' + y = u' + u$,

$$-\frac{1}{6}e^\tau + 30 - \frac{10}{6}e^\tau - 25 + 3\tau - \frac{1}{6}e^\tau = 3 - e^\tau + 2 + 3\tau - e^\tau.$$

■

A2.12 Partikuläre Lösung bei Sinuserregung

Zur Eingangsfunktion (komplexe Amplitude \hat{a})

$$u(\tau) = \operatorname{Re} [\hat{a}e^{j\nu\tau}]$$

gehört eine partikuläre Lösung

$$y_p(\tau) = \operatorname{Re} [\hat{a}G(j\nu)e^{j\nu\tau}].$$

Hier ist speziell

$$u(\tau) = \cos(2\tau) = \operatorname{Re} [e^{j2\tau}]$$

und damit

$$\begin{aligned} \text{(i) } y_p(\tau) &= \operatorname{Re} \left[\frac{j^2 + 1}{j^2 - 1} e^{j2\tau} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{5} (3 - j4) (\cos(2\tau) + j \sin(2\tau)) \right] \\ &= \frac{1}{5} [3 \cos(2\tau) + 4 \sin(2\tau)] = \cos(2\tau - 0,927); \\ \text{(ii) } y_p(\tau) &= \operatorname{Re} \left[\frac{j^2 - 1}{j^2 + 1} e^{j2\tau} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{5} (3 + j4) (\cos(2\tau) + j \sin(2\tau)) \right] \\ &= \frac{1}{5} [3 \cos(2\tau) - 4 \sin(2\tau)] = \cos(2\tau + 0,927). \end{aligned}$$

■

A2.13 Realteilbildung als lineare Operation

Im linearen Raum der Funktionen $X(s)$ ist eine Operation $L[\cdot]$ genau dann linear, wenn für beliebige Linearkombinationen der Zusammenhang

$$L[k_1X_1(s) + k_2X_2(s)] = k_1L[X_1(s)] + k_2L[X_2(s)]$$

besteht. Diese Eigenschaft liegt für die Realteilbildung $\operatorname{Re}[\cdot]$ vor, da mit

$$X(s) = X' + jX'', \quad X' = \operatorname{Re}[X(s)], \quad X'' = \operatorname{Im}[X(s)]$$

auch

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[k_1 X_1(s) + k_2 X_2(s)] &= \operatorname{Re}[k_1 X_1' + k_2 X_2' + j(k_1 X_1'' + k_2 X_2'')] \\ &= k_1 X_1' + k_2 X_2' \\ &= k_1 \operatorname{Re}[X_1(s)] + k_2 \operatorname{Re}[X_2(s)] \end{aligned}$$

gilt, sofern die Koeffizienten k_1, k_2 reell sind. Gleiches gilt offensichtlich auch für die Imaginärteilbildung $\operatorname{Im}[\cdot]$. *Achtung:* Für die Linearkombinationen sind in diesem Zusammenhang nur reelle Koeffizienten zulässig. ■

A2.14 Partikuläre Lösung zu abklingendem Sprung

- Für $\tau < 0$ gilt $u(\tau) = 0$ und damit $y_p(\tau) = 0$. Bei der Konstruktion der partikulären Lösung für $\tau > 0$ ist zu beachten, dass der einfache Pol $p_2 = -3$ als Koeffizient im Exponenten -3τ der Eingangsfunktion auftritt. Wir berechnen deshalb

$$y_p(\tau) = 2 \frac{d}{ds} \left[\frac{s+1}{s+2} e^{s\tau} \right]_{s=-3} = 2(1+2\tau)e^{-3\tau}.$$

- Zur gegebenen Übertragungsfunktion gehört die System-Differentialgleichung

$$y'' + 5y' + 6y = u' + u.$$

Für $\tau < 0$ ist $y_p(\tau) = 0$ offensichtlich eine Lösung zu $u(\tau) = 0$. Für $\tau > 0$ haben wir

$$y_p'(\tau) = -2(1+6\tau)e^{-3\tau}$$

und damit

$$\begin{aligned} &-12e^{-3\tau} + 6(1+6\tau)e^{-3\tau} - 10(1+6\tau)e^{-3\tau} + 12(1+2\tau)e^{-3\tau} \\ &= -6e^{-3\tau} + 2e^{-3\tau}. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung ist also erfüllt. ■

A2.15 Partikuläre Lösung zu abklingender Sinusschwingung

$$(i) u(\tau) = \operatorname{Re} \left[e^{s\tau} \Big|_{s=\sigma+j\nu} \right] = \operatorname{Re} [e^{(\sigma+j\nu)\tau}] = \operatorname{Re} [e^{\sigma\tau} (\cos(\nu\tau) + j \sin(\nu\tau))] \\ = e^{\sigma\tau} \cos(\nu\tau).$$

(ii) Demnach entsteht durch Anwenden der linearen Operation

$$L[\cdot] = \operatorname{Re} \left[\cdot \Big|_{s=\sigma+j\nu} \right]$$

auf $G(s)e^{s\tau}$ die gesuchte partikuläre Lösung,

$$y_p(\tau) = \operatorname{Re} [G(\sigma + j\nu)e^{(\sigma+j\nu)\tau}] = e^{\sigma\tau} \operatorname{Re} [G(\sigma + j\nu)e^{j\nu\tau}],$$

oder, äquivalent,

$$y_p(\tau) = |G(\sigma + j\nu)| e^{\sigma\tau} \cos(\nu\tau + \varphi_G) \quad \text{mit} \quad \varphi_G = \operatorname{arc}[G(\sigma + j\nu)].$$

(iii) Mit $\sigma = -2$, $\nu = 4$, $G(\sigma + j\nu) = -\frac{3}{1-j4} = -\frac{3}{17}(1+j4)$, $|G(\sigma + j\nu)| = 3/\sqrt{17}$, $\varphi_G = -1,816$ ist speziell

$$y_p(\tau) = 0,728e^{-2\tau} \cos(4\tau - 1,816).$$

■

A2.16 Vollständige Lösungen

$$(i) G(s) = 2/(s+7), \quad p_1 = -7 \implies y_h(\tau) = c_1 e^{-7\tau};$$

$$u(\tau) = 1 = e^{-0\tau} \quad \text{für} \quad \tau \geq 0 \implies y_p(\tau) = G(0) = 2/7;$$

$$y(\tau) = c_1 e^{-7\tau} + 2/7, \quad y(0+) = c_1 + 2/7 = 0 \implies c_1 = -2/7,$$

$$y(\tau) = \frac{2}{7} (1 - e^{-7\tau}),$$

$$\boxed{y(\tau) = 0,286 (1 - e^{-7\tau}), \quad \tau \geq 0.}$$

$$\text{Kontrolle: } 2e^{-7\tau} + 2(1 - e^{-7\tau}) = 2, \quad y(0+) = 0.$$

$$(ii) G(s) = (s+3)/(s+2), \quad p_1 = -2 \implies y_h(\tau) = c_1 e^{-2\tau};$$

$$u(\tau) = 4 \cos(5\tau) \quad \text{für} \quad \tau \geq 0 \implies$$

$$y_p(\tau) = \operatorname{Re} [G(j5)4e^{j5\tau}] = \operatorname{Re} \left[\frac{3+j5}{2+j5} 4e^{j5\tau} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{4}{29} (31 - j5) e^{j5\tau} \right]$$

$$= \frac{4}{29} [31 \cos(5\tau) + 5 \sin(5\tau)];$$

$$y(\tau) = c_1 e^{-2\tau} + \frac{4}{29} [31 \cos(5\tau) + 5 \sin(5\tau)], \quad y(0+) = -1 \implies$$

$$c_1 = -1 - \frac{4}{29} \cdot 31 = -\frac{153}{29};$$

$$y(\tau) = -\frac{153}{29} e^{-2\tau} + \frac{4}{29} [31 \cos(5\tau) + 5 \sin(5\tau)], \quad \text{oder}$$

$$y(\tau) = -5,276 e^{-2\tau} + 4,276 \cos(5\tau) + 0,690 \sin(5\tau), \quad \text{oder}$$

$$\boxed{y(\tau) = -5,276 e^{-2\tau} + 4,331 \cos(5\tau - 0,160), \quad \tau \geq 0.}$$

Kontrolle:

$$2 \frac{153}{29} e^{-2\tau} + \frac{4}{29} [-5 \cdot 31 \sin(5\tau) + 5 \cdot 5 \cos(5\tau)]$$

$$-2 \frac{153}{29} e^{-2\tau} + \frac{8}{29} [31 \cos(5\tau) + 5 \sin(5\tau)]$$

$$= -20 \sin(5\tau) + 12 \cos(5\tau);$$

$$y(0+) = -\frac{153}{29} + \frac{4 \cdot 31}{29} = -1.$$

$$(iii) \quad G(s) = 2(s+1)/(s^2 + 7s + 12), \quad p_1 = -4, \quad p_2 = -3 \implies$$

$$y_h(\tau) = c_1 e^{-4\tau} + c_2 e^{-3\tau};$$

$$u(\tau) = 5e^{-\tau} \quad \text{für } \tau \geq 0 \implies y_p(\tau) = 5G(-1)e^{-\tau} = 0;$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0+) = c_1 + c_2 = 2, \\ y'(0+) = -4c_1 - 3c_2 = -1 \end{array} \right\} c_1 = -5, \quad c_2 = 7,$$

$$\boxed{y(\tau) = -5e^{-4\tau} + 7e^{-3\tau}, \quad \tau \geq 0.}$$

$$\text{Kontrolle: } y'(\tau) = 20e^{-4\tau} - 21e^{-3\tau},$$

$$-80e^{-4\tau} + 63e^{-3\tau} + 140e^{-4\tau} - 147e^{-3\tau} - 60e^{-4\tau} + 84e^{-3\tau}$$

$$= -10e^{-\tau} + 10e^{-\tau};$$

$$y(0+) = -5 + 7 = 2, \quad y'(0+) = 20 - 21 = -1.$$

■

A2.17 Sprungantworten

Die Sprungantwort eines Systems n -ter Ordnung lässt sich als Lösung der System-Differentialgleichung zur Eingangsfunktion $u(\tau) = \varepsilon(\tau)$ mit den Anfangsbedingungen

$$y(0-) = 0, \quad y'(0-) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(0-) = 0$$

bestimmen.

Alle fünf Systeme besitzen die beiden Pole $p_{1,2} = -2 \pm j$ und damit die homogene Lösung

$$y_h(\tau) = e^{-2\tau} [a_1 \cos(\tau) + a_2 \sin(\tau)],$$

$$y'_h(\tau) = e^{-2\tau} [(-2a_1 + a_2) \cos(\tau) - (a_1 + 2a_2) \sin(\tau)].$$

(i) $y'' + 4y' + 5y = u \implies [y] = 0, [y'] = 0;$
 $y_p(\tau) = G(0) = 0, 2;$
 $\left. \begin{array}{l} y(0+) = a_1 + 0, 2 = 0, \\ y'(0+) = -2a_1 + a_2 = 0 \end{array} \right\} a_1 = -0, 2, \quad a_2 = -0, 4;$

$$h(\tau) = 0, 2 \{ 1 - e^{-2\tau} [\cos(\tau) + 2 \sin(\tau)] \} \varepsilon(\tau).$$

(ii) $y'' + 4y' + 5y = u' + u \implies [y] = 0, [y'] = [u] = 1;$
 $y_p(\tau) = G(0) = 0, 2;$
 $\left. \begin{array}{l} y(0+) = a_1 + 0, 2 = 0, \\ y'(0+) = -2a_1 + a_2 = 1 \end{array} \right\} a_1 = -0, 2, \quad a_2 = 0, 6;$

$$h(\tau) = 0, 2 \{ 1 - e^{-2\tau} [\cos(\tau) - 3 \sin(\tau)] \} \varepsilon(\tau).$$

(iii) $y'' + 4y' + 5y = u' - u \implies [y] = 0, [y'] = [u] = 1;$
 $y_p(\tau) = G(0) = -0, 2;$
 $\left. \begin{array}{l} y(0+) = a_1 - 0, 2 = 0, \\ y'(0+) = -2a_1 + a_2 = 1 \end{array} \right\} a_1 = 0, 2, \quad a_2 = 1, 4;$

$$h(\tau) = 0, 2 \{ -1 + e^{-2\tau} [\cos(\tau) + 7 \sin(\tau)] \} \varepsilon(\tau).$$

(iv) $y'' + 4y' + 5y = u'' + 3u' + 2u \implies [y] = [u] = 1, [y'] + 4[y] = [u'] + 3[u] = 3;$
 $y_p(\tau) = G(0) = 0, 4;$
 $\left. \begin{array}{l} y(0+) = a_1 + 0, 4 = 1, \\ y'(0+) = -2a_1 + a_2 = -1 \end{array} \right\} a_1 = 0, 6, \quad a_2 = 0, 2;$

$$h(\tau) = 0, 2 \{ 2 + e^{-2\tau} [3 \cos(\tau) + \sin(\tau)] \} \varepsilon(\tau).$$

(v) $y'' + 4y' + 5y = u'' + u' - 2u \implies [y] = [u] = 1, [y'] + 4[y] = [u'] + [u] = 1;$
 $y_p(\tau) = G(0) = -0, 4;$
 $\left. \begin{array}{l} y(0+) = a_1 - 0, 4 = 1, \\ y'(0+) = -2a_1 + a_2 = -3 \end{array} \right\} a_1 = 1, 4, \quad a_2 = -0, 2;$

$$h(\tau) = 0, 2 \{ -2 + e^{-2\tau} [7 \cos(\tau) - \sin(\tau)] \} \varepsilon(\tau).$$

■

A2.18 Stoßantworten

Die Stoßantworten $g(\tau)$ lassen sich aus den Sprungantworten $h(\tau)$ gemäß

$$g(\tau) = h'(\tau) = \{h'(\tau)\} \varepsilon(\tau) + h(0+)\delta(\tau)$$

berechnen.

$$(i) \quad g(\tau) = 0,2 \{2e^{-2\tau} [\cos(\tau) + 2 \sin(\tau)] - e^{-2\tau} [-\sin(\tau) + 2 \cos(\tau)]\} \varepsilon(\tau) + 0 \cdot \delta(\tau),$$

$$\boxed{g(\tau) = e^{-2\tau} \sin(\tau) \varepsilon(\tau), \quad g(0+) = 0.}$$

$$(ii) \quad g(\tau) = 0,2 \{2e^{-2\tau} [\cos(\tau) - 3 \sin(\tau)] - e^{-2\tau} [-\sin(\tau) - 3 \cos(\tau)]\} \varepsilon(\tau) + 0 \cdot \delta(\tau),$$

$$\boxed{g(\tau) = e^{-2\tau} [\cos(\tau) - \sin(\tau)] \varepsilon(\tau), \quad g(0+) = 1.}$$

$$(iii) \quad g(\tau) = 0,2 \{-2e^{-2\tau} [\cos(\tau) + 7 \sin(\tau)] + e^{-2\tau} [-\sin(\tau) + 7 \cos(\tau)]\} \varepsilon(\tau) + 0 \cdot \delta(\tau),$$

$$\boxed{g(\tau) = e^{-2\tau} [\cos(\tau) - 3 \sin(\tau)] \varepsilon(\tau), \quad g(0+) = 1.}$$

$$(iv) \quad g(\tau) = 0,2 \{-2e^{-2\tau} [3 \cos(\tau) + \sin(\tau)] + e^{-2\tau} [-3 \sin(\tau) + \cos(\tau)]\} \varepsilon(\tau) + 1 \cdot \delta(\tau),$$

$$\boxed{g(\tau) = -e^{-2\tau} [\cos(\tau) + \sin(\tau)] \varepsilon(\tau) + \delta(\tau), \quad g(0+) = -1.}$$

$$(v) \quad g(\tau) = 0,2 \{-2e^{-2\tau} [7 \cos(\tau) - \sin(\tau)] + e^{-2\tau} [-7 \sin(\tau) - \cos(\tau)]\} \varepsilon(\tau) + 1 \cdot \delta(\tau),$$

$$\boxed{g(\tau) = -e^{-2\tau} [3 \cos(\tau) + \sin(\tau)] \varepsilon(\tau) + \delta(\tau), \quad g(0+) = -3.}$$

Für die Systeme (zweiter Ordnung) mit Nullstelle ist $g(0+) \neq 0$. ■

A2.19 Rechteckimpuls an $R - C$ -Glied

Die Sprungantwort lässt sich ohne Weiteres anschreiben:

$$h(t) = e^{-t/T_B} \varepsilon(t), \quad T_B = RC = 12 \mu\text{s}.$$

Bedeutet t_0 die Impulsdauer, so erhalten wir daraus für die Leerlauf-Ausgangsspannung $u_A(t)$

$$u_A(t)/\hat{u} = e^{-t/T_B} \varepsilon(t) - e^{-(t-t_0)/T_B} \varepsilon(t - t_0), \quad t_0 = 1 \mu\text{s},$$

dargestellt in Abb.A2.19b.

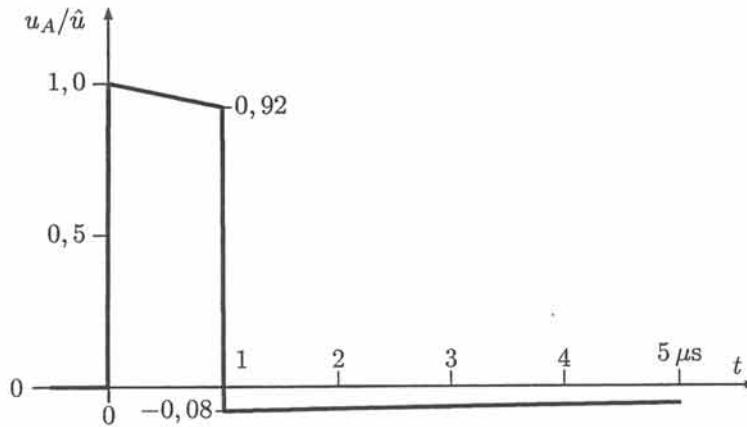


Abb.A2.19b

A2.20 Rechteckimpuls als Dirac-Stoß

(i) Mit Bezug auf Abb.A2.20c gilt

$$\left. \begin{aligned} i_1 - i_2 &= C \frac{du_C}{dt} = \frac{u_1}{R} - i_2, \\ u_C &= u_0 - u_1 = Ri_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} RC \frac{du_C}{dt} &= 2u_1 - u_0, \\ RC \left(\frac{du_0}{dt} - \frac{du_1}{dt} \right) &= 2u_1 - u_0, \end{aligned}$$

also

$$RC \frac{du_1}{dt} + 2u_1 = RC \frac{du_0}{dt} + u_0$$

oder, mit $y = u_1/U_{AB}$, $u = u_0/U_{EB}$, $\tau = t/T_B$,

$$y' + a_0 y = b_1 u' + b_0 u,$$

wobei

$$a_0 = \frac{2T_B}{RC}, \quad b_1 = \frac{U_{EB}}{U_{AB}}, \quad b_0 = \frac{U_{EB}}{U_{AB}} \frac{T_B}{RC}.$$

(ii) In Originalvariablen besitzt der Dirac-Stoß $\delta(t)$ die physikalische Dimension $(\text{Zeit})^{-1}$.

$$\begin{aligned} u_0(t) &= U_0 t_0 \delta(t), \quad \delta(t) = \delta(T_B \tau) = \delta(\tau)/T_B \\ \implies u(\tau) &= \frac{U_0 t_0}{U_{EB} T_B} \delta(\tau). \end{aligned}$$

(iii) Beispielsweise nimmt die System-Differentialgleichung mit

$$T_B = RC/2 \quad \text{und} \quad U_{AB} = U_{EB} = U_0 t_0 / T_B$$

die einfache Form

$$y' + y = u' + \frac{1}{2}u, \quad u(\tau) = \delta(\tau)$$

an.

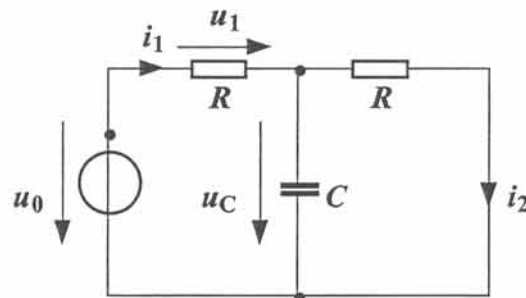


Abb. A2.20c

A2.21 Einschalten eines Relais

Mit den Bezeichnungen aus Abb. A2.21a,b liefern die Kirchhoff-Regeln zusammen mit den Elementgleichungen

$$U_0 = u_C + R_L i + L \frac{di}{dt} \quad (1), \quad i = \frac{u_C}{R_C} + C \frac{du_C}{dt} \quad (2).$$

u_C aus (1) in (2) eingesetzt gibt

$$i = \frac{1}{R_C} \left(U_0 - R_L i - L \frac{di}{dt} \right) + C \left(-R_L \frac{di}{dt} - L \frac{d^2 i}{dt^2} \right),$$

d.h. die *Differentialgleichung*

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(R_L C + \frac{L}{R_C} \right) \frac{di}{dt} + \left(1 + \frac{R_L}{R_C} \right) i = \frac{U_0}{R_C}.$$

Die zugehörigen *Anfangsbedingungen* sind

$$i(0) = 0$$

und, aus (1) mit $u_C(0) = 0$,

$$\frac{d}{dt} i(0) = \frac{U_0}{L}.$$

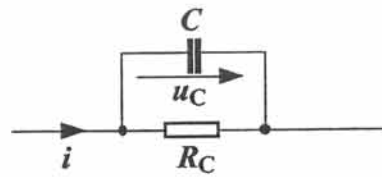


Abb.A2.21b

A2.22 Induktive Rückkopplung

(i) Mit den Strömen aus Abb.A2.22b folgt aus den beiden Maschengleichungen

$$u_A = R_1 i_1 + M n \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}, \quad (1)$$

$$u_E = R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} + \frac{M}{n} \frac{di_2}{dt} \quad (2)$$

nach Multiplikation von (2) mit n die Beziehung

$$i_1 = \frac{1}{R_1} (R_2 n i_2 + u_A - n u_E).$$

Rückeinsetzen in (2) liefert die Gleichung

$$u_E = R_2 i_2 + \frac{M}{R_1} \left(R_2 n \frac{di_2}{dt} + \frac{du_A}{dt} - n \frac{du_E}{dt} \right) + \frac{M}{n} \frac{di_2}{dt},$$

aus der sich i_2 mit Hilfe von $i_2 = -C du_E / dt$ eliminieren lässt,

$$u_E = -R_2 C \frac{du_E}{dt} + \frac{M}{R_1} \left(-R_2 C n \frac{d^2 u_E}{dt^2} + \frac{du_A}{dt} - n \frac{du_E}{dt} \right) - \frac{M}{n} C \frac{d^2 u_E}{dt^2}.$$

Multiplikation mit V ergibt wegen $u_A = V u_E$ schließlich die gesuchte Differentialgleichung

$$\frac{MC}{n} \left(1 + n^2 \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{d^2 u_A}{dt^2} + \left[R_2 C + \frac{M}{R_1} (n - V) \right] \frac{du_A}{dt} + u_A = 0.$$

Ein Vergleich mit der Normalform

$$\frac{d^2 u_A}{dt^2} + 2\vartheta \omega_0 \frac{du_A}{dt} + \omega_0^2 u_A = 0$$

zeigt:

(ii) Eine stationäre Schwingung setzt $\vartheta = 0$ voraus, d.h.

$$R_2 C + \frac{M}{R_1} (n - V) = 0 \implies V = n + R_1 R_2 \frac{C}{M}.$$

(iii) Dazu gehört die Frequenz

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n}{MC(1 + n^2 R_2 / R_1)}}.$$

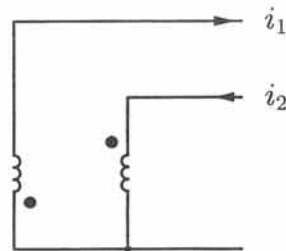


Abb.A2.22b

A2.23 Schwingungserzeuger

- (i) Unter Beachtung der Eigenschaften idealer Operationsverstärker und von Abb.A2.23b gilt

$$\begin{aligned} \frac{U_E}{R} + \frac{U_A}{R} + \frac{U_1}{R_1} &= 0 & \frac{U_1 + \frac{R}{R_2}U_A}{R + \frac{1}{j\omega C}} + j\omega C \frac{R}{R_2}U_A + \frac{U_A}{R_2} &= 0 \\ U_E &= -U_A - \frac{R}{R_1}U_1, & -U_1 &= \frac{R}{R_2} \left(3 + j\omega RC + \frac{1}{j\omega RC} \right) U_A, \\ \frac{U_E}{U_A} &= -1 + \frac{R^2}{R_1 R_2} \left(3 + j\omega RC + \frac{1}{j\omega RC} \right). \end{aligned}$$

Mit der bezogenen Kreisfrequenz $\nu = \omega RC$ und $j\nu \mapsto s$ folgt daraus

$$\frac{1}{G(s)} = -1 + \frac{R^2}{R_1 R_2} \left(3 + s + \frac{1}{s} \right) = \frac{R^2}{R_1 R_2} \frac{1}{s} \left[s^2 + \left(3 - \frac{R_1 R_2}{R^2} \right) s + 1 \right],$$

d.h. die gesuchte Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = \frac{R_1 R_2}{R^2} \cdot \frac{s}{s^2 + \left(3 - \frac{R_1 R_2}{R^2} \right) s + 1}.$$

- (ii) Eine ungedämpfte Schwingung stellt sich für

$$R_1 R_2 = 3R^2$$

ein. Aus $s^2 + 1 = 0$ folgt dann die bezogene Kreisfrequenz $\nu = 1$, also die Frequenz

$$f = \frac{1}{2\pi RC}.$$

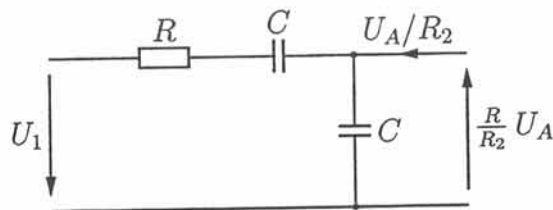


Abb.A2.23b

A2.24 Schalten induktiv gekoppelter Kreise

(i) Aus den beiden Maschengleichungen

$$U_q = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} - \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2}{dt} = R_1 i_1 + \sqrt{L_1} \frac{d}{dt} (\sqrt{L_1} i_1 - \sqrt{L_2} i_2), \quad (1)$$

$$0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} - \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 - \sqrt{L_2} \frac{d}{dt} (\sqrt{L_1} i_1 - \sqrt{L_2} i_2), \quad (2)$$

ergibt sich

$$U_q = R_1 i_1 + R_2 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} i_2 \quad (3)$$

und, nach Rückeinsetzen in (2), mit $U_q = \text{const}$ die Differentialgleichung

$$T_1 \frac{di_2}{dt} + i_2 = 0, \quad T_1 = \frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}. \quad (4)$$

Die Stetigkeit $W(0+) = W(0-) = 0$ (Stromfreiheit bei $t = 0-$) erfordert $\sqrt{L_1} i_1(0+) = \sqrt{L_2} i_2(0+)$, mit (3) für $U_q = U_0$ also

$$i_2(0+) = i_{20} = \frac{U_0}{R_1 \sqrt{L_2/L_1} + R_2 \sqrt{L_1/L_2}}. \quad (5)$$

Als Lösung der Differentialgleichung (4) mit der Anfangsbedingung (5) erhalten wir

$$t > 0: \quad i_2(t) = i_{20} e^{-t/T_1}, \quad i_{20} = 2,5 \text{ A}, \quad T_1 = 40 \text{ ms},$$

skizziert in Abb.A2.24b.

(ii) Lange nach dem Einschalten ist

$$i_1(\infty) = i_{1\infty} = U_0/R_1, \quad i_2(\infty) = i_{2\infty} = 0.$$

Wir verlegen $t = 0$ in den neuen Schaltzeitpunkt. Die Stetigkeit von W erfordert dann

$$\sqrt{L_1} i_1(0+) - \sqrt{L_2} i_2(0+) = \sqrt{L_1} U_0/R_1,$$

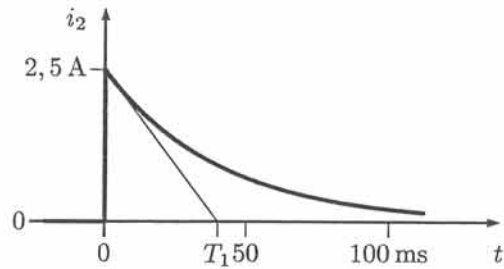


Abb.A2.24b

wegen $i_1(0+) = 0$ also die Anfangsbedingung

$$i_2(0+) = i_{20} = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \frac{U_0}{R_1}.$$

Die Differentialgleichung für $i_2(t)$ folgt direkt aus der sekundären Maschengleichung mit $i_1(t) = 0$,

$$T_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 = 0, \quad T_2 = \frac{L_2}{R_2}.$$

Ihre Lösung

$$i_2(t) = i_{20} e^{-t/T_2}, \quad i_{20} = -10 \text{ A}, \quad T_2 = 10 \text{ ms},$$

ist in Abb.A2.24c dargestellt.

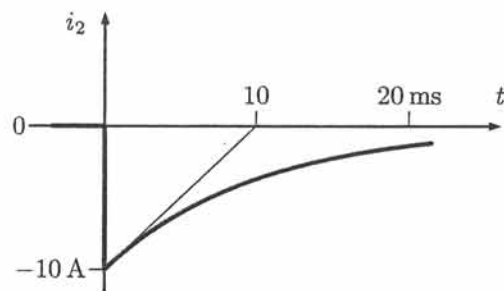


Abb.A2.24c

A2.25 Hochsetzsteller

(i) $0 \leq t < aT$, S geschlossen: $U_0 = L \frac{di}{dt} \implies$

$$i(t) = \frac{U_0}{L} t + K_1 = \frac{U_0}{R} \frac{t}{T_1} + K_1 \quad \text{mit} \quad T_1 = \frac{L}{R}.$$

$$aT \leq t < T, \quad \text{S offen: } U_0 = Ri + L \frac{di}{dt} \implies$$

$$i(t) = \frac{U_0}{R} + K_2 e^{-t/T_1}.$$

$$\left. \begin{aligned} i(0) = i(T) : \quad K_1 &= \frac{U_0}{R} + K_2 e^{-T/T_1}, \\ i(aT^-) = i(aT^+) : \quad \frac{U_0}{R} \frac{aT}{T_1} + K_1 &= \frac{U_0}{R} + K_2 e^{-aT/T_1} \end{aligned} \right\} \implies$$

$$K_1 = \frac{U_0}{R} [1 + f(a)], \quad K_2 = \frac{U_0}{R} f(a) e^{T/T_1}$$

mit

$$f(a) = \frac{aT/T_1}{e^{(1-a)T/T_1} - 1} \geq 0.$$

Der gesuchte Stromverlauf ist daher

$$0 \leq t < aT : \quad i(t) = \frac{U_0}{R} [1 + f(a) + t/T_1],$$

$$aT \leq t < T : \quad i(t) = \frac{U_0}{R} [1 + f(a) e^{(T-t)/T_1}],$$

T -periodisch fortgesetzt.

(ii) Der Spannungsverlauf am Lastwiderstand lässt sich sofort angeben.

$$\begin{aligned} 0 \leq t < aT : \quad u_R(t) &= 0, \\ aT \leq t < T : \quad u_R(t) &= Ri(t) = U_0 [1 + f(a) e^{(T-t)/T_1}] \geq U_0. \end{aligned}$$

(iii) Daraus folgt für den Durchschnittswert

$$\overline{u_R} = \frac{1}{T} \int_0^T u_R(t) dt = \frac{U_0}{T} \int_{aT}^T [1 + f(a) e^{(T-t)/T_1}] dt = U_0.$$

■

A2.26 Gleichstromglied

(i) Der Strom $i(t)$ muss für $t > 0$ der Differentialgleichung und der Anfangsbedingung

$$L \frac{di}{dt} + Ri = u_0 = U_0 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u), \quad i(0) = 0,$$

genügen. Wir führen bezogene Größen

$$\tau = \omega t, \quad y = i/(I_0 \sqrt{2})$$

mit

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} = \frac{U_0}{\omega L} \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad a = \frac{R}{\omega L}$$

ein und erhalten

$$\boxed{y' + ay = \sqrt{1 + a^2} \cos(\tau + \varphi_u), \quad y(0) = 0.}$$

Die partikuläre (= eingeschwungene) Lösung folgt mit der Übertragungsfunktion und dem Eingang

$$G(s) = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{s + a}, \quad u(\tau) = \operatorname{Re} [e^{j\varphi_u} e^{j\tau}],$$

$$y_{st}(\tau) = \operatorname{Re} [G(j)e^{j\varphi_u} e^{j\tau}] = |G(j)| \cos(\tau + \varphi_u + \varphi_G), \quad \varphi_G = \operatorname{arc} [G(j)],$$

wegen $|G(j)| = 1$ zu

$$y_{st}(\tau) = \cos(\tau + \varphi_u + \varphi_G), \quad \varphi_G = -\arctan(1/a) = -\operatorname{arccot}(a).$$

Dieser ist die homogene Lösung

$$y_h(\tau) = c e^{-a\tau}$$

zu überlagern. Insgesamt ergibt sich nach Anpassung an $y(0) = 0$ der Verlauf des bezogenen Stroms

$$\boxed{y(\tau) = \cos(\tau + \varphi_u + \varphi_G) - e^{-a\tau} \cos(\varphi_u + \varphi_G), \quad \tau \geq 0,}$$

wobei der letzte Term das abklingende „Gleichstromglied“ darstellt.

Liegt der Einschaltzeitpunkt so, dass $\varphi_u + \varphi_G = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \dots$ gilt, d.h. wird bei den Spannungswerten

$$u_0(0) = \pm U_0 \sqrt{2} \sin(-\varphi_G) = \pm U_0 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + a^2}}$$

eingeschaltet, so tritt keine Verlagerung auf: Es stellt sich sofort die stationäre Stromschwingung ein. Für $R^2 \ll (\omega L)^2$ bedeutet dies das Einschalten im „Spannungsmaximum“.

Dagegen ist die Anfangsverlagerung am größten – nämlich um die Amplitude der stationären Schwingung – wenn $\varphi_u + \varphi_G = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$ gilt, wenn also bei Spannungswerten

$$u_0(0) = \pm U_0 \sqrt{2} \cos(\varphi_G) = \pm U_0 \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{1 + a^2}}$$

eingeschaltet wird. Für $R^2 \ll (\omega L)^2$ bedeutet dies das Einschalten im Spannungsnulldurchgang.

Für andere Schaltzeitpunkte liegt die Verlagerung zwischen diesen beiden Extremfällen.

- (ii) Für $a = 1/20$ und $\varphi_u + \varphi_G = 0$ entsprechend $\varphi_u = -\varphi_G = 1,521 = 87,14^\circ$ gilt

$$y(\tau) = \cos(\tau) - e^{-\tau/20},$$

dargestellt in Abb.A2.26b.

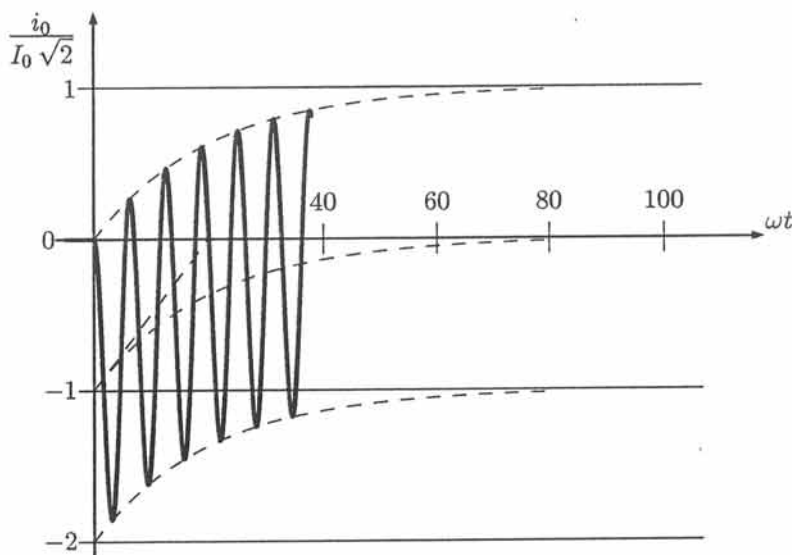


Abb.A2.26b

A2.27 Ausschalten eines leerlaufenden Transformators

- (i) Bei zunächst geschlossenem Schalter S stellt sich im eingeschwungenen Zustand wegen $u_0 \approx u = L di/dt$ der Magnetisierungsstrom

$$i(t) = \frac{U_N \sqrt{2}}{\omega_N L} \sin(\omega_N t + \varphi_u)$$

ein. Wird nun S bei $t = 0$ geöffnet, so ergibt sich für $t \geq 0$ aus $u = L di/dt$ und $i = -C du/dt$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = 0 \quad \text{mit} \quad \omega = 1/\sqrt{LC},$$

zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$u(0) = U_N \sqrt{2} \cos(\varphi_u),$$

$$\frac{d}{dt} u(0) = -\frac{1}{C} i(0) = -\frac{U_N \sqrt{2}}{\omega_N LC} \sin(\varphi_u) = -\frac{\omega^2}{\omega_N} U_N \sqrt{2} \sin(\varphi_u).$$

Die resultierende Lösung ist

$$t \geq 0: \quad u(t) = U_N \sqrt{2} \left[\cos(\varphi_u) \cos(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_N} \sin(\varphi_u) \sin(\omega t) \right].$$

- (ii) Wegen $\omega/\omega_N \gg 1$ ist die Amplitude dieser Sinusschwingung maximal für $\varphi_u = \pm\pi/2$, d.h. für das Ausschalten des Transformators bei einem Nulldurchgang der anliegenden Spannung bzw. bei einem Maximum des Magnetisierungsstroms. In diesem Fall gilt

$$u(t) = -U_N \sqrt{2} \frac{\omega}{\omega_N} \sin(\omega t)$$

und somit

$$\frac{\hat{u}}{U_N \sqrt{2}} = \frac{\omega}{\omega_N} \approx 10 \text{ bis } 20,$$

d.h. es findet eine Spannungsüberhöhung auf das 10- bis 20-fache der Betriebsspannung statt! Dies stellt eine erhebliche Beanspruchung für die Transformatorwicklung und den Schalter dar. ■

A2.28 Ausschalten eines generatornahen Kurzschlusses

- (i) Der Dauerkurzschlussstrom lässt sich als partikuläre Lösung der Gleichung

$$L \frac{di}{dt} = u_0(t) = U_0 \sqrt{2} \cos(\omega_N t)$$

sofort anschreiben:

$$i_D(t) = I_D \sqrt{2} \sin(\omega_N t), \quad I_D = \frac{U_0}{\omega_N L} = 40 \text{ kA}.$$

- (ii) Der Schalter wird bei $t = 0$ (Stromnulldurchgang) geöffnet. Aus

$$u_0 = L \frac{di}{dt} + u_S, \quad i = \frac{u_S}{R} + C \frac{du_S}{dt},$$

$$u_S(0) = u_C(0), \quad \frac{d}{dt} u_S(0) = \frac{i(0)}{C}$$

folgt dann die Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen

$$LC \frac{d^2 u_S}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du_S}{dt} + u_S = u_0; \quad u_S(0) = 0, \quad \frac{d}{dt} u_S(0) = 0$$

oder, in bezogener Form,

$$y'' + 2\vartheta\nu_0 y' + \nu_0^2 y = \nu_0^2 u, \quad u(\tau) = \cos(\tau);$$

$$\boxed{y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,}$$

wobei

$$\nu_0 = \frac{1}{\omega_N \sqrt{LC}} = 20, \quad \vartheta = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \nu_0 \frac{\omega_N L}{2R} = 0,2.$$

(iii) Mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{\nu_0^2}{s^2 + 2\vartheta\nu_0 s + \nu_0^2}$$

erhalten wir die stationäre Schwingung als partikuläre Lösung

$$y_{\text{st}}(\tau) = \operatorname{Re} [G(j)e^{j\tau}] = |G(j)| \cos(\tau + \varphi_G).$$

Unter Berücksichtigung von $\nu_0^2 \gg 1$ und $\vartheta^2 \ll 1$ gilt

$$|G(j)| = \frac{\nu_0^2}{\sqrt{(\nu_0^2 - 1)^2 + (2\vartheta\nu_0)^2}} \approx 1,$$

$$\varphi_G = -\arctan\left(\frac{2\vartheta\nu_0}{\nu_0^2 - 1}\right) \approx -\frac{2\vartheta}{\nu_0} \approx 0,$$

also

$$y_{\text{st}}(\tau) \approx u(\tau) = \cos(\tau).$$

Am offenen Schalter liegt nach dem Einschwingen demnach in guter Näherung die Generatorspannung.

(iv) Einsetzen von $y = x + y_{\text{st}}$ in die Differentialgleichung und die Anfangsbedingungen liefert

$$x'' + 2\vartheta\nu_0 x' + \nu_0^2 x = 0,$$

$$x(0) = -y_{\text{st}}(0) \approx -1, \quad x'(0) = -y'_{\text{st}}(0) \approx 0.$$

Unter Berücksichtigung von $\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \vartheta^2} \approx \nu_0$ erhalten wir daraus

$$x(\tau) \approx -e^{-\vartheta\nu_0\tau} [\cos(\nu_0\tau) + \vartheta \sin(\nu_0\tau)].$$

(v) Mit den bereits berechneten Werten $\nu_0 = 20$, $\vartheta = 0,2$ folgt schließlich für den Verlauf der bezogenen Spannung am Schalter

$$\frac{u_S}{U_0 \sqrt{2}} = y(\tau) \approx \cos(\tau) - e^{-4\tau} [\cos(20\tau) + 0,2 \sin(20\tau)],$$

dargestellt in Abb.A2.28b.

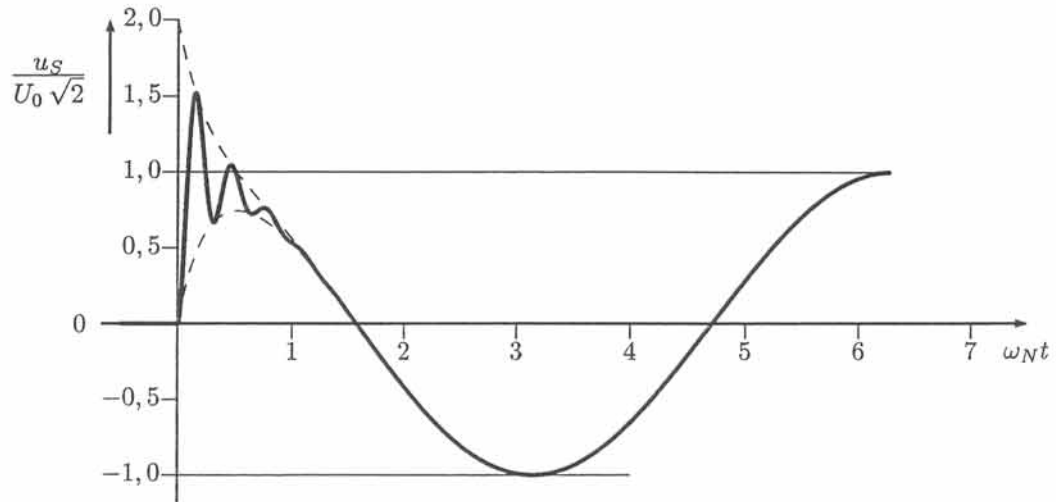


Abb.A2.28b

A2.29 PID-Glied

Die Analyse nach Abb.A2.29b liefert über

$$i = \frac{u_E}{R} + C \frac{du_E}{dt}, \quad u_A = -10Ri - u_C, \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

nach Elimination von u_C und i die Differentialgleichung

$$RC \frac{du_A}{dt} = -10(RC)^2 \frac{d^2 u_E}{dt^2} - 11RC \frac{du_E}{dt} - u_E,$$

die in bezogenen Variablen

$$\tau = \frac{t}{RC}, \quad y = \frac{u_A}{U_B}, \quad u = \frac{u_E}{U_B}$$

die Form

$$y' = -10u'' - 11u' - u$$

annimmt. Für die Sprungantwort haben wir

$$u(\tau) = \varepsilon(\tau), \quad y(0^-) = 0$$

zu setzen. Damit folgt durch direkte Integration die Sprungantwort

$$h(\tau) = -[10\delta(\tau) + 11\varepsilon(\tau) + \tau\varepsilon(\tau)],$$

skizziert in Abb.A2.29c.

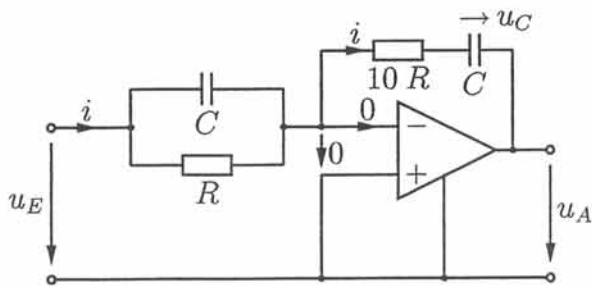


Abb. A2.29b

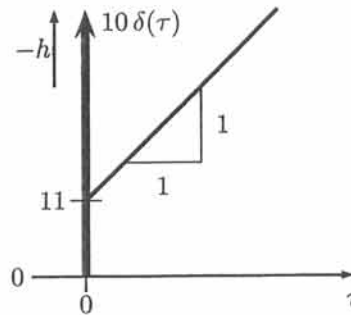


Abb. A2.29c

A2.30 Aktives Tiefpassfilter

Ein systematisches Vorgehen unter Verwendung der Bezeichnungen aus Abb. A2.30b führt über

$$\begin{aligned} i_3 &= C \frac{du_A}{dt}, & u_2 &= Ri_3 + u_A & \Rightarrow & u_2 = RC \frac{du_A}{dt} + u_A, \\ i_2 &= C \frac{du_2}{dt}, & u_1 &= Ri_2 + u_2 & \Rightarrow & u_1 = RC \frac{du_2}{dt} + u_2, \\ i_1 &= C \frac{du_1}{dt}, & u_E &= Ri_1 + u_1 & \Rightarrow & u_E = RC \frac{du_1}{dt} + u_1 \end{aligned}$$

auf die Differentialgleichung

$$(RC)^3 \frac{d^3 u_A}{dt^3} + 3(RC)^2 \frac{d^2 u_A}{dt^2} + 3(RC) \frac{du_A}{dt} + u_A = u_E,$$

oder, mit den bezogenen Variablen

$$\tau = \frac{t}{RC}, \quad y = \frac{u_A}{U_B}, \quad u = \frac{u_E}{U_B}$$

auf deren bezogene Form

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = u.$$

Zur Sprungantwort gehört

$$u(\tau) = \varepsilon(\tau), \quad y''(0-) = y'(0-) = y(0-) = 0,$$

wobei sich hier die Anfangsbedingungen ungeändert nach $0+$ übertragen,

$$y''(0+) = y'(0+) = y(0+) = 0.$$

Aus dem charakteristischen Polynom und der Übertragungsfunktion

$$P(s) = s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = (s+1)^3, \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

lesen wir die beiden Lösungskomponenten für $\tau \geq 0$,

$$y_p(\tau) = G(0) = 1, \quad y_h(\tau) = (c_1 + c_2\tau + c_3\tau^2)e^{-\tau}$$

ab. Anpassen an die Anfangsbedingungen führt auf die gesuchte Sprungantwort

$$h(\tau) = [1 - (1 + \tau + \frac{1}{2}\tau^2)e^{-\tau}] \varepsilon(\tau).$$

Ihren Verlauf zeigt Abb.A2.30c.

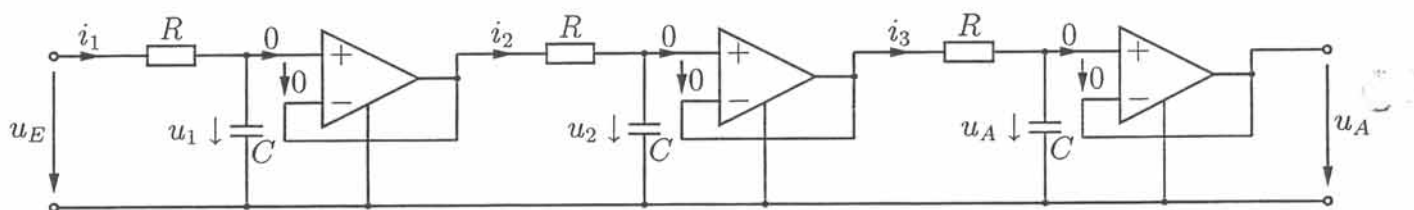


Abb.A2.30b

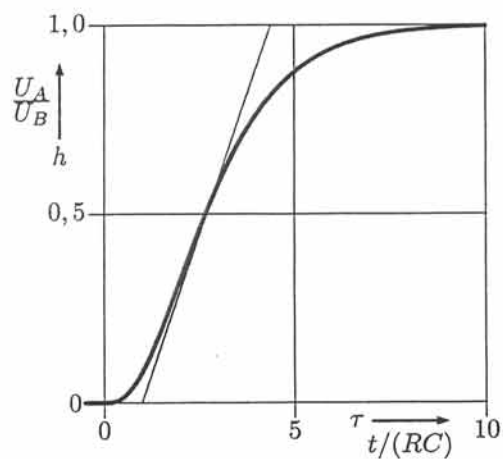


Abb.A2.30c

■

A3.1 Fourier-Transformation mit Tabelle

Direkt oder über Linearkombinationen entnehmen wir einer Fourier-Tabelle

(i)
$$X(j\nu) = \frac{2}{3 + j\nu},$$

(ii)
$$X(j\nu) = \frac{32}{64 + (2 + j\nu)^2} = \frac{32}{68 - \nu^2 + j4\nu},$$

(iii)
$$X(j\nu) = -3j\pi [\delta(\nu - 4) - \delta(\nu + 4)],$$

(iv)
$$X(j\nu) = \frac{2}{(3 + j\nu)^2} = \frac{2}{9 - \nu^2 + j6\nu},$$

(v)
$$X(j\nu) = \frac{5}{4 + j\nu} - \frac{3}{7 + j\nu} = \frac{23 + j2\nu}{(4 + j\nu)(7 + j\nu)},$$

(vi)
$$X(j\nu) = 5 + 4\pi\delta(\nu) + \frac{4}{j\nu}.$$

■

A3.2 Fourier-Rücktransformation mit Tabelle(i) Mit der Abkürzung $j\nu = s$ gilt

$$X(s) = \frac{5(s+1)}{s^2 + 2s + 17} = \frac{5(s+1)}{(s+1)^2 + 4^2},$$

also

$$X(j\nu) \bullet \rightarrow x(\tau) = 5e^{-\tau} \cos(4\tau)\varepsilon(\tau).$$

(ii) Wir setzen $2\omega/\omega_0 = \nu/2$, d.h.

$$\omega_B = \omega_0/4 = 1/T_B, \quad \tau = t/T_B.$$

Dann ist mit einem allgemeinen Spannungsbezugswert U_B

$$X(j\nu) = \frac{U(j\nu/T_B)}{U_B T_B} = \frac{\omega_0}{4U_B} U(j\nu\omega_0/4) = \frac{\omega_0}{U_B} \frac{5}{4} \text{Vs} \left[8 \frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2} + 1 \right].$$

Der Transformationstabelle entnehmen wir

$$\frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2} \bullet \rightarrow \text{rect}(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } |\tau| < 1/2, \\ 0 & \text{für } |\tau| > 1/2 \end{cases}$$

und $1 \bullet \rightarrow \delta(\tau)$, also

$$X(j\nu) \bullet \rightarrow x(\tau) = \frac{\omega_0}{U_B} \frac{5}{4} \text{Vs} [8 \text{rect}(\tau) + \delta(\tau)].$$

Schließlich erhalten wir in Originalvariablen über $u(t) = U_B x(t/T_B)$ den Ausdruck

$$u(t) = \omega_0 [10 \text{rect}(\omega_0 t/4) + 1, 25\delta(\omega_0 t/4)] \text{Vs}$$

für das Spannungssignal, skizziert in Abb.A3.2.

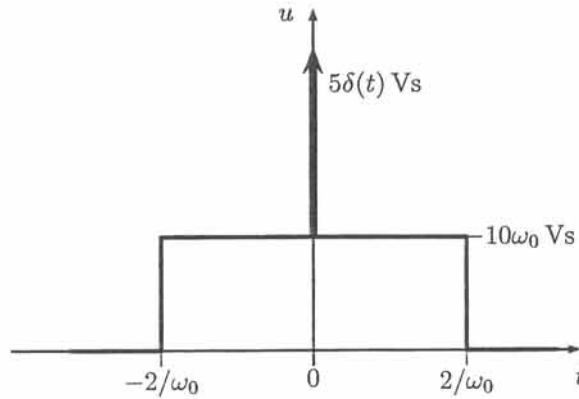


Abb.A3.2

A3.3 Grundlegende Eigenschaften

- (i) $x(\tau) = 8 \operatorname{rect}(\tau/10)$. Mit $\operatorname{rect}(\tau) \circ \bullet \operatorname{si}(\nu/2)$ und der Eigenschaft

$$x(a\tau) \circ \bullet X(j\nu/a)/|a| \quad (\text{Zeitdehnung, } a = 0, 1) \text{ folgt}$$

$$X(j\nu) = 80 \operatorname{si}(5\nu).$$

- (ii) Analog ergibt sich

$$x(\tau) = 8 \operatorname{rect}(\tau/20) \circ \bullet X(j\nu) = 160 \operatorname{si}(10\nu).$$

Die Verbreiterung des Rechteckimpulses bewirkt eine Verschmälerung des Spektrums.

- (iii) Das Signal ist gegenüber dem in (i) um $\tau_0 = -2$ (d.h. nach links) zeitverschoben,

$$x(\tau) = 8 \operatorname{rect}\left(\frac{\tau + 2}{10}\right) \circ \bullet X(j\nu) = 80 e^{j2\nu} \operatorname{si}(5\nu).$$

$$(iv) \quad x(\tau) = e^{2\tau_0} e^{-2\tau} \varepsilon(\tau) \circ \bullet X(j\nu) = \frac{e^{2\tau_0}}{2 + j\nu}.$$

$$(v) \quad x(\tau) = e^{-2\tau_0} e^{-2(\tau-\tau_0)} \varepsilon(\tau - \tau_0) \circ \bullet X(j\nu) = \frac{e^{-(2+j\nu)\tau_0}}{2 + j\nu}.$$

$$(vi) \quad x(\tau) = e^{-2(\tau-\tau_0)} \varepsilon(\tau - \tau_0) \circ \bullet X(j\nu) = \frac{e^{-j\nu\tau_0}}{2 + j\nu}.$$

$$(vii) \quad x(\tau) = e^8 e^{-2(\tau-1)} \varepsilon(\tau - 1) \circ \bullet X(j\nu) = \frac{e^{8-j\nu}}{2 + j\nu}.$$

(viii) Der Faltung im Zeitbereich korrespondiert die Multiplikation im Frequenzbereich,

$$\begin{aligned}x_1(\tau) = e^{-3\tau} \varepsilon(\tau) &\circ\bullet X_1(j\nu) = 1/(3 + j\nu), \\x_2(\tau) = e^{-8\tau} \varepsilon(\tau) &\circ\bullet X_2(j\nu) = 1/(8 + j\nu), \\x(\tau) = (x_1 * x_2)(\tau) &\circ\bullet X(j\nu) = X_1(j\nu)X_2(j\nu) = \frac{1}{(3 + j\nu)(8 + j\nu)}.\end{aligned}$$

■

A3.4 Faltungsintegral

Das Faltungsprodukt ist durch das Integral

$$x(\tau) = (x_1 * x_2)(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau - \tau')x_2(\tau')d\tau'$$

definiert, also

$$\begin{aligned}x(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3(\tau-\tau')} \varepsilon(\tau - \tau') e^{-8\tau'} \varepsilon(\tau') d\tau' = e^{-3\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-5\tau'} \varepsilon(\tau - \tau') \varepsilon(\tau') d\tau' \\&= e^{-3\tau} \varepsilon(\tau) \int_0^{\tau} e^{-5\tau'} d\tau' = \frac{1}{5} (e^{-3\tau} - e^{-8\tau}) \varepsilon(\tau).\end{aligned}$$

Ein Blick auf die Fourier-Tabelle zeigt

$$X(j\nu) = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3 + j\nu} - \frac{1}{8 + j\nu} \right) = \frac{1}{(3 + j\nu)(8 + j\nu)}.$$

■

A3.5 Faltungsprodukt

(i) Die direkte Auswertung erfolgt über das Faltungsintegral

$$\begin{aligned}x(\tau) = \text{rect}(\tau) * \text{rect}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(\tau') \text{rect}(\tau - \tau') d\tau' \\&= \int_{-1/2}^{1/2} \text{rect}(\tau - \tau') d\tau' = \int_{\tau-1/2}^{\tau+1/2} \text{rect}(\tau') d\tau',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau + 1/2 < -1/2, & \quad : \tau < -1 & : x(\tau) = 0, \\-1/2 < \tau + 1/2 < 1/2, & : -1 < \tau < 0 & : x(\tau) = \int_{-1/2}^{\tau+1/2} d\tau' = 1 + \tau, \\-1/2 < \tau - 1/2 < 1/2, & : 0 < \tau < 1 & : x(\tau) = \int_{\tau-1/2}^{1/2} d\tau' = 1 - \tau, \\\tau - 1/2 > 1/2, & \quad : \tau > 1 & : x(\tau) = 0.\end{aligned}$$

Die Faltung zweier Standard-Rechteckimpulse liefert demnach den Standard-Dreieckimpuls (Abb.A3.5a)

$$\text{rect}(\tau) * \text{rect}(\tau) = \text{tri}(\tau).$$

(ii) Aus $\text{rect}(\tau) \circ \bullet \frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2}$ folgt

$$x(\tau) = \text{rect}(\tau) * \text{rect}(\tau)$$

$$\circ \bullet X(j\nu) = \frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2} \frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2} = \frac{4}{\nu^2} \sin^2\left(\frac{\nu}{2}\right) = \frac{2}{\nu^2} [1 - \cos(\nu)],$$

mit der angegebenen Korrespondenz also ebenfalls $x(\tau) = \text{tri}(\tau)$.

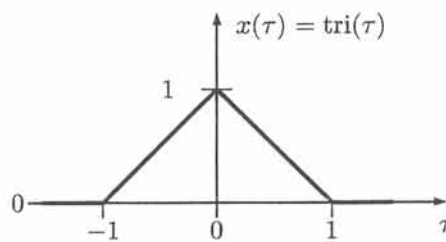


Abb.A3.5

A3.6 Vershobener Rechteckimpuls

Mit der Korrespondenz $\text{rect}(\tau) \circ \bullet \text{si}(\nu/2)$ und der Zeitverschiebung

$$x(\tau) = \text{rect}(\tau - \tau_0) \circ \bullet X(j\nu) = e^{-j\nu\tau_0} \text{si}(\nu/2)$$

erhalten wir

$$\text{Re}[X(j\nu)] = \cos(\nu\tau_0) \text{si}(\nu/2),$$

$$|X(j\nu)| = |\text{si}(\nu/2)|,$$

$$\text{arc}[X(j\nu)] = -\nu\tau_0.$$

(i) $\tau_0 = 0$:

$$\text{Re}[X(j\nu)] = X(j\nu) = \text{si}(\nu/2), \quad \text{Abb.A3.6a;}$$

$$|X(j\nu)| = |\text{si}(\nu/2)|, \quad \text{Abb.A3.6a;}$$

$$\text{arc}[X(j\nu)] = 0.$$

(ii) $\tau_0 = 0, 1$:

$$\text{Re}[X(j\nu)] = \cos(\nu/10) \text{si}(\nu/2), \quad \text{Abb.A3.6b;}$$

$$|X(j\nu)| = |\text{si}(\nu/2)|, \quad \text{Abb.A3.6a;}$$

$$\text{arc}[X(j\nu)] = -\nu/10, \quad \text{Abb.A3.6c.}$$

(iii) $\tau_0 = 10$:

$$\text{Re}[X(j\nu)] = \cos(10\nu) \text{si}(\nu/2), \quad \text{Abb.A3.6d;}$$

$$|X(j\nu)| = |\text{si}(\nu/2)|, \quad \text{Abb.A3.6a;}$$

$$\text{arc}[X(j\nu)] = -10\nu, \quad \text{Abb.A3.6e.}$$

Das Betragsspektrum wird durch die Zeitverschiebung nicht beeinflusst, wohl aber das Winkelspektrum.

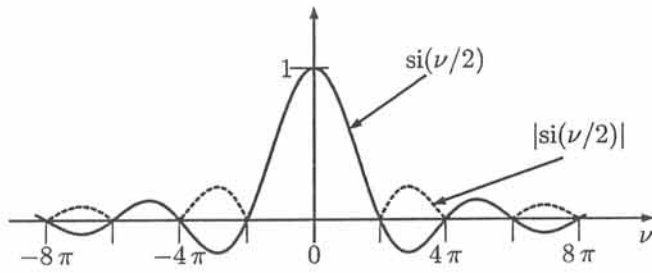


Abb.A3.6a

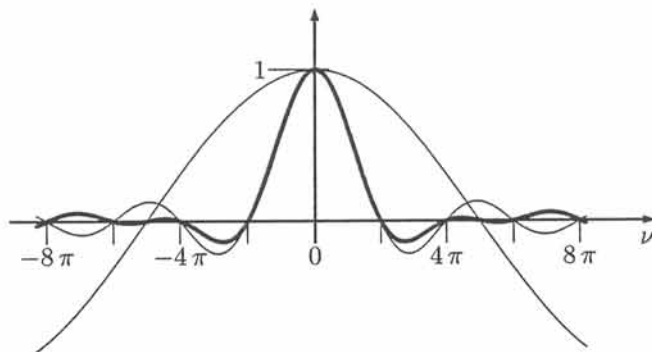


Abb.A3.6b

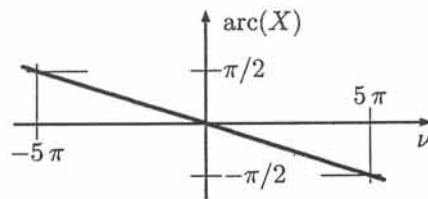


Abb.A3.6c

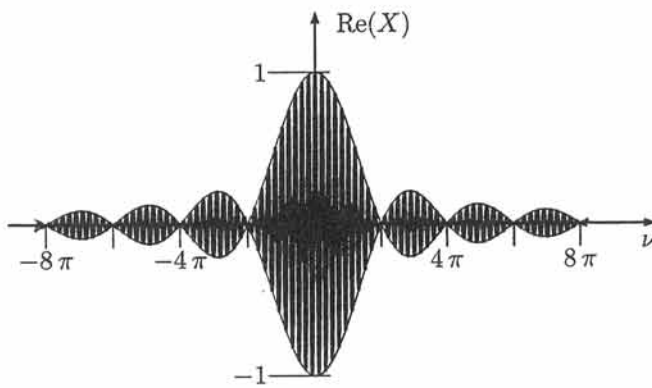


Abb.A3.6d

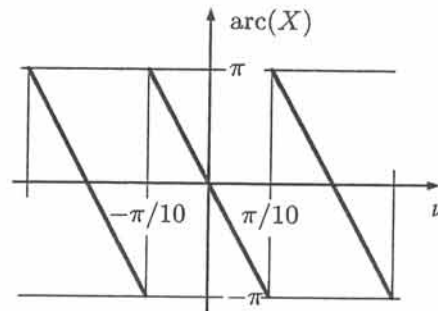


Abb.A3.6e

A3.7 Doppelsignale

Gilt $x(\tau) \circ \bullet X(j\nu)$, so ist

$$x(\tau + \tau_0) \circ \bullet e^{j\nu\tau_0} X(j\nu), \quad x(\tau - \tau_0) \circ \bullet e^{-j\nu\tau_0} X(j\nu)$$

und damit

$$x_D^+(\tau) = x(\tau + \tau_0) + x(\tau - \tau_0) \circ \bullet X_D^+(j\nu) = 2 \cos(\nu\tau_0) X(j\nu),$$

$$x_D^-(\tau) = x(\tau + \tau_0) - x(\tau - \tau_0) \circ \bullet X_D^-(j\nu) = j2 \sin(\nu\tau_0) X(j\nu).$$

Für $x(\tau) = \text{rect}(\tau) \circ \bullet X(j\nu) = \text{si}(\nu/2)$ und $\tau_0 = 1/2$ haben wir also speziell

$$X_D^+(j\nu) = 2 \cos(\nu/2) \text{si}(\nu/2), \quad \text{Abb.A3.7a,b,}$$

$$X_D^-(j\nu) = j2 \sin(\nu/2) \text{si}(\nu/2), \quad \text{Abb.A3.7c,d.}$$

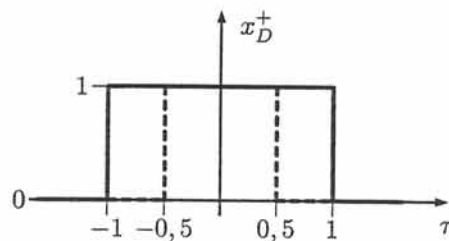


Abb.A3.7a

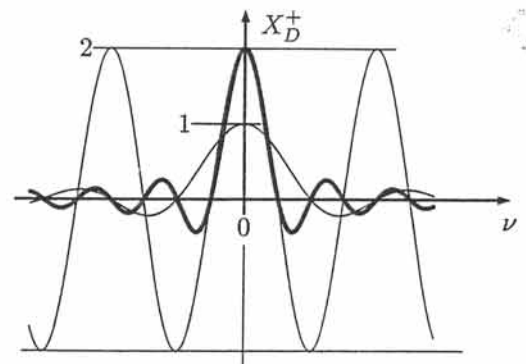


Abb.A3.7b

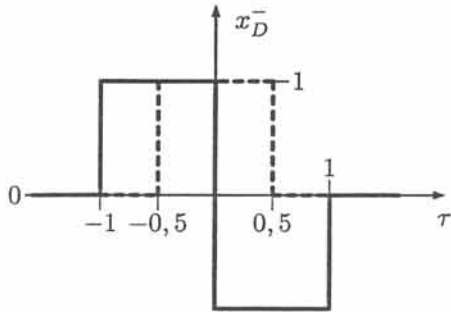


Abb.A3.7c

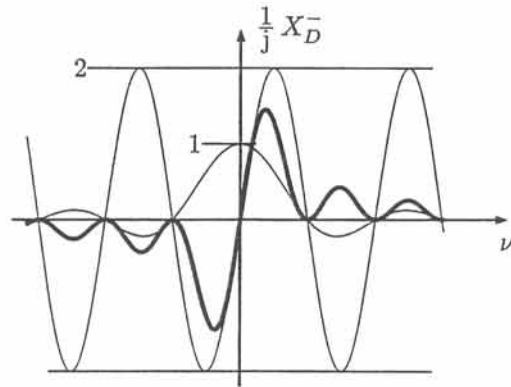


Abb.A3.7d

A3.8 Exponentialimpuls

- (i) Den Verlauf des ungeraden Teils $x_u(\tau) = [x(\tau) - x(-\tau)]/2$ zeigt Abb.A3.8a.
- (ii) Aus der Fourier-Transformierten des Exponentialimpulses

$$x(\tau) = \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau_1} e^{-\tau/\tau_1} \circ \bullet X(j\nu) = \frac{1}{1 + j\nu\tau_1}$$

lässt sich wegen $X_u(j\nu) = [X(j\nu) - X(-j\nu)]/2$ sofort das Spektrum des ungeraden Teils angeben,

$$X_u(j\nu) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + j\nu\tau_1} - \frac{1}{1 - j\nu\tau_1} \right] = -\frac{j\nu\tau_1}{1 + (\nu\tau_1)^2},$$

skizziert in Abb.A3.8b.

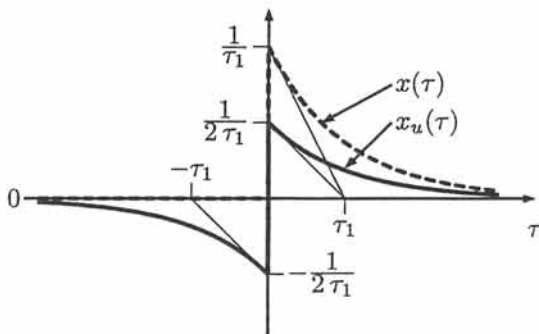


Abb.A3.8a

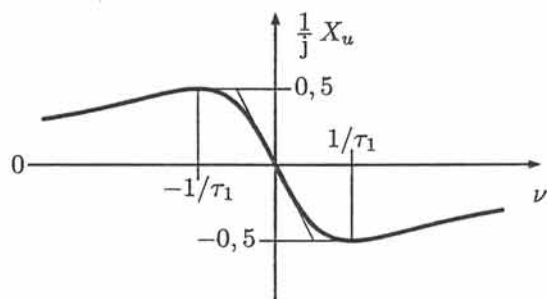


Abb.A3.8b

A3.9 Gauß-Signal

Für das Spektrum $X(j\nu)$ gerader Signale $x(\tau) = x_g(\tau)$ gilt

$$X(j\nu) = X_g(j\nu) = 2 \int_0^{\infty} x(\tau) \cos(\nu\tau) d\tau,$$

also

$$X(j\nu) = 2 \int_0^{\infty} e^{-\tau^2/2} \cos(\nu\tau) d\tau = \sqrt{2\pi} e^{-\nu^2/2}.$$

■

A3.10 Signum-Funktion

Offensichtlich ist

$$\operatorname{sgn}(\tau) = 2\varepsilon(\tau) - 1.$$

Wir erhalten dann, z.B. mit Hilfe einer Fourier-Tabelle,

$$2\varepsilon(\tau) - 1 \circ \bullet 2 \left[\pi\delta(\nu) + \frac{1}{j\nu} \right] - 2\pi\delta(\nu),$$

also

$$\operatorname{sgn}(\tau) \circ \bullet \frac{2}{j\nu}.$$

■

A3.11 Hilbert-Transformation

- (i) Aus der Definition des geraden und des ungeraden Teils folgt für eine rechtsseitige Funktion

$$\tau > 0: x_g = x_u; \quad \tau < 0: x_g = -x_u.$$

Genau diese Eigenschaft wird durch die angegebene Beziehung dargestellt.

- (ii) Ihre Fourier-Transformation ergibt wegen

$$\operatorname{sgn}(\tau) = 2\varepsilon(\tau) - 1 \circ \bullet 2 \left[\pi\delta(\nu) + \frac{1}{j\nu} \right] - 2\pi\delta(\nu) = \frac{2}{j\nu}$$

den Zusammenhang

$$X_g(j\nu) = \frac{1}{2\pi} X_u(j\nu) * \frac{2}{j\nu}$$

(Faltung im Frequenzbereich). Da für reelle, rechtsseitige Signale überdies

$$X'(\nu) = \operatorname{Re} [X(j\nu)] = X_g(j\nu), \quad jX''(\nu) = \operatorname{Im} [X(j\nu)] = X_u(j\nu)$$

gilt, folgt daraus die gesuchte Beziehung

$$X'(\nu) = X''(\nu) * \frac{1}{\pi\nu}, \text{ d.h. } X'(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X''(\lambda)}{\nu - \lambda} d\lambda.$$

Ausgehend von $x_u(\tau) = x_g(\tau) [2\varepsilon(\tau) - 1]$ können wir analog die Umkehrung

$$X''(\nu) = -X'(\nu) * \frac{1}{\pi\nu}, \text{ d.h. } X''(\nu) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X'(\lambda)}{\nu - \lambda} d\lambda$$

zeigen. ■

A3.12 Endliche Dirac-Stoßfolge

Aus $\delta(\tau) \circ \bullet 1$ erhalten wir nach Zeitverschiebung $\delta(\tau - k) \circ \bullet e^{-jk\nu}$, also

$$x(\tau) = \sum_{k=-K}^K \delta(\tau - k) \circ \bullet X(j\nu) = \sum_{k=-K}^K e^{-jk\nu} = 1 + \sum_{k=1}^K (e^{jk\nu} + e^{-jk\nu}),$$

und nach Summation das gesuchte Spektrum

$$X(j\nu) = 1 + 2 \sum_{k=1}^K \cos(k\nu) = \frac{\sin[(2K+1)\nu/2]}{\sin(\nu/2)}.$$

Speziell gilt

$$K = 1: X(j\nu) = 1 + 2 \cos(\nu) = \frac{\sin(3\nu/2)}{\sin(\nu/2)}, \text{ Abb.A3.12a;}$$

$$K = 10: X(j\nu) = \frac{\sin(21\nu/2)}{\sin(\nu/2)}, \text{ Abb.A3.12b.}$$

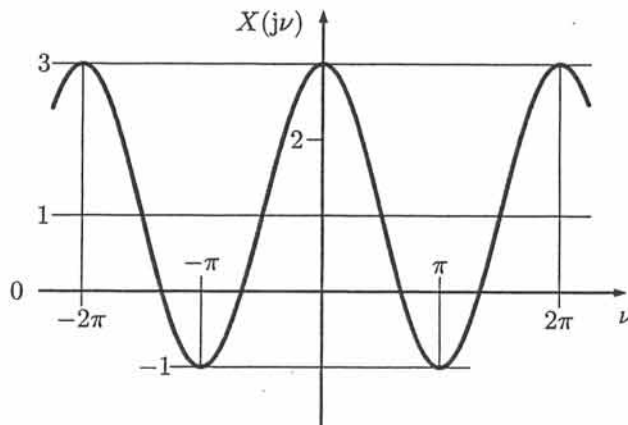


Abb.A3.12a

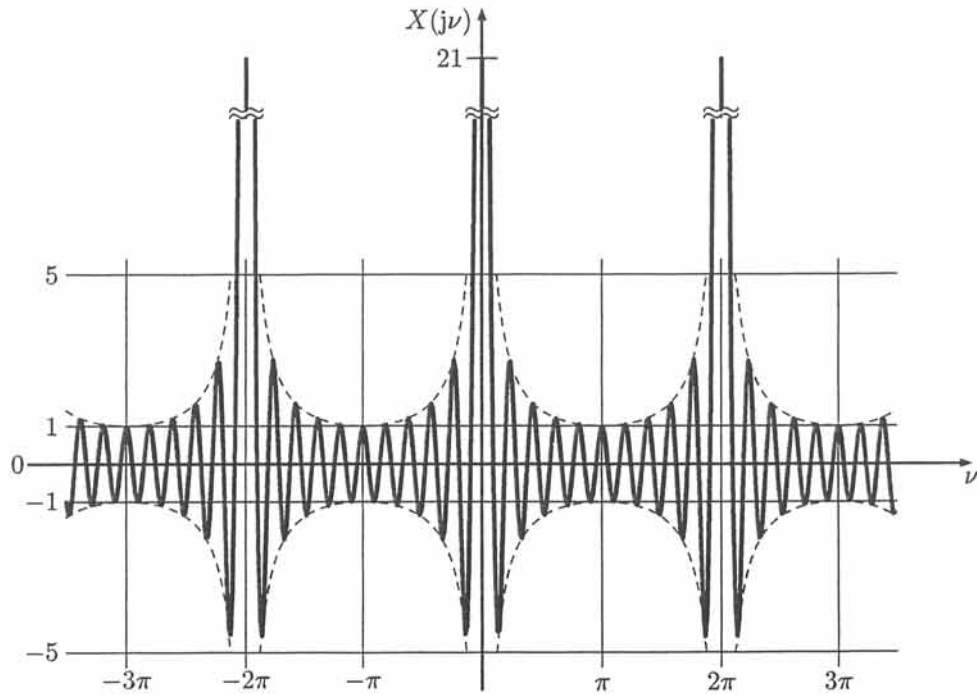


Abb.A3.12b

A3.13 Kurzzeitspektrum

Die Bildung des „Kurzzeitspektrums“ entspricht einer Zeitbegrenzung des Signals mit dem Fenster $\text{rect}(\tau/\tau_0)$, d.h.

$$x_{\tau_0}(\tau) = x(\tau) \text{rect}(\tau/\tau_0).$$

Wegen $\text{rect}(\tau/\tau_0) \circ \bullet \tau_0 \text{si}(\nu\tau_0/2)$ haben wir daher im Frequenzbereich

$$X_{\tau_0}(j\nu) = \frac{1}{2\pi} \left[\tau_0 \text{si} \left(\frac{\nu\tau_0}{2} \right) \right] * X(j\nu).$$

Im Speziellen gilt

$$x(\tau) = a \cos(\nu_1\tau) \circ \bullet X(j\nu) = a\pi [\delta(\nu - \nu_1) + \delta(\nu + \nu_1)],$$

nach der Faltung also

$$X_{\tau_0}(j\nu) = \frac{a\tau_0}{2} \{ \text{si}[(\nu - \nu_1)\tau_0/2] + \text{si}[(\nu + \nu_1)\tau_0/2] \}.$$

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\nu_1} : X_{\tau_0}(j\nu) = \frac{a\pi}{\nu_1} \{ \text{si}[(\nu/\nu_1 - 1)\pi] + \text{si}[(\nu/\nu_1 + 1)\pi] \}, \quad \text{Abb.A3.13a;}$$

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\nu_1} \cdot 40 : X_{\tau_0}(j\nu) = 40 \frac{a\pi}{\nu_1} \{ \text{si}[(\nu/\nu_1 - 1)40\pi] + \text{si}[(\nu/\nu_1 + 1)40\pi] \},$$

Abb.A3.13b;

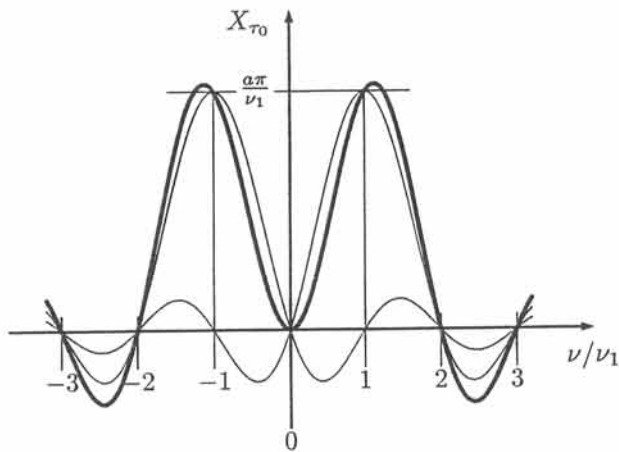


Abb.A3.13a

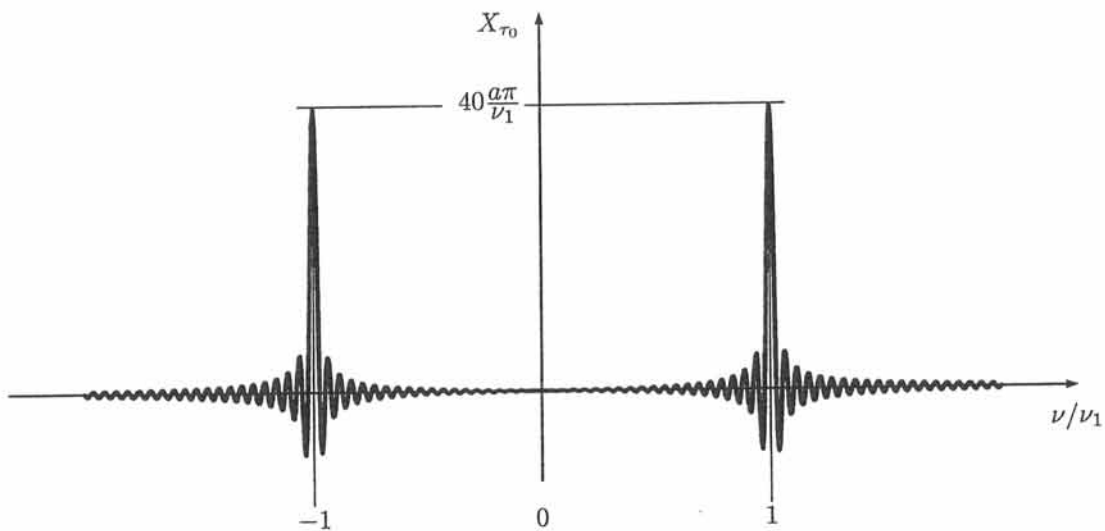


Abb.A3.13b

Ist die Fensterlänge groß gegenüber der Periodendauer, wird das ursprüngliche Spektrum gut wiedergegeben. ■

A3.14 Signal- und Spektralfläche

Die Transformationsgleichung

$$X(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\nu\tau} d\tau$$

liefert für $\nu = 0$:

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau.$$

Ebenso folgt aus

$$x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu) e^{j\nu\tau} d\nu$$

für $\tau = 0$:

$$2\pi x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu) d\nu,$$

vorausgesetzt, die Integrale existieren. ■

A3.15 Zeitbegrenzte Sinusschwingung

Wir berechnen das Spektrum direkt aus der Definitionsgleichung

$$X(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\nu\tau} d\tau$$

und erhalten mit $\nu_1 = 2\pi/\tau_1$

$$\begin{aligned} X(j\nu) &= \int_0^{n\tau_1} \sin(\nu_1\tau) e^{-j\nu\tau} d\tau = \frac{1}{2j} \int_0^{n\tau_1} [e^{j(\nu_1-\nu)\tau} - e^{-j(\nu_1+\nu)\tau}] d\tau \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{e^{j(\nu_1-\nu)\tau}}{j(\nu_1-\nu)} + \frac{e^{-j(\nu_1+\nu)\tau}}{j(\nu_1+\nu)} \right] \Big|_0^{n\tau_1} = -\frac{1}{2} \left[\frac{e^{-jn\nu\tau_1} - 1}{\nu_1 - \nu} + \frac{e^{-jn\nu\tau_1} - 1}{\nu_1 + \nu} \right], \end{aligned}$$

also

$$X(j\nu) = \frac{\nu_1}{\nu_1^2 - \nu^2} (1 - e^{-j2\pi n\nu/\nu_1}).$$

■

A3.16 Autokorrelation

(i) Mit der Definitionsgleichung der Autokorrelation

$$r_{xx}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau') x(\tau + \tau') d\tau'$$

erhalten wir

$$r_{xx}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\tau') + \delta(\tau' - \tau_1)] x(\tau + \tau') d\tau' = x(\tau) + x(\tau + \tau_1),$$

also

$$r_{xx}^E(\tau) = \delta(\tau + \tau_1) + 2\delta(\tau) + \delta(\tau - \tau_1), \quad \text{Abb.A3.16b.}$$

(ii) Obige Definitionsgleichung führt zusammen mit Abb.A3.16c auf

$$\begin{aligned}
 -\tau < -1 & : r_{xx}^E(\tau) = 0 \text{ (keine Überlappung),} \\
 -1 < -\tau < 0 & : r_{xx}^E(\tau) = \int_0^{-\tau+1} d\tau' = 1 - \tau, \\
 0 < -\tau < 1 & : r_{xx}^E(\tau) = \int_{-\tau}^1 d\tau' = 1 + \tau, \\
 1 < -\tau & : r_{xx}^E(\tau) = 0 \text{ (keine Überlappung).}
 \end{aligned}$$

Dies ist die Dreieckfunktion $r_{xx}^E(\tau) = \text{tri}(\tau)$ aus Abb.A3.16d.

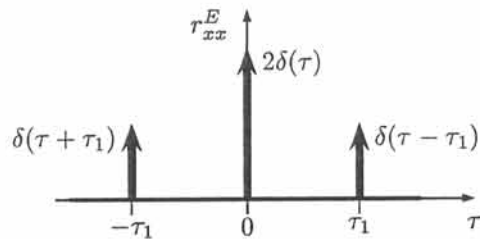


Abb.A3.16b

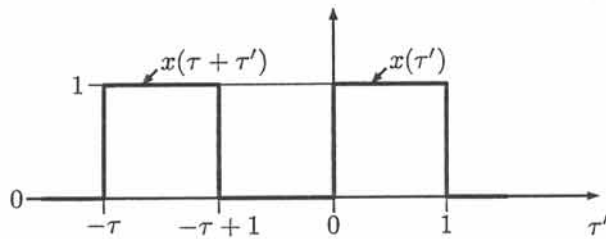


Abb.A3.16c

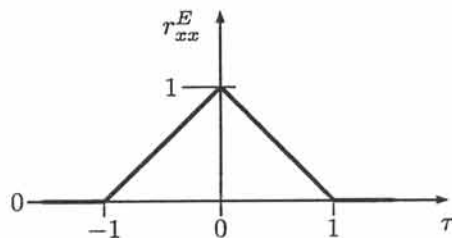


Abb.A3.16d

■

A3.17 Kreuzkorrelation

Aus den Definitionen

$$r_{12}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(\tau')x_2(\tau + \tau')d\tau', \quad r_{xx}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau')x(\tau + \tau')d\tau'$$

erhalten wir

$$r_{12}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau')x(\tau + \tau_0 + \tau')d\tau' = r_{xx}^E(\tau + \tau_0)$$

und

$$r_{21}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau' + \tau_0)x(\tau + \tau')d\tau', \quad \tau'' = \tau' + \tau_0,$$

$$r_{21}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau'')x(\tau - \tau_0 + \tau'')d\tau'' = r_{xx}^E(\tau - \tau_0).$$

■

A3.18 Schranke für die Korrelationsfunktion

Aus der Definition der Korrelation erhalten wir speziell für reelle Funktionen

$$r_{12}^E(\tau)^2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau')x_2(\tau + \tau')d\tau' \right]^2, \quad \text{Cauchy-Schwarz,}$$

$$\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau')x_1(\tau')d\tau' \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau + \tau')x_2(\tau + \tau')d\tau' \right],$$

also

$$r_{12}^E(\tau)^2 \leq r_{11}^E(0)r_{22}^E(0).$$

$r_{11}^E(0)$ und $r_{22}^E(0)$ entsprechen den Signalenergien der beiden Signale, die wir demnach als begrenzt voraussetzen müssen.

■

A3.19 Wigner-Verteilung

- (i) Die Definition der Wigner-Verteilung führt nach Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen einerseits auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\tau, \nu) d\nu &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau - \tau'/2)x(\tau + \tau'/2) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\nu\tau'} d\nu \right) d\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau - \tau'/2)x(\tau + \tau'/2)\delta(\tau')d\tau' \\ &= x^*(\tau)x(\tau) = |x(\tau)|^2, \end{aligned}$$

andererseits auf

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_x(\tau, \nu) d\tau &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\nu - j\nu'/2) X(j\nu + j\nu'/2) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\nu'\tau} d\tau \right) d\nu' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\nu - j\nu'/2) X(j\nu + j\nu'/2) \delta(\nu') d\nu' \\ &= \frac{1}{2\pi} |X(j\nu)|^2. \end{aligned}$$

(ii) Mit Hilfe von Abb.A3.19 sehen wir

$$\begin{aligned} \tau < -1/2 & : W_x(\tau, \nu) = 0 \text{ (keine Überlappung),} \\ -1/2 < \tau < 0 & : W_x(\tau, \nu) = \int_{-(1+2\tau)}^{1+2\tau} e^{-j\nu\tau'} d\tau' = \frac{2}{\nu} \sin[\nu(1+2\tau)], \\ 0 < \tau < 1/2 & : W_x(\tau, \nu) = \int_{-(1-2\tau)}^{1-2\tau} e^{-j\nu\tau'} d\tau' = \frac{2}{\nu} \sin[\nu(1-2\tau)], \\ \tau > 1/2 & : W_x(\tau, \nu) = 0 \text{ (keine Überlappung).} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis lässt sich geschlossen in der Form

$$W_x(\tau, \nu) = \frac{2}{\nu} \sin[\nu(1 - 2|\tau|)] \text{rect}(\tau)$$

schreiben.

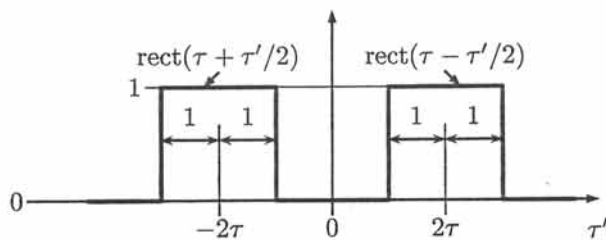


Abb.A3.19

A3.20 Ambiguity-Funktion

(i) Die Integraldarstellung von $A_x(\tau, \nu)$ im Zeitbereich bedeutet speziell für $\nu = 0$

$$\begin{aligned} A_x(\tau, 0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau' - \tau/2) x(\tau' + \tau/2) d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau') x(\tau' + \tau) d\tau' \\ &= x(\tau) \otimes x(\tau). \end{aligned}$$

Im Frequenzbereich haben wir analog

$$\begin{aligned} A_x(0, \nu) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\nu' - j\nu/2) X(j\nu' + j\nu/2) d\nu' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\nu') X(j\nu' + j\nu) d\nu' \\ &= \frac{1}{2\pi} X(j\nu) \otimes X(j\nu). \end{aligned}$$

(ii) Der Wert

$$A_x(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau') x(\tau') d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau$$

gibt die Signalenergie an.

(iii) Unter Verwendung von Abb.A3.20 gilt

$$\begin{aligned} \tau < -1 & : A_x(\tau, \nu) = 0 \text{ (keine Überlappung),} \\ -1 < \tau < 0 & : A_x(\tau, \nu) = \int_{-(1+\tau)/2}^{(1+\tau)/2} e^{-j\nu\tau'} d\tau' = \frac{2}{\nu} \sin[\nu(1+\tau)/2], \\ 0 < \tau < 1 & : A_x(\tau, \nu) = \int_{-(1-\tau)/2}^{(1-\tau)/2} e^{-j\nu\tau'} d\tau' = \frac{2}{\nu} \sin[\nu(1-\tau)/2], \\ \tau > 1 & : A_x(\tau, \nu) = 0 \text{ (keine Überlappung),} \end{aligned}$$

oder, in geschlossener Form,

$$A_x(\tau, \nu) = \frac{2}{\nu} \sin[\nu(1 - |\tau|)/2] \text{rect}(\tau/2).$$

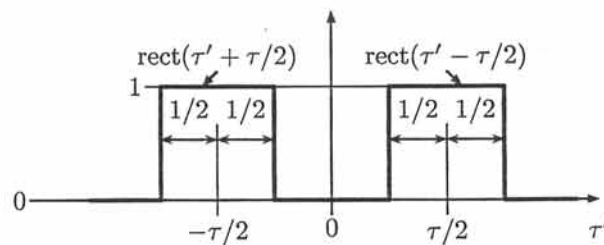


Abb.A3.20

A4.1 Stationäre Schwingungen Ist $G(s)$ die Übertragungsfunktion des Systems, so gehört zur Eingangsfunktion $u(\tau) = \cos(\nu\tau)$ die partikuläre Lösung

$$y_p(\tau) = \operatorname{Re} [G(j\nu)e^{j\nu\tau}] = |G(j\nu)| \cos[\nu\tau + \varphi_G(\nu)],$$

$$G(j\nu) = |G(j\nu)| e^{j\varphi_G(\nu)}.$$

Sie entspricht der stationären Ausgangsschwingung, wenn das System stabil ist, d.h. wenn die transienten Vorgänge abklingen.

Im vorliegenden Fall ist

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+0,4s+4}, \quad G(j\nu) = \frac{1+j\nu}{4-\nu^2+0,4j\nu}$$

und damit

$$(i) \quad \nu = 1, \quad G(j) = \frac{1+j}{3+j0,4} = 0,467 e^{j0,653},$$

$$y_{st}(\tau) = 0,467 \cos(\tau + 0,653).$$

$$(ii) \quad \nu = 2, \quad G(j2) = \frac{1+j2}{j0,8} = 2,795 e^{-j0,464},$$

$$y_{st}(\tau) = 2,795 \cos(2\tau - 0,464).$$

$$(iii) \quad \nu = 8, \quad G(j8) = \frac{1+j8}{-60+j3,2} = 0,134 e^{-j1,642},$$

$$y_{st}(\tau) = 0,134 \cos(8\tau - 1,642).$$

■

A4.2 Existenz eingeschwungener Zustände

Mit $\nu = 2$ berechnen wir

$$(i) \quad G(s) = \frac{s+0,1}{s^2+6s+5}, \quad G(j2) = \frac{0,1+j2}{1+j12} = 0,166 e^{j0,033},$$

$$\boxed{y_p(\tau) = 0,166 \cos(2\tau + 0,033)}.$$

$$q_1 = -0,1; \quad p_1 = -5; \quad p_2 = -1.$$

Das System ist stabil $\implies y_{st}(\tau) = y_p(\tau)$.

$$(ii) \quad G(s) = \frac{s-0,1}{s^2+6s+5}, \quad G(j2) = \frac{-0,1+j2}{1+j12} = 0,166 e^{j0,133},$$

$$\boxed{y_p(\tau) = 0,166 \cos(2\tau + 0,133)}.$$

$$q_1 = 0,1; \quad p_1 = -5; \quad p_2 = -1.$$

Das System ist stabil $\implies y_{st}(\tau) = y_p(\tau)$.

$$(iii) \quad G(s) = \frac{s + 0,1}{s^2 + 4s - 5}, \quad G(j2) = \frac{0,1 + j2}{-9 + j8} = 0,166 e^{-j0,894},$$

$$y_p(\tau) = 0,166 \cos(2\tau - 0,894).$$

$$q_1 = -0,1; \quad p_1 = -5; \quad p_2 = 1.$$

Das System ist instabil \implies kein eingeschwungener Zustand.

$$(iv) \quad G(s) = \frac{s - 0,1}{s^2 + 4s - 5}, \quad G(j2) = \frac{-0,1 + j2}{-9 + j8} = 0,166 e^{-j0,794},$$

$$y_p(\tau) = 0,166 \cos(2\tau - 0,794).$$

$$q_1 = 0,1; \quad p_1 = -5; \quad p_2 = 1.$$

Das System ist instabil \implies kein eingeschwungener Zustand.

$$(v) \quad G(s) = \frac{s - 0,1}{s^2 - 6s + 5}, \quad G(j2) = \frac{-0,1 + j2}{1 - j12} = 0,166 e^{j3,108},$$

$$y_p(\tau) = 0,166 \cos(2\tau + 3,108).$$

$$q_1 = 0,1; \quad p_1 = 1; \quad p_2 = 5.$$

Das System ist instabil \implies kein eingeschwungener Zustand.

Die Vorzeichen der Pole und Nullstellen sind unerheblich für $|G|$, nicht aber für φ_G . ■

A4.3 Eingeschwungener Zustand bei bekannter Sprungantwort

Nach der Wahl von Bezugswerten

$$U_{EB} = U_{AB} = U_0, \quad T_B = T = 0,12 \text{ ms}$$

und der Einführung bezogener Variablen

$$y = u_A/U_0, \quad u = u_E/U_0, \quad \tau = t/T$$

lässt sich die Sprungantwort als

$$h(\tau) = \frac{1}{2} (1 - e^{-\tau}) \varepsilon(\tau)$$

schreiben. Offensichtlich gehört dazu die System-Differentialgleichung und die Übertragungsfunktion

$$y' + y = \frac{1}{2}u, \quad G(s) = \frac{1}{2(s+1)}.$$

Alternativ dazu, aber etwas umständlicher, könnten wir auch das Faltungsintegral auswerten.

Das System ist stabil. Zum Sinuseingang

$$u(\tau) = \hat{u} \cos(\nu\tau) \quad \text{mit} \quad \hat{u} = 5 \text{ V} / U_0, \quad \nu = 2\pi f T_B = 0,24\pi$$

gehört, wenn wir $U_0 = 5 \text{ V}$ wählen,

$$G(j\nu) = \frac{1}{2(1 + j0,24\pi)} = 0,399 e^{-j0,646},$$

der stationäre Sinusausgang

$$y_{\text{st}}(\tau) = 0,399 \cos(\nu\tau - 0,646),$$

oder, in Originalvariablen,

$$u_{\text{A,st}}(t) = \hat{u}_{\text{A}} \cos(\omega t + \varphi_{u_{\text{A}}})$$

mit

$$\hat{u}_{\text{A}} = 0,399 \cdot 5 \text{ V} = 1,996 \text{ V} \approx 2 \text{ V},$$

$$\omega = 2000\pi \text{ s}^{-1} \quad \text{entsprechend} \quad f = 1 \text{ kHz},$$

$$\varphi_{u_{\text{A}}} = -0,646 = -37^\circ.$$

A4.4 Komplexer Frequenzgang

Die elementare Wechselstromanalyse liefert

$$\frac{U_{\text{A}}}{U_{\text{E}}} = \frac{1}{j\omega C \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)} = \frac{1}{1 + j\omega RC},$$

mit Bezugsgrößen $U_{\text{AB}} = U_{\text{EB}}$ und $T_{\text{B}} = RC$, d.h. mit der bezogenen Frequenzvariablen $\nu = \omega RC$ also den komplexen Frequenzgang

$$G(j\nu) = \frac{1}{1 + j\nu},$$

dargestellt in Abb.A4.4b.

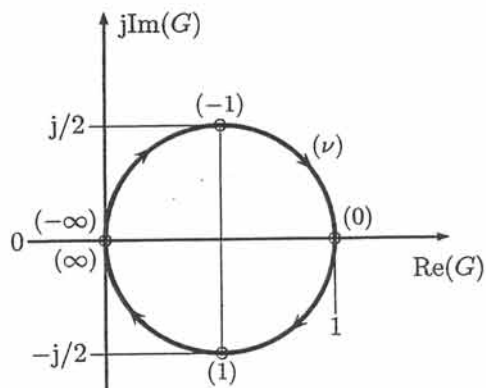


Abb.A4.4b

A4.5 Betragsteil von Bode-Diagrammen

Ob die Nullstellen und die Pole in der rechten oder in der linken Halbebene liegen, ist für den Betragsfrequenzgang belanglos. Alle fünf Systeme besitzen deshalb den gleichen Betragsteil des Bode-Diagramms.

Der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s + 0,1}{s^2 + 6s + 5} = \frac{s + 0,1}{(s + 1)(s + 5)}$$

sind der Randwert $G(0) = 0,02$ und die Knickfrequenzen

Nullstellen: $\nu_K = 0,1$ (einf.);

Pole: $\nu_K = 1$ (einf.); 5 (einf.)

zugeordnet. Damit lässt sich der geknickte Kurvenzug von links nach rechts aufbauen, Abb.A4.5.

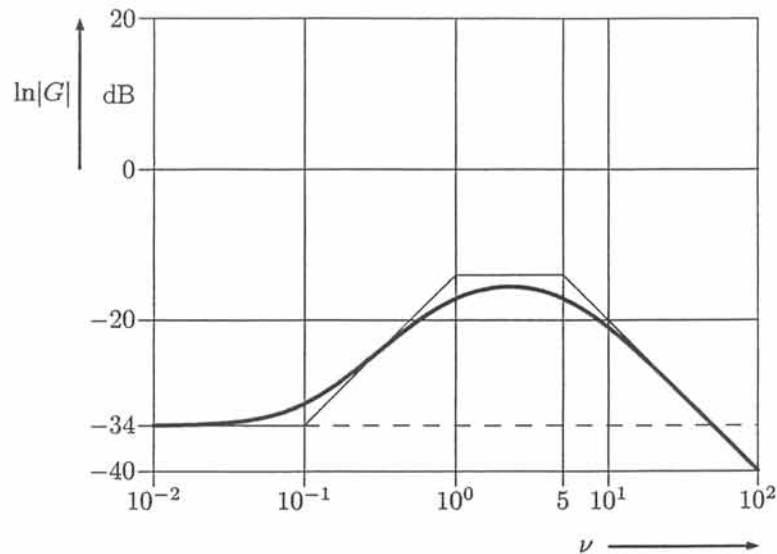


Abb.A4.5

A4.6 Winkelteil von Bode-Diagrammen

Knickfrequenzen $\nu_K = 0,1; 1; 5$.

(i) $G(s) = \frac{s + 0,1}{(s + 1)(s + 5)}$, $\text{arc}[G(j\nu)]_{\nu \downarrow 0} = 0$; Abb.A4.6a.

(ii) $G(s) = \frac{s - 0,1}{(s + 1)(s + 5)}$, $\text{arc}[G(j\nu)]_{\nu \downarrow 0} = \pm\pi$; Abb.A4.6b.

(iii) $G(s) = \frac{s + 0,1}{(s - 1)(s + 5)}$, $\text{arc}[G(j\nu)]_{\nu \downarrow 0} = \pm\pi$; Abb.A4.6c.

(iv) $G(s) = \frac{s - 0,1}{(s - 1)(s + 5)}$, $\text{arc}[G(j\nu)]_{\nu \downarrow 0} = 0$; Abb.A4.6d.

$$(v) \quad G(s) = \frac{s - 0,1}{(s - 1)(s - 5)}, \quad \text{arc}[G(j\nu)]_{\nu \downarrow 0} = \pm\pi; \quad \text{Abb.A4.6e.}$$

Alle Diagramme sind unterschiedlich. (i) und (ii) gehören zu stabilen, (iii), (iv) und (v) zu instabilen Systemen. Lediglich (i) ist ein Minimalwinkel-System.

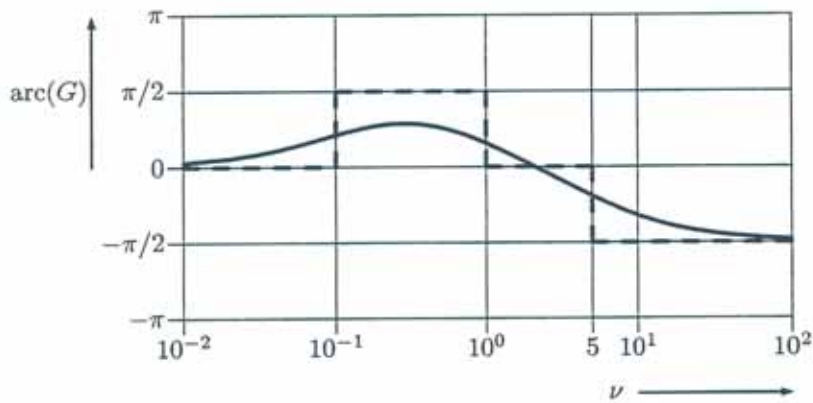


Abb.A4.6a

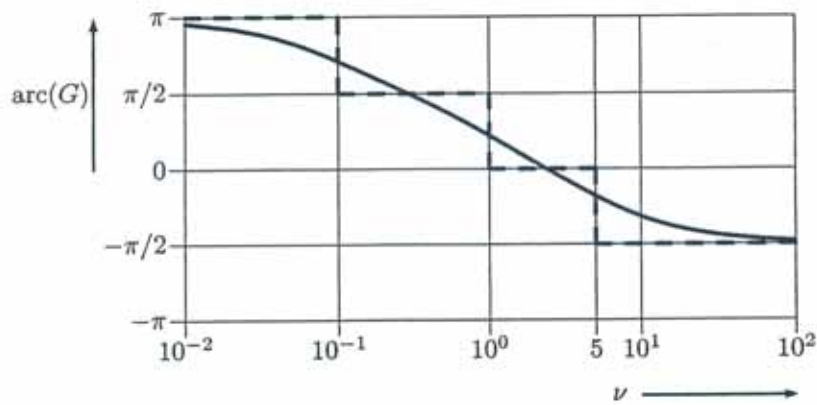


Abb.A4.6b

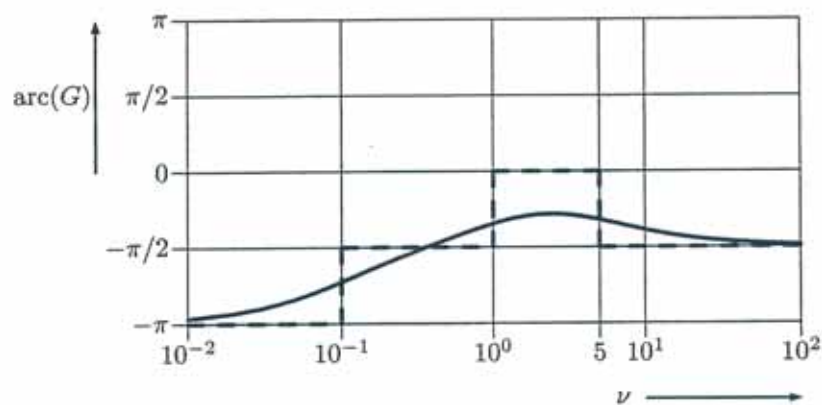


Abb.A4.6c

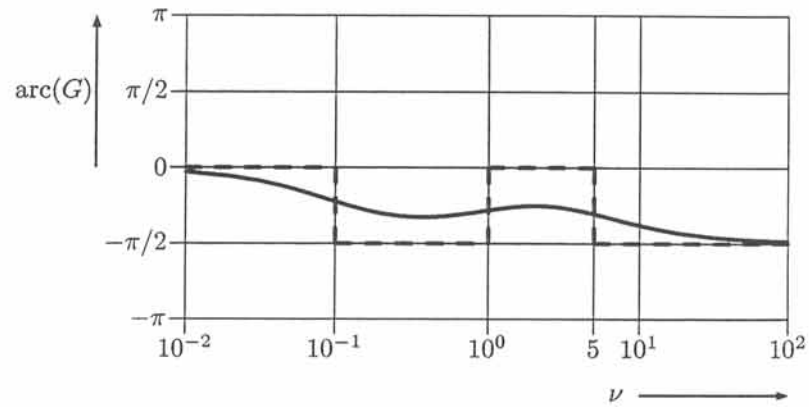


Abb.A4.6d

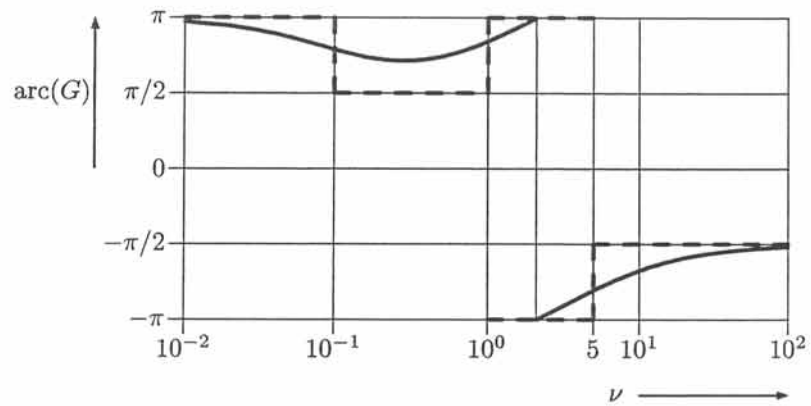


Abb.A4.6e

A4.7 Rekonstruktion der Übertragungsfunktion

Grenzwert $\ln |G(j\nu)|_{\nu \rightarrow 0} = -20 \text{ dB}$, $G(0) = 0,1$

Knickfrequenzen $\nu_K = 0,1 \quad 1 \quad 10$

Steigungen $0 \quad 20 \quad 0 \quad -40 \text{ dB/Dek}$

$$\ln |G(s)| = 20 \text{ dB} \left\{ \lg(0,1) + \lg \left| \frac{s}{0,1} + 1 \right| - \lg |s + 1| - 2 \lg \left| \frac{s}{10} + 1 \right| \right\}.$$

Daraus folgt

$$G(s) = 0,1 \frac{\frac{s}{0,1} + 1}{(s + 1) \left(\frac{s}{10} + 1 \right)^2} = \frac{100(s + 0,1)}{(s + 1)(s + 10)^2}.$$

A4.8 Gekoppelte Differenzierer

(i) Das Ausgangssignal entsteht gemäß

$$y(\tau) = -\frac{d}{d\tau} \left[u(\tau) - \frac{d}{d\tau} y(\tau) \right],$$

was der System-Differentialgleichung und der Übertragungsfunktion

$$y'' - y = u', \quad G(s) = \frac{s}{s^2 - 1} = \frac{s}{(s+1)(s-1)}$$

entspricht.

(ii) Für $s \rightarrow 0$ gilt $G(s) \rightarrow G_0(s) = -s$. Weiters ist $20 \lg |G(j)| \text{ dB} = -6 \text{ dB}$.
Bode-Diagramm in Abb.A4.8b.

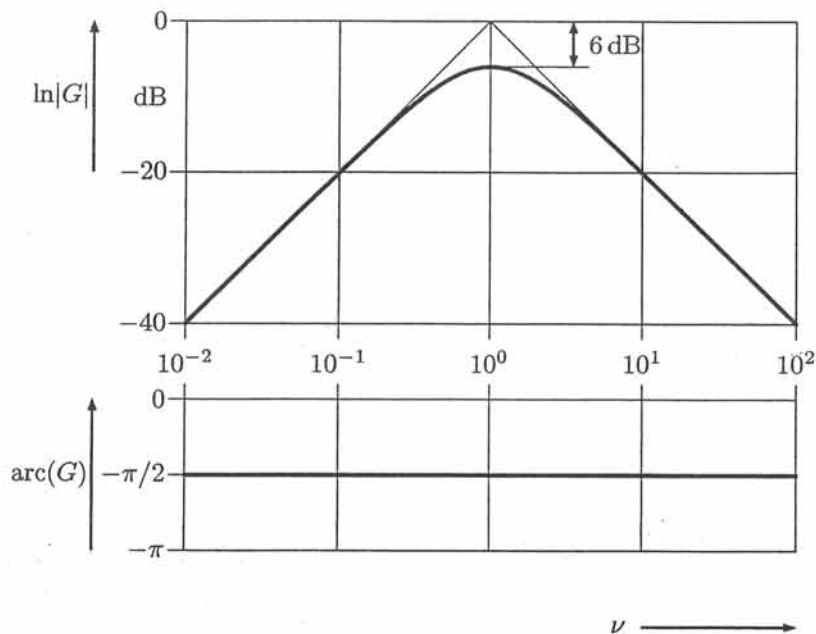


Abb.A4.8b

A4.9 Resonanz im Bode-Diagramm

Die Spannungteilerregel der komplexen Wechselstromrechnung liefert

$$\begin{aligned} \frac{U_A}{U_E} &= \frac{1}{j\omega C \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)} = \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC} \\ &= \frac{1}{1 + j\nu R\sqrt{C/L} + (j\nu)^2} \end{aligned}$$

also die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\vartheta s + 1} \quad \text{mit} \quad \vartheta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0,0884, \quad -20 \lg(2\vartheta) \text{ dB} = 15 \text{ dB}.$$

Bode-Diagramm in Abb.A4.9b.

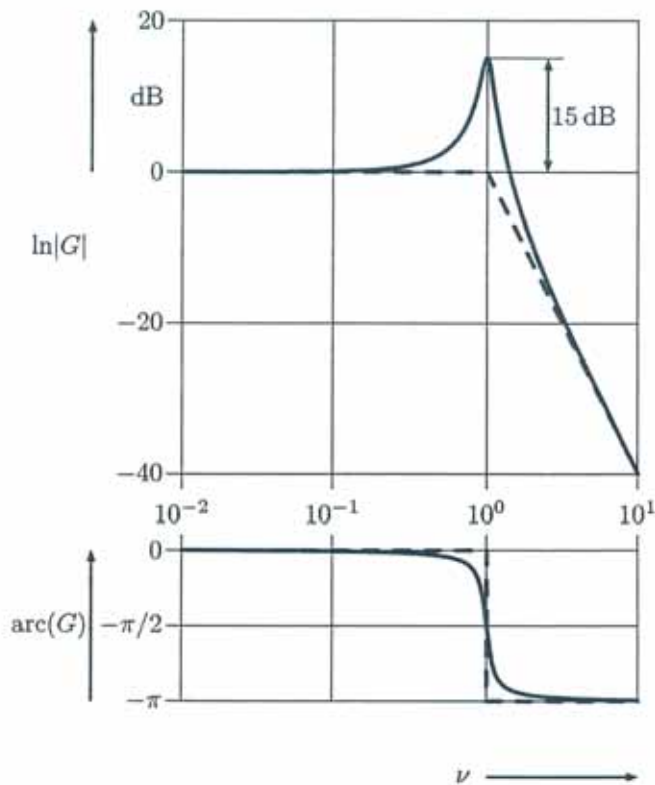


Abb.A4.9b

A4.10 Kreuzglied

Die elementare Analyse mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung liefert

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{1}{2} \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{2} \frac{1 - j\nu}{1 + j\nu},$$

also die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{2} \frac{1 - s}{1 + s}.$$

- (i) Wir bemerken $|G(j\nu)| = 1/2 = \text{konstant}$: Allpass-Verhalten. Lediglich der Phasenverschiebungswinkel der Ausgangsspannung gegenüber der Eingangsspannung ist frequenzabhängig. Bode Diagramm in Abb.A4.10b.

(ii) Aus der Übertragungsfunktion finden wir sofort die System-Differentialgleichung

$$y' + y = \frac{1}{2}(-u' + u),$$

die für

$$u(\tau) = \varepsilon(\tau), \quad y(0^-) = 0, \quad y(0^+) = -1/2$$

als Lösung die Sprungantwort

$$h(\tau) = \left(\frac{1}{2} - e^{-\tau}\right) \varepsilon(\tau),$$

skizziert in Abb.A4.10c, liefert.

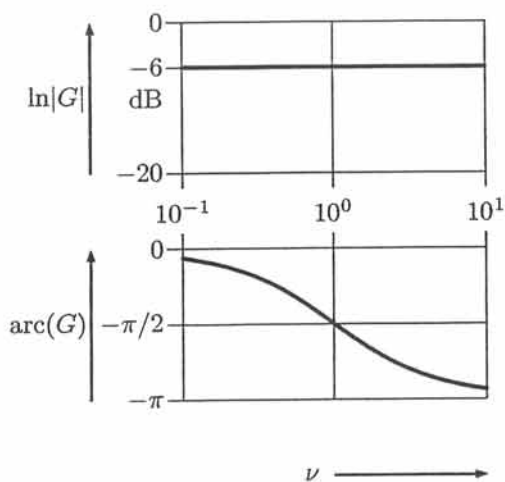


Abb.A4.10b

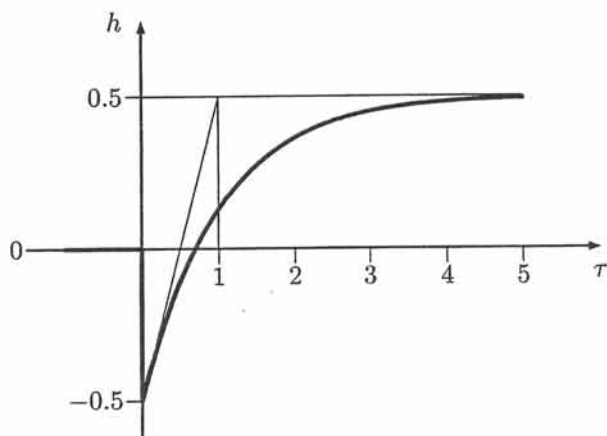


Abb.A4.10c

A4.11 Tiefpass

Eine Analyse der Schaltung mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung liefert

$$\frac{U_A}{U_E} = \frac{1 + R_1/R_2}{(j\omega RC)^2 + (2 - R_1/R_2)j\omega RC + 1} = \frac{1 + R_1/R_2}{(j\nu)^2 + (2 - R_1/R_2)j\nu + 1},$$

also die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{3 - 2\vartheta}{s^2 + 2\vartheta s + 1} \quad \text{mit} \quad \vartheta = 1 - \frac{1}{2} \frac{R_1}{R_2}.$$

- (i) $\vartheta = 1$; $\ln |G(0)| = 0$,
- (ii) $\vartheta = 0,866$; $\ln |G(0)| = 2,06 \text{ dB}$,
- (iii) $\vartheta = 0,707$; $\ln |G(0)| = 4,01 \text{ dB}$,
- (iv) $\vartheta = 0,523$; $\ln |G(0)| = 5,82 \text{ dB}$.

Die Betragsteile der Bode-Diagramme sind in Abb.A4.11b dargestellt.

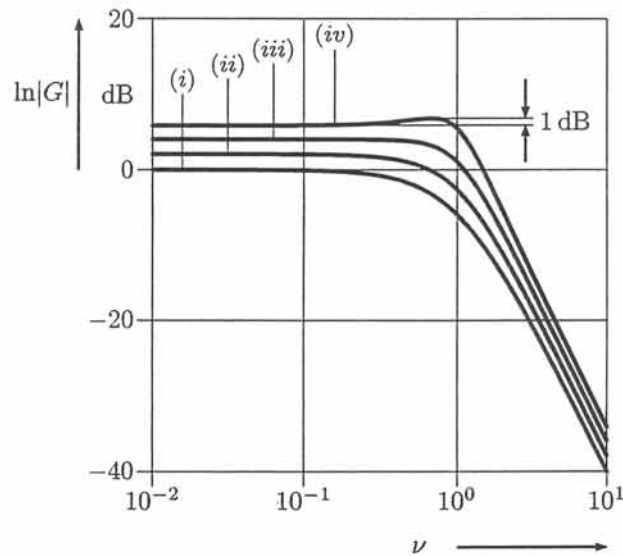


Abb.A4.11b

A4.12 Übertragen eines Rechteckimpulses

- (i) Aus dem Spektrum des Eingangssignals,

$$U(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-j\nu\tau} d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-j\nu\tau} d\tau = \frac{1}{j\nu} (e^{-j\nu\tau_1} - e^{-j\nu\tau_2}),$$

ergibt sich sofort das Spektrum des Ausgangssignals,

$$Y(j\nu) = G(j\nu)U(j\nu) = \frac{G(j\nu)}{j\nu} (e^{-j\nu\tau_1} - e^{-j\nu\tau_2}).$$

(ii) Mit $\tau_2 - \tau_1 = 1$ und $G(j\nu) = 1/(1+j\nu)$ haben wir speziell

$$Y(j\nu) = e^{-j\nu(\tau_2-1/2)} \frac{e^{j\nu/2} - e^{-j\nu/2}}{j\nu(1+j\nu)} = e^{-j\nu(\tau_2-1/2)} 2 \frac{\sin(\nu/2)}{\nu(1+j\nu)},$$

also den Betrag

$$|Y(j\nu)| = \frac{|\sin(\nu/2)|}{|\nu/2| \sqrt{1+\nu^2}},$$

skizziert in Abb.A4.12b.

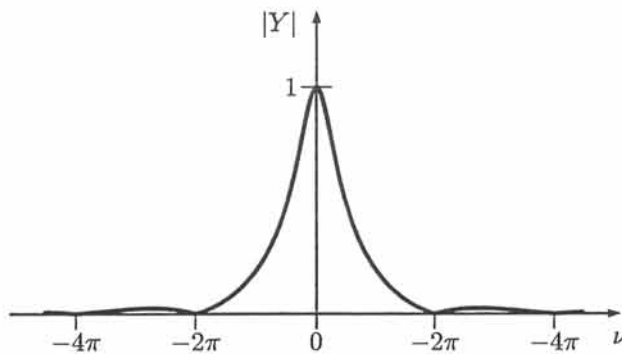


Abb.A4.12b

A4.13 Ideales Tiefpassfilter

Ein idealer Tiefpass ist durch den Frequenzgang

$$G(j\nu) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_g}\right) = \text{rect}\left(\frac{\nu}{2\nu_g}\right)$$

definiert (Abb.A4.13a), wobei

$$\nu = f/f_B = 2\pi f/\omega_B = 2\pi T_B f, \quad \tau = t/T_B.$$

Die Stoßantwort ist formal die Fourier-Rücktransformierte des komplexen Frequenzgangs,

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\nu) e^{j\nu\tau} d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu_g}^{\nu_g} e^{j\nu\tau} d\nu = \frac{e^{j\nu_g\tau} - e^{-j\nu_g\tau}}{j2\pi\tau} = \frac{\sin(\nu_g\tau)}{\pi\tau},$$

also

$$g(\tau) = \frac{\nu_g}{\pi} \text{si}(\nu_g\tau) = 2T_B f_g \text{si}(2\pi f_g t),$$

skizziert in Abb.A4.13b.

Bereits vor dem Stoß (Ursache) zeigt das System eine Reaktion (Wirkung), es ist daher nicht kausal.

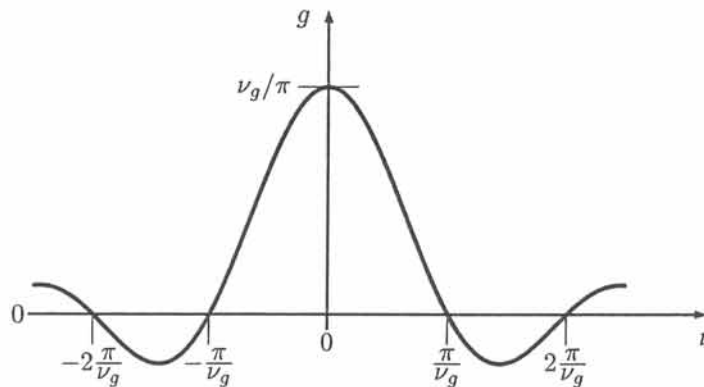


Abb.A4.13b

A4.14 Totzeitsysteme

(i) Fourier-Transformation der ersten Gleichung ergibt

$$(j\nu)^2 Y(j\nu) + 2j\nu e^{-j\nu} Y(j\nu) + 3Y(j\nu) = j\nu U(j\nu) + 0,5U(j\nu),$$

also, mit $s = j\nu$,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 0,5}{s^2 + 2s e^{-s} + 3}.$$

(ii) Analog gilt für die zweite Gleichung

$$(j\nu)^2 Y(j\nu) + 5j\nu Y(j\nu) + 2Y(j\nu) - j\nu e^{-0,2j\nu} Y(j\nu) = e^{-0,5j\nu} U(j\nu),$$

mit $s = j\nu$ also

$$G(s) = \frac{e^{-0,5s}}{s^2 + (5 - e^{-0,2s})s + 2}.$$

A4.15 Kammfilter

Ein Blick auf das Strukturdiagramm liefert sofort die Stoßantwort

$$g(\tau) = \delta(\tau) + \delta(\tau - \tau_0).$$

Deren Fourier-Transformierte ist der komplexe Frequenzgang

$$\begin{aligned} G(j\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\nu\tau} d\tau = 1 + e^{-j\nu\tau_0} \\ &= e^{-j\nu\tau_0/2} \left(e^{j\nu\tau_0/2} + e^{-j\nu\tau_0/2} \right) = e^{-j\nu\tau_0/2} \cdot 2 \cos(\nu\tau_0/2), \end{aligned}$$

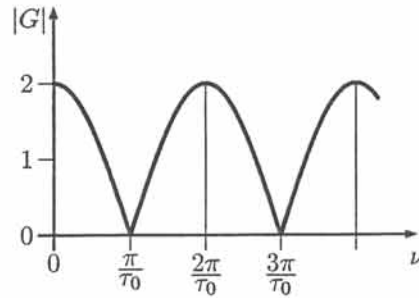


Abb.A4.15b

und daraus folgt der Betragsfrequenzgang,

$$|G(j\nu)| = 2 |\cos(\nu\tau_0/2)|,$$

dargestellt in Abb.A4.15b. ■

A4.16 Zufallssignal an einem Differenzierer

Der Differenzierer besitzt den komplexen Frequenzgang $G(j\nu) = j\nu$ und damit bei bekanntem Eingangs-Leistungsspektrum $R_{uu}(j\nu) = \mathcal{F}[r_{uu}(\tau)]$ das Ausgangs-Leistungsspektrum

$$R_{yy}(j\nu) = |G(j\nu)|^2 R_{uu}(j\nu) = \nu^2 R_{uu}(j\nu).$$

Die Fourier-Rücktransformation liefert die AKF des Ausgangssignals zu

$$\begin{aligned} r_{yy}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[R_{yy}(j\nu)] = \mathcal{F}^{-1}[-(j\nu)^2 R_{uu}(j\nu)] \\ &= -\frac{d^2}{d\tau^2} r_{uu}(\tau). \end{aligned}$$

■

A4.17 Kreuzkorrelationsfunktion

Für reelle, ergodische Signale lässt sich die Kreuzkorrelationsfunktion aus beliebigen Realisierungen berechnen,

$$r_{y_{12}}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y_{1k}(\tau') y_{2k}(\tau + \tau') d\tau'.$$

Einsetzen der Faltungsdarstellungen für die determinierten Realisierungen liefert

$$\begin{aligned} r_{y_{12}}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda) u_k(\tau' - \lambda) d\lambda \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_2(\mu) u_k(\tau + \tau' - \mu) d\mu \right] d\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda) g_2(\mu) \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_k(\tau' - \lambda) u_k(\tau + \tau' - \mu) d\tau' \right] d\lambda d\mu. \end{aligned}$$

Die eckige Klammer im letzten Integranden stellt die AKF r_{uu} des Eingangssignals mit dem Argument $\tau + \lambda - \mu$ dar. Somit gilt

$$\begin{aligned} r_{y12}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda) \left[\int_{-\infty}^{\infty} g_2(\mu) r_{uu}(\tau + \lambda - \mu) d\mu \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\lambda) (g_2 * r_{uu})(\tau + \lambda) d\lambda \end{aligned}$$

und daher

$$r_{y12}(\tau) = g_1(-\tau) * g_2(\tau) * r_{uu}(\tau).$$

Äquivalent gilt

$$r_{y12}(\tau) = g_{12}^E(\tau) * r_{uu}(\tau),$$

wobei $g_{12}^E(\tau) = g_1(\tau) \otimes g_2(\tau)$ das Autokorrelationsprodukt der beiden Stoßantworten angibt. ■

A4.18 Monochromatischer Prozess

Das Eingangssignal besitzt das Leistungsspektrum

$$\begin{aligned} R_{uu}(j\nu) &= \mathcal{F}[r_{uu}(\tau)] = u_{\text{eff}}^2 \mathcal{F}[\cos(\nu_0 \tau)] \\ &= u_{\text{eff}}^2 \pi [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]. \end{aligned}$$

Mit dem bekannten komplexen Frequenzgang $G(j\nu)$ ergibt sich dann die Leistung des Ausgangssignals

$$\begin{aligned} y_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(j\nu) d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\nu)|^2 R_{uu}(j\nu) d\nu \\ &= \frac{1}{2} \left[|G(j\nu_0)|^2 + |G(-j\nu_0)|^2 \right] u_{\text{eff}}^2. \end{aligned}$$

A4.19 Weißes Rauschen an einem Bandpass

- (i) Der komplexe Frequenzgang des idealen Bandpasses und sein Betragsquadrat lassen sich in der Form

$$|G(j\nu)|^2 = G(j\nu) = \text{rect}\left(\frac{\nu + \nu_0}{\beta}\right) + \text{rect}\left(\frac{\nu - \nu_0}{\beta}\right)$$

schreiben. Damit ergibt sich das Leistungsspektrum des Ausgangssignals zu

$$R_{yy}(j\nu) = |G(j\nu)|^2 R_{uu}(j\nu) = K \left[\text{rect}\left(\frac{\nu + \nu_0}{\beta}\right) + \text{rect}\left(\frac{\nu - \nu_0}{\beta}\right) \right].$$

- (ii) Die AKF ist die inverse Fourier-Transformierte des Leistungsspektrums, also

$$\begin{aligned} r_{yy}(\tau) &= \frac{K}{2\pi} \left[\int_{-\nu_0-\beta/2}^{-\nu_0+\beta/2} e^{j\nu\tau} d\nu + \int_{\nu_0-\beta/2}^{\nu_0+\beta/2} e^{j\nu\tau} d\nu \right] \\ &= \frac{2K}{\pi\tau} \cos(\nu_0\tau) \operatorname{si}\left(\frac{\beta}{2}\tau\right) = \frac{K\beta}{\pi} \cos(\nu_0\tau) \operatorname{si}\left(\frac{\beta}{2}\tau\right). \end{aligned}$$

- (iii) Den Effektivwert erhalten wir aus der Signalleistung $y_{\text{eff}}^2 = r_{yy}(0)$,

$$y_{\text{eff}} = \sqrt{K\beta/\pi}.$$

■

A4.20 Weißes Rauschen an einem R-C-Glied

Zur angegebenen Stoßantwort gehört der komplexe Frequenzgang

$$G(j\nu) = \mathcal{F}[g(\tau)] = \frac{1}{1 + j\nu}.$$

- (i) Leistungsspektren werden mit dem Betragsquadrat des komplexen Frequenzgangs übertragen. Somit ist das Leistungsspektrum des Ausgangssignals

$$R_{yy}(j\nu) = |G(j\nu)|^2 R_{uu}(j\nu) = \frac{K}{1 + \nu^2}.$$

Die Leistung des Ausgangssignals folgt daraus zu

$$y_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(j\nu) d\nu = \frac{K}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\nu}{1 + \nu^2} = \frac{K}{2}.$$

- (ii) Die Autokorrelationsfunktion $r_{yy}(\tau)$ des Ausgangssignals ergibt sich entweder durch die inverse Fourier-Transformation aus dem Leistungsspektrum $R_{yy}(j\nu)$, oder durch Faltung des Autokorrelationsprodukts der Stoßantwort,

$$\begin{aligned} r_{gg}^{\text{E}}(\tau) &= g(\tau) \otimes g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau') g(\tau + \tau') d\tau' \\ &= e^{\tau} \int_{\tau}^{\infty} e^{-2\tau'} \varepsilon(\tau') d\tau' = \frac{1}{2} e^{-|\tau|}, \end{aligned}$$

mit der AKF $r_{uu}(\tau) = K\delta(\tau)$ des weißen Rauschens am Eingang,

$$r_{yy}(\tau) = r_{gg}^{\text{E}}(\tau) * r_{uu}(\tau) = \left[\frac{1}{2} e^{-|\tau|} \right] * [K\delta(\tau)] = \frac{K}{2} e^{-|\tau|}.$$

Die zugehörige Signalleistung ist

$$y_{\text{eff}}^2 = r_{yy}(0) = \frac{K}{2}.$$

■

A5.1 Diverse Fourier-Reihen

(i) Der Verlauf

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \cos[\pi(f_0 t - 1)/4] \\ &= \frac{u_0}{2} e^{j\pi/4} e^{-j\pi f_0 t/4} + \frac{u_0}{2} e^{-j\pi/4} e^{j\pi f_0 t/4} \end{aligned}$$

wird formal durch die komplexe Fourier-Reihe

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}$$

mit der Grundkreisfrequenz

$$\omega_1 = \pi f_0/4 \quad \text{d.h.} \quad f_1 = f_0/8, \quad T_1 = 8/f_0$$

und den Koeffizienten

$$C_1 = \frac{u_0}{2} e^{-j\pi/4}, \quad C_{-1} = C_1^*, \quad \text{andere } C_k = 0,$$

wiedergegeben.

(ii) Ähnlich entspricht

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 [\cos(4\omega_0 t) + \sin(6\omega_0 t)] \\ &= \frac{u_0}{2} (e^{j4\omega_0 t} + e^{-j4\omega_0 t} - je^{j6\omega_0 t} + je^{-j6\omega_0 t}) \\ &= \frac{u_0}{2} (je^{-j6\omega_0 t} + e^{-j4\omega_0 t} + e^{j4\omega_0 t} - je^{j6\omega_0 t}) \end{aligned}$$

der komplexen Fourier-Reihe

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} \quad \text{mit } \omega_1 = 2\omega_0 \quad \text{und} \\ C_2 &= C_{-2} = \frac{u_0}{2}, \quad C_3 = -C_{-3} = -j\frac{u_0}{2}, \quad \text{andere } C_k = 0. \end{aligned}$$

(iii) Das Signal, skizziert in Abb.A5.1d, lässt sich als 2π -periodische Funktion mit

$$\begin{aligned} x &= u/u_0, \quad \tau = \omega_1 t, \\ T_1 &= 2T, \quad \omega_1 = 2\pi/T_1 = \pi/T = 100\pi \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

in der bezogenen Form

$$x(\tau) = e^{-\tau/\pi}, \quad -\pi < \tau < \pi; \quad 2\pi\text{-periodisch,}$$

darstellen. Die Koeffizienten in der Reihe

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\tau}$$

sind gemäß

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) e^{-jk\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-(1+jk\pi)\tau/\pi} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{1+jk\pi} \left[e^{1+jk\pi} - e^{-(1+jk\pi)} \right] = \frac{(-1)^k (e - 1/e)}{2(1+jk\pi)}, \\ c_{-k} &= c_k^* \quad (\text{reellwertiges Signal}) \end{aligned}$$

zu berechnen. In Originalvariablen ist dann

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} \quad \text{mit } \omega_1 = 100\pi \text{ s}^{-1} \quad \text{und} \\ C_k &= u_0 c_k = \frac{e - 1/e}{2} \cdot \frac{(-1)^k}{1+jk\pi} u_0. \end{aligned}$$

- (iv) Wir behandeln den Verlauf, dargestellt in Abb.5.1e, als 1-periodische Funktion mit

$$x = u/\hat{u}, \quad \tau = t/T_1, \quad T_1 = 4T$$

gemäß

$$x(\tau) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin(4\pi\tau) & \text{für } 0 < \tau < 1/2 \\ 0 & \text{für } 1/2 < \tau < 1 \end{array} \right\}, \quad \text{1-periodisch.}$$

Aus

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^1 x(\tau) e^{-j2\pi k\tau} d\tau = \int_0^{1/2} \sin(4\pi\tau) e^{-j2\pi k\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2j} \int_0^{1/2} \left[e^{j(2-k)2\pi\tau} - e^{-j(2+k)2\pi\tau} \right] d\tau = \frac{1 - (-1)^k}{(4 - k^2)\pi}, \quad k \neq \pm 2 \end{aligned}$$

folgt dann die bezogene Form

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k\tau}, \quad c_k = \frac{1 - (-1)^k}{(4 - k^2)\pi}, \quad k \neq \pm 2; \quad c_2 = \frac{1}{4j}, \quad c_{-2} = c_2^*$$

oder, in Originalvariablen,

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t} \quad \text{mit } f_1 = \frac{1}{4T}, \\ C_k &= \frac{1 - (-1)^k}{(4 - k^2)\pi} \hat{u}, \quad k \neq \pm 2; \quad C_2 = \frac{\hat{u}}{4j}, \quad C_{-2} = C_2^*. \end{aligned}$$

- (v) Als 2π -periodische Funktion mit

$$x = u/\hat{u}, \quad \tau = \omega_1 t, \quad \omega_1 = 2\pi/T_1, \quad T_1 = 2T$$

aufgefasst ist der „Sägezahn“-Verlauf

$$x(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} \tau/\pi \text{ für } -\pi < \tau < \pi \\ 2\pi\text{-periodisch} \end{array} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\tau},$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) e^{-jk\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \tau e^{-jk\tau} d\tau = j \frac{(-1)^k}{k\pi}, \quad k \neq 0,$$

$$c_0 = 0.$$

In Originalvariablen:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}, \quad \omega_1 = \pi/T,$$

$$C_k = j \frac{(-1)^k}{k\pi} \hat{u}, \quad k \neq 0; \quad C_0 = 0.$$

(vi) Die Fourier-Koeffizienten für den angegebenen Verlauf, bezogen mit

$$x = u/\hat{u}, \quad \tau = \omega_1 t, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{\pi}{3T}, \quad T_1 = 6T$$

als 2π -periodische, gerade Funktion aufgefasst, sind gemäß

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) e^{-jk\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x(\tau) \cos(k\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi/3} \cos(k\tau) d\tau + \int_{\pi/3}^{2\pi/3} (2 - \tau 3/\pi) \cos(k\tau) d\tau \right]$$

$$= \frac{3}{(k\pi)^2} \left[\cos\left(k \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(k \frac{2\pi}{3}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} \cdot \frac{\sin(k\pi/6)}{k\pi/6}, \quad c_0 = \frac{1}{2}$$

zu berechnen. Wir haben daher in Originalvariablen

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \frac{\pi}{3T},$$

$$C_0 = \frac{\hat{u}}{2}, \quad C_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} \cdot \frac{\sin(k\pi/6)}{k\pi/6} \cdot \frac{\hat{u}}{2}.$$

(vii) Dem angegebenen Verlauf mit

$$x = u/\hat{u}, \quad \tau = \frac{t}{T_1} = \frac{t}{4T}, \quad T_1 = 4T$$

geschrieben als 1-periodische Funktion

$$x(\tau) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } 0 < \tau < 1/4, \\ 0,5 & \text{für } 1/4 < \tau < 1/2, \\ 0 & \text{für } 1/2 < \tau < 1 \end{array} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k\tau},$$

sind die Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^1 x(\tau) e^{-j2\pi k\tau} d\tau = \int_0^{1/4} e^{-j2\pi k\tau} d\tau + \frac{1}{2} \int_{1/4}^{1/2} e^{-j2\pi k\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{j4\pi k} \left(2 - e^{-jk\pi/2} - e^{-jk\pi} \right) \\ &= \frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi/4} \cdot \frac{e^{-jk\pi/4}}{8} + \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} \cdot \frac{e^{-jk\pi/2}}{4}, \quad c_0 = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

zugeordnet. In Originalvariablen ist daher

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t} \quad \text{mit} \quad f_1 = \frac{1}{4T}, \\ C_0 &= \frac{3}{8} \hat{u}, \quad C_k = \frac{\hat{u}}{j4k\pi} \left(2 - e^{-jk\pi/2} - e^{-jk\pi} \right). \end{aligned}$$

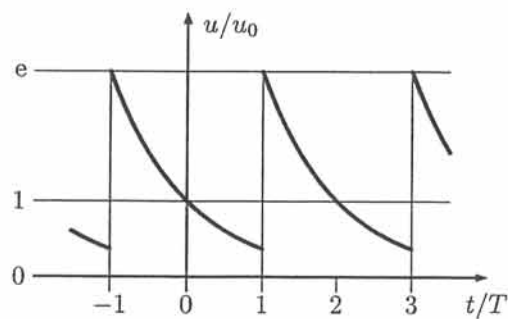


Abb.A5.1d

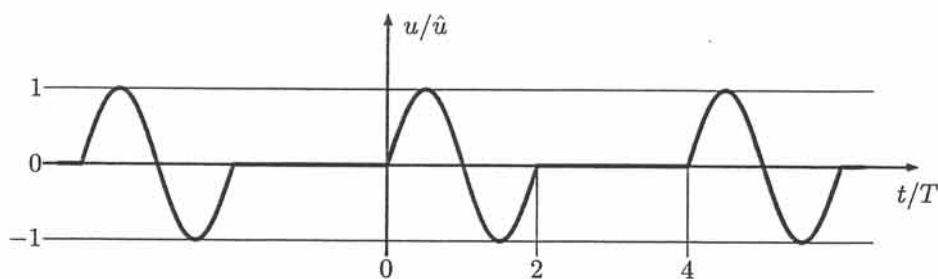


Abb.A5.1e

A5.2 Ausschnitt einer Sinusschwingung

Das entstehende reelle, 2π -periodische Signal besitzt „Sinus-Symmetrie“. Die Grundschiwingung nimmt daher die Form

$$x_1(\tau) = \hat{x}_1 \sin(\tau)$$

an, wobei die Amplitude \hat{x}_1 direkt aus

$$\hat{x}_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\tau) \sin(\tau) d\tau$$

berechnet werden kann. Mit der Abkürzung

$$\tau_1 = \arcsin(b/a)$$

erhalten wir

$$\hat{x}_1 = \frac{2a}{\pi} \int_{\tau_1}^{\pi-\tau_1} [\sin(\tau) - \sin(\tau_1)] \sin(\tau) d\tau = a \left[1 - \frac{2\tau_1 + \sin(2\tau_1)}{\pi} \right].$$

A5.3 Angeschnittene Sinusschwingung

Für die Grundschwingung des reellen Signals $x(\tau)$,

$$x_1(\tau) = c_{-1}e^{-j\tau} + c_1e^{j\tau} = c_1^*e^{-j\tau} + c_1e^{j\tau},$$

benötigen wir den Koeffizienten c_1 ,

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) e^{-j\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(\tau) e^{-j\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} (1 + e^{-j2\tau}) d\tau = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$x_1(\tau) = \frac{1}{4} (e^{-j\tau} + e^{j\tau}) = \frac{1}{2} \cos(\tau).$$

A5.4 Pulsierende Spannung

(i) Nach Einführung bezogener Größen

$$x = u/U_d, \quad \tau = \omega_1 t$$

liegt ein 2π -periodisches, reelles, ungerades Signal $x(\tau)$ vor, das überdies „Sinus-Symmetrie“ besitzt. Demnach verschwinden die Koeffizienten $c_k = -c_{-k}$ für gerade k . Wir haben also

$$x(\tau) = \sum_{k=1,3,\dots} j2c_k \sin(k\tau),$$

wobei

$$\begin{aligned} c_k &= -\frac{j}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) \sin(k\tau) d\tau = -j\frac{2}{\pi} \left[-\int_0^{\alpha} \sin(k\tau) d\tau + \int_{\alpha}^{\pi/2} \sin(k\tau) d\tau \right] \\ &= -j\frac{2}{k\pi} [2 \cos(k\alpha) - 1], \quad k = 1, 3, \dots \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $b_k = j2c_k U_d$ in der angegebenen Darstellung sind daher

$$b_k = \begin{cases} \frac{4U_d}{k\pi} [2 \cos(k\alpha) - 1] & \text{für } k = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & \text{für } k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

(ii) Die Amplitude der Grundschwingung,

$$|b_1| = \frac{4U_d}{\pi} |2 \cos(\alpha) - 1|,$$

und die Amplitude der ersten nichtverschwindenden Oberschwingung,

$$|b_3| = \frac{4U_d}{3\pi} |2 \cos(3\alpha) - 1|,$$

sind als Funktionen von α in Abb.A5.4b skizziert.

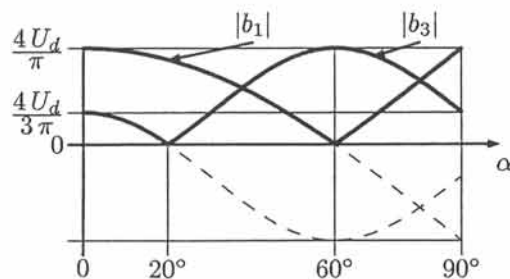


Abb.A5.4b

A5.5 Reelle Darstellung

Aus der Koeffizientenformel

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) e^{-jk\tau} d\tau = \int_0^{2\pi} \tau e^{-jk\tau} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau^2 e^{-jk\tau} d\tau$$

erhalten wir durch partielle Integration

$$c_0 = 2\pi^2/3; \quad c_k = -2/k^2, \quad k \neq 0.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\tau} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k e^{jk\tau} + c_{-k} e^{-jk\tau}) \\ &= c_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} (e^{jk\tau} + e^{-jk\tau}), \end{aligned}$$

also

$$x(\tau) = \frac{2}{3}\pi^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos(k\tau).$$

■

A5.6 Periodische Schwingungsblöcke

Mit $T_1 = 2NT_0$, $\omega_1 = 2\pi/T_1$, $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2N\omega_1$, $\tau = \omega_1 t$ berechnen wir

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} u(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{U_0}{T_1} \int_{-nT_0}^{nT_0} \sin(\omega_0 t) e^{-jk\omega_1 t} dt \\ &= \frac{U_0}{2\pi} \int_{-\pi n/N}^{\pi n/N} \sin(2N\tau) e^{-jk\tau} d\tau = \frac{U_0}{j4\pi} \int_{-\pi n/N}^{\pi n/N} [e^{j(2N-k)\tau} - e^{-j(2N+k)\tau}] d\tau, \end{aligned}$$

$$C_k = j \frac{U_0}{\pi} \cdot \frac{2N \sin(k\pi n/N)}{4N^2 - k^2} \quad \text{für } k \neq \pm 2N,$$

$$C_{2N} = -C_{-2N} = -j \frac{U_0}{2} \cdot \frac{n}{N}.$$

Insgesamt ist also

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} \quad \text{mit } \omega_1 = \frac{\pi}{NT_0} \quad \text{und}$$

$$C_{2N} = -C_{-2N} = -j \frac{U_0}{2} \cdot \frac{n}{N}; \quad C_k = -j \frac{U_0}{2} \cdot \frac{4N}{\pi} \cdot \frac{\sin(k\pi n/N)}{k^2 - 4N^2}, \quad k \neq \pm 2N$$

oder, reell geschrieben,

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_1 t) \quad \text{mit } \omega_1 = \frac{\pi}{NT_0} \quad \text{und}$$

$$b_{2N} = U_0 \frac{n}{N}; \quad b_k = U_0 \frac{4N}{\pi} \cdot \frac{\sin(k\pi n/N)}{k^2 - 4N^2}, \quad k \neq 2N.$$

■

A5.7 Spektrum eines Produkts

Die periodische Funktion $p(\tau)$ besitzt das Spektrum

$$P(j\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathcal{F}[\cos(k\tau) + j \sin(k\tau)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k 2\pi \delta(\nu - k).$$

Der Produktbildung im Zeitbereich entspricht die Faltung im Frequenzbereich,

$$y(\tau) = x(\tau)p(\tau) \quad \circ \bullet \quad Y(j\nu) = \frac{1}{2\pi} X(j\nu) * P(j\nu).$$

Wir berechnen

$$Y(j\nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu') P(j\nu - j\nu') d\nu' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu') \delta(\nu - k - \nu') d\nu',$$

erhalten also

$$Y(j\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k X[j(\nu - k)].$$

■

A5.8 Periodische Antworten eines LTI-Systems

(i) Wir führen die bezogene Zeitvariable

$$\tau = \omega_1 t \quad \text{mit} \quad \omega_1 = 2\pi/T, \quad \text{d.h.} \quad T_B = T/(2\pi)$$

ein. Dann ist

$$g(\tau) = T_B \tilde{g}(T_B \tau) = \frac{a}{2\pi} e^{-\tau/2} \varepsilon(\tau) \circ \bullet G(j\nu) = \frac{a}{2\pi} \cdot \frac{1}{j\nu + 2/\pi}.$$

Die Eingangsfunktion ist als Fourier-Reihe

$$u(\tau) = \cos(\tau) = \frac{1}{2} (e^{-j\tau} + e^{j\tau})$$

darstellbar, besitzt also die Fourier-Koeffizienten

$$c_{u,-1} = c_{u,1} = \frac{1}{2}; \quad c_{uk} = 0 \quad \text{für} \quad k \neq \pm 1.$$

Der Fourier-Reihe der Ausgangsfunktion,

$$y(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{yk} e^{jk\tau}, \quad c_{yk} = G(jk) c_{uk},$$

sind dann die Koeffizienten

$$c_{y,1} = G(j) c_{u,1} = \frac{a}{4\pi} \cdot \frac{1}{2/\pi + j} = \frac{a}{4(2 + j\pi)},$$

$$c_{y,-1} = c_{y,1}^*, \quad c_{yk} = 0 \quad \text{für} \quad k \neq \pm 1$$

zugeordnet, so dass

$$y(\tau) = \frac{a}{4} \left(\frac{e^{-j\tau}}{2 - j\pi} + \frac{e^{j\tau}}{2 + j\pi} \right),$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{a}{4} \left(\frac{e^{-j\omega_1 t}}{2 - j\pi} + \frac{e^{j\omega_1 t}}{2 + j\pi} \right) \quad \text{mit} \quad \omega_1 = 2\pi/T.$$

(ii) Mit der selben Bezugsdauer wie unter (i) gilt

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \sin(2\tau) + \cos(3\tau + \pi/4) \\ &= \frac{1}{2j}e^{j2\tau} - \frac{1}{2j}e^{-j2\tau} + \frac{1}{2}e^{j\pi/4}e^{j3\tau} + \frac{1}{2}e^{-j\pi/4}e^{-j3\tau}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} c_{u,2} &= \frac{1}{2j} = c_{u,-2}^*, & c_{u,3} &= \frac{1}{2}e^{j\pi/4} = c_{u,-3}^*, \\ c_{uk} &= 0 \text{ sonst,} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{yk} e^{jk\omega_1 t} \text{ mit } \omega_1 = 2\pi/T \text{ und} \\ c_{y,2} &= \frac{a}{8(j-\pi)} = c_{y,-2}^*, & c_{y,3} &= \frac{ae^{j\pi/4}}{4(2+j3\pi)} = c_{y,-3}^*, \\ c_{yk} &= 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

(iii) Wenn wir wieder die gleiche Bezugsdauer wie unter (i) verwenden, gilt wegen $\delta(\tau) = T_B \tilde{\delta}(T_B \tau)$

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\tau - n2\pi), \quad 2\pi\text{-periodisch,} \\ c_{uk} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\tau) e^{-jk\tau} d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\tau - n2\pi) e^{-jk\tau} d\tau \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\tau) e^{-jk\tau} d\tau = 1, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{yk} e^{jk\omega_1 t} \text{ mit } \omega_1 = 2\pi/T \text{ und} \\ c_{yk} &= G(jk) = \frac{a}{2(2+jk\pi)}. \end{aligned}$$

(iv) Die fundamentale Periodendauer der Eingangsfunktion ist $T_1 = 2T$. Wenn wir deshalb die bezogene Zeitvariable

$$\tau = \omega_1 t \text{ mit } \omega_1 = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}, \text{ d.h. } T_B = \frac{T}{\pi}$$

eingeführen, so gilt

$$g(\tau) = \frac{a}{\pi} e^{-\tau 4/\pi} \varepsilon(\tau) \circ \bullet G(j\nu) = \frac{a}{4 + j\nu\pi},$$

$$u(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi(-1)^n \delta(\tau - n\pi), \quad 2\pi\text{-periodisch,}$$

$$c_{uk} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/4}^{7\pi/4} u(\tau) e^{-jk\tau} d\tau = \frac{1 - (-1)^k}{2},$$

d.h. $c_{uk} = 1$ für k ungerade, $c_{uk} = 0$ für k gerade. Insgesamt ist dann

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{yk} e^{jk\omega_1 t} \quad \text{mit } \omega_1 = \pi/T \quad \text{und}$$

$$c_{yk} = \frac{a}{4 + jk\pi} \quad \text{für } k \text{ ungerade, } c_{yk} = 0 \quad \text{für } k \text{ gerade.}$$

- (v) Die Rechteckschwingung ist T -periodisch. Wir wählen die Bezugsdauer wie unter (i) und erhalten über

$$c_{u,0} = \frac{1}{2}, \quad c_{uk} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}$$

für die Ausgangsfunktion

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{yk} e^{jk\omega_1 t} \quad \text{mit } \omega_1 = 2\pi/T \quad \text{und}$$

$$c_{y,0} = \frac{a}{8}, \quad c_{yk} = \frac{a}{4(2 + jk\pi)} \cdot \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2}.$$

■

A5.9 Ausgang als reelle Fourier-Reihe

Der Eingang ist 2π -periodisch und besitzt die Fourier-Koeffizienten

$$c_{uk} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-jk\tau} d\tau = \frac{1}{j2\pi k} (1 - e^{-jk\pi}); \quad c_{u,0} = \frac{1}{2},$$

$$c_{uk} = \begin{cases} 1/(jk\pi) & \text{für } k = \pm 1, \pm 3, \dots \\ 0 & \text{für } k = \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases}$$

Über

$$g(\tau) = h'(\tau) = 4e^{-4\tau} \varepsilon(\tau) \circ \bullet G(j\nu) = \frac{4}{4 + j\nu}$$

und $c_{yk} = G(jk)c_{uk}$ erhalten wir

$$c_{y,0} = \frac{1}{2}, \quad c_{yk} = \frac{4}{j\pi k(4 + jk)} \quad \text{für } k = \pm 1, \pm 3, \dots,$$

$$c_{yk} = 0 \quad \text{für } k = \pm 2, \pm 4, \dots$$

Wegen $c_{y,-k} = c_{yk}^*$ ist

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{yk} e^{jk\tau} = c_{y,0} + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} c_{yk} e^{jk\tau} \\ &= c_{y,0} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 |c_{yk}| \cos[k\tau + \operatorname{arc}(c_{yk})], \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \hat{y}_k \cos(k\tau + \varphi_k), \quad \text{wobei} \\ \hat{y}_k &= \frac{8}{\pi k \sqrt{16 + k^2}}, \quad \varphi_k = \pi + \arctan(4/k). \end{aligned}$$

A5.10 Summieren von Reihen

Unter Beachtung von $c_k = c_{-k}$ folgt aus

$$\tau^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\tau} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (e^{jk\tau} + e^{-jk\tau}) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2c_k \cos(k\tau)$$

mit den angegebenen Koeffizienten die reelle Reihendarstellung

$$\tau^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos(k\pi) \cos(k\tau),$$

und daraus

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(k\pi) \cos(k\tau) = \frac{1}{4} \left(\tau^2 - \frac{\pi^2}{3} \right).$$

Für $\tau = \pi$ erhalten wir speziell

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

und für $\tau = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12}.$$

Überprüfen Sie das Ergebnis mit dem Taschenrechner!

A6.1 Spannung an einer Spule

Wir schreiben den Stromverlauf in der Form

$$i(t) = \operatorname{Re} \left(\widehat{i}_1 e^{j\omega t} + \widehat{i}_3 e^{j3\omega t} + \widehat{i}_5 e^{j5\omega t} \right)$$

und erhalten mit $Z(j\omega) = R + j\omega L$ für den Spannungsverlauf

$$u(t) = \operatorname{Re} \left[\underbrace{Z(j\omega)\widehat{i}_1}_{\widehat{u}_1} e^{j\omega t} + \underbrace{Z(j3\omega)\widehat{i}_3}_{\widehat{u}_3} e^{j3\omega t} + \underbrace{Z(j5\omega)\widehat{i}_5}_{\widehat{u}_5} e^{j5\omega t} \right],$$

$$\widehat{u}_1 = Z(j\omega)\widehat{i}_1 = (10 + j10) \cdot 2 \text{ V} = 28,3 \text{ V} \cdot e^{j0,79},$$

$$\widehat{u}_3 = Z(j3\omega)\widehat{i}_3 = (10 + j30) \cdot 0,5 \text{ V} = 15,8 \text{ V} \cdot e^{j1,25},$$

$$\widehat{u}_5 = Z(j5\omega)\widehat{i}_5 = (10 + j50) \cdot 0,2 \text{ V} = 10,2 \text{ V} \cdot e^{j1,37},$$

also

$$u(t) = 28,3 \text{ V} \cdot \cos(\omega t + 0,79) + 15,8 \text{ V} \cdot \cos(3\omega t + 1,25) \\ + 10,2 \text{ V} \cdot \cos(5\omega t + 1,37).$$

■

A6.2 Oberschwingungsgehalt

Gemäß der Definition

$$k_u = \frac{\sqrt{|U_2|^2 + |U_3|^2 + \dots}}{U} = \sqrt{1 - \frac{|U_1|^2}{U^2}}$$

des Oberschwingungsgehalts benötigen wir den Effektivwert der Grundschiwingung ($\omega_1 = 2\pi/T_1$),

$$U_1 = \frac{\sqrt{2}}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} u(t) e^{-j\omega_1 t} dt = \frac{\sqrt{2}\widehat{u}}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \tau e^{-j\tau} d\tau = -j \frac{\sqrt{2}}{\pi} \widehat{u},$$

und den Gesamt-Effektivwert U ,

$$U^2 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} u^2(t) dt = \frac{\widehat{u}^2}{\pi^3} \int_0^{\pi} \tau^2 d\tau = \frac{\widehat{u}^2}{3}.$$

Daraus folgt

$$k_u = \sqrt{1 - \frac{2\widehat{u}^2}{\pi^2} \cdot \frac{3}{\widehat{u}^2}} = \sqrt{1 - \frac{6}{\pi^2}} = 0,626.$$

■

A6.3 Periodisch wiederholte Stromblöcke

Der Stromverlauf ist in Abb.A6.3a skizziert, wobei

$$\hat{i} = 10 \text{ A}, \quad T_1 = 20 \text{ ms}.$$

Wir erhalten damit den Gesamt-Effektivwert

$$I = \sqrt{\frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} i^2 dt} = \sqrt{\frac{\hat{i}^2}{2}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = 7,07 \text{ A},$$

den Durchschnittswert

$$I_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} i dt = \frac{\hat{i}}{2} = 5 \text{ A},$$

und die komplexen Effektivwerte

$$I_k = \frac{\sqrt{2}}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} i(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{\sqrt{2} \hat{i}}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-jk\tau} d\tau = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2},$$

also

$$|I_1| = \frac{\sqrt{2} \hat{i}}{\pi} = 4,50 \text{ A},$$

$$|I_3| = \frac{\sqrt{2} \hat{i}}{3\pi} = 1,50 \text{ A},$$

$$|I_5| = \frac{\sqrt{2} \hat{i}}{5\pi} = 0,90 \text{ A}.$$

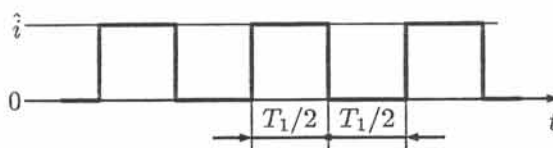


Abb.A6.3

A6.4 Leistungsfaktor

Aus der Wirkleistung

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^{\infty} |U_k| |I_k| \cos(\varphi_{uk} - \varphi_{ik}) = |U_1| |I_1| + |U_3| |I_3| \\ &= (1 + 0,8 \cdot 0,125) |U_1| |I_1| = 1,1 |U_1| |I_1| \end{aligned}$$

und der Scheinleistung

$$\begin{aligned} S &= UI = \sqrt{|U_1|^2 + |U_3|^2} \sqrt{|I_1|^2 + |I_3|^2} = \sqrt{(1 + 0,8^2)(1 + 0,125^2)} |U_1| |I_1| \\ &= 1,291 |U_1| |I_1| \end{aligned}$$

erhalten wir den Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{P}{S} = 0,825.$$

■

A6.5 Einweg-Gleichrichter mit Widerstand

Spannung und Strom verlaufen gemäß Abb.A6.5b. Damit gilt für die Wirkleistung

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ui \, d\varphi = \frac{(U\sqrt{2})^2}{2\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(\varphi) \, d\varphi = \frac{U^2}{2R},$$

für die Scheinleistung

$$S = UI, \quad I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{U}{R} \right)^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U}{\sqrt{2}R},$$

$$S = \frac{U^2}{\sqrt{2}R},$$

für die Blindleistung

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \frac{U^2}{R} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{U^2}{2R} = P,$$

und für den Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

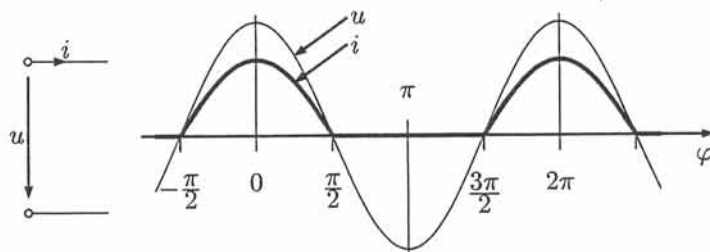


Abb.A6.5b

■

A6.6 Einweg-Gleichrichter mit Induktivität

- (i) Bezeichnungen nach Abb.A6.6b. Angenommen, an die Reihenschaltung wird eine Sinusspannung gelegt. Beim ersten Übergang der Spannung von

negativen zu positiven Werten – entsprechend $t = 0$ – wird die Diode leitend, $i \geq 0$, $u_D = 0$ und daher

$$u_L = L \frac{di}{dt} = U\sqrt{2} \sin(\omega t), \quad i(0) = 0, \quad \Rightarrow$$

$$i = I_0 [1 - \cos(\omega t)], \quad I_0 = \frac{U\sqrt{2}}{\omega L}.$$

Mit diesem Stromverlauf, dargestellt in Abb.A6.6c, sind die Bedingungen $i \geq 0$ und $u_D = u - u_L \leq 0$ für alle t erfüllt. Bei Berücksichtigung des Spulenwiderstands verläuft der Einschaltvorgang ähnlich, der Wert $i = 0$ wird jedoch etwas vor $\omega t = 2\pi$ erreicht. Bei $\omega t = 2\pi$ beginnt der Vorgang erneut.

(ii) Wegen

$$U_0 = 0, \quad U_1 = -jU, \quad \text{andere } U_k = 0,$$

$$I_0 = \frac{U\sqrt{2}}{\omega L}, \quad I_1 = -\frac{I_0}{\sqrt{2}}, \quad \text{andere } I_k = 0,$$

$$I = \sqrt{I_0^2 + |I_1|^2} = I_0 \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{U\sqrt{3}}{\omega L}$$

erhalten wir die Wirkleistung

$$P = \operatorname{Re}(U_1 I_1^*) = 0,$$

die Scheinleistung

$$S = UI = \frac{U^2\sqrt{3}}{\omega L},$$

die Blindleistung

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = S,$$

und den Leistungsfaktor

$$\lambda = \frac{P}{S} = 0.$$

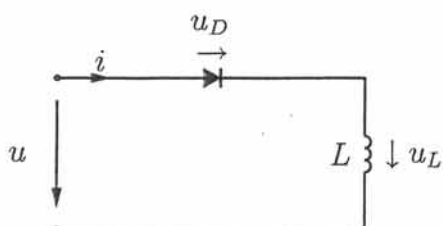


Abb.A6.6b

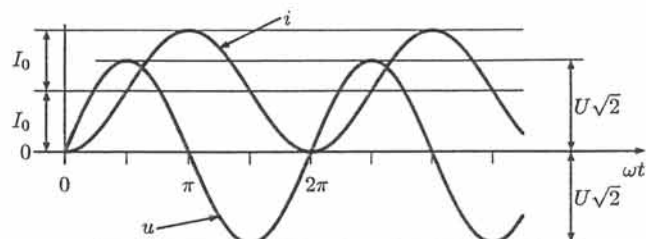


Abb.A6.6c

A6.7 Gleichstromsteller

(i) Für $0 \leq t < aT$ (S geschlossen, Diode sperrt) ist

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U_0 \implies i(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 + C_1 e^{-t/T_0} \right) \quad \text{mit} \quad T_0 = \frac{L}{R},$$

und für $aT \leq t < T$ (S offen, Diode leitet)

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \implies i(t) = \frac{U_0}{R} C_2 e^{-t/T_0}.$$

Die Konstanten C_1 und C_2 folgen aus den Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} i(aT^-) = i(aT^+) : \quad 1 + C_1 e^{-aT/T_0} &= C_2 e^{-aT/T_0}, \\ i(0) = i(T) : \quad 1 + C_1 &= C_2 e^{-T/T_0} \end{aligned}$$

zu

$$C_1 = -f(a), \quad C_2 = [1 - f(a)] e^{T/T_0} \quad \text{mit} \quad f(a) = \frac{1 - e^{-(1-a)T/T_0}}{1 - e^{-T/T_0}}.$$

Wir haben daher

$$\begin{aligned} 0 \leq t < aT : \quad i(t) &= \frac{U_0}{R} \left[1 - f(a) e^{-t/T_0} \right], \\ aT \leq t < T : \quad i(t) &= \frac{U_0}{R} [1 - f(a)] e^{(T-t)/T_0}. \end{aligned}$$

(ii) Mit $u_R = Ri$ ergibt sich der Durchschnittswert

$$\begin{aligned} \bar{u}_R &= \frac{1}{T} \int_0^T u_R dt \\ &= \frac{U_0}{T} \left\{ \int_0^{aT} [1 - f(a) e^{-t/T_0}] dt + \int_{aT}^T [1 - f(a)] e^{(T-t)/T_0} dt \right\} \\ &= \frac{U_0}{T} \left\{ aT + T_0 f(a) [e^{-aT/T_0} - 1] - T_0 [1 - f(a)] [1 - e^{(1-a)T/T_0}] \right\}, \\ \bar{u}_R &= aU_0. \end{aligned}$$

Der komplexe Effektivwert der Grundschiwingung ist aus

$$U_1 = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T u_R e^{-j\omega_1 t} dt \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

zu bestimmen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\sqrt{2}U_0}{T} \left\{ \int_0^{aT} \left[e^{-j\omega_1 t} - f(a) e^{-(1+j\omega_1 T_0)t/T_0} \right] dt \right. \\ &\quad \left. + [1 - f(a)] e^{T/T_0} \int_{aT}^T e^{-(1+j\omega_1 T_0)t/T_0} dt \right\} \end{aligned}$$

und erhalten

$$U_1 = \frac{\sqrt{2}U_0}{\pi} \frac{\sin(a\pi)}{1 + j\omega_1 T_0} e^{-ja\pi}.$$

Somit ist die gesuchte Grundschiwingung

$$u_{R1}(t) = |U_1| \sqrt{2} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{mit} \quad \omega_1 = 2\pi/T \quad \text{und} \\ |U_1| = U_0 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sin(a\pi)}{\sqrt{1 + (\omega_1 T_0)^2}}, \quad \varphi_1 = -a\pi - \arctan(\omega_1 T_0).$$

■

A6.8 Hystereseglied

Eingangssignal und Ausgangssignal sind in zeitlicher Relation in Abb.A6.8b dargestellt. Dabei ist τ_s durch $\widehat{u} \sin(\tau_s) = u_s$ definiert, also

$$\tau_s = \arcsin(u_s/\widehat{u}).$$

Für die Festlegung der Grundschiwingung brauchen wir den Fourier-Koeffizienten

$$c_{y1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\tau) e^{-j\tau} d\tau = e^{-j\tau_s} \frac{y_s}{2\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-j\tau} d\tau - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{-j\tau} d\tau \right] \\ = \frac{2y_s}{\pi} e^{-j\tau_s}$$

und erhalten mit $c_{y,-1} = c_{y1}^*$

$$y_1(\tau) = \frac{2y_s}{\pi} \left[e^{-j(\tau-\tau_s)} + e^{j(\tau-\tau_s)} \right] = \frac{4}{\pi} y_s \cos(\tau - \tau_s).$$

Demnach ist die Amplitude der Grundschiwingung

$$\widehat{y}_1 = \frac{4}{\pi} y_s$$

und deren Phasenverschiebungswinkel gegenüber dem Eingangssignal

$$\varphi_1 = \varphi_{y1} - \varphi_{u1} = -\tau_s = -\arcsin(u_s/\widehat{u}).$$

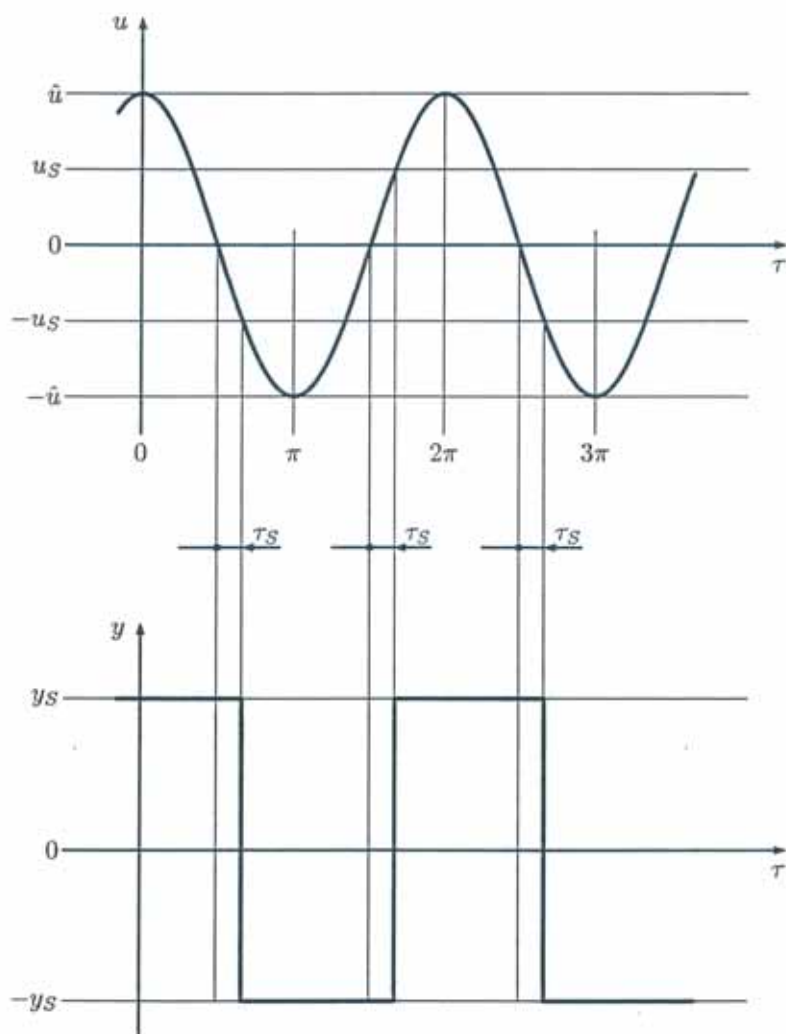


Abb.A6.8b

A6.9 Nichtlinearer Widerstand

- (i) Die Spannungs-Strom-Kennlinie, dargestellt in Abb.A6.9, ergibt sich durch Auswerten der angegebenen Elementgleichung.
- (ii) Einsetzen von $u = 100 \text{ V } \sqrt{2} \cos(\omega t)$ in die Elementgleichung liefert zunächst

$$\frac{i}{1 \text{ A}} = 5\sqrt{2} \cos(\omega t) + 8 \cos^2(\omega t) + \left(\frac{10\sqrt{2}}{9}\right)^3 \cos^3(\omega t).$$

Mit den Umformungen

$$\begin{aligned}\cos^2(\alpha) &= \left[\frac{1}{2} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \right]^2 = \frac{1}{4} (e^{j2\alpha} + 2 + e^{-j2\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} [1 + \cos(2\alpha)], \\ \cos^3(\alpha) &= \left[\frac{1}{2} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \right]^3 = \frac{1}{8} (e^{j3\alpha} + 3e^{j\alpha} + 3e^{-j\alpha} + e^{-j3\alpha}) \\ &= \frac{1}{4} [3\cos(\alpha) + \cos(3\alpha)]\end{aligned}$$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}i &= 4 \text{ A} && \text{Gleichanteil} \\ &+ 9,98 \text{ A} \cos(\omega t) && \text{Grundschwingung} \\ &+ 4 \text{ A} \cos(2\omega t) + 0,97 \text{ A} \cos(3\omega t) && \text{Oberschwingungen.}\end{aligned}$$

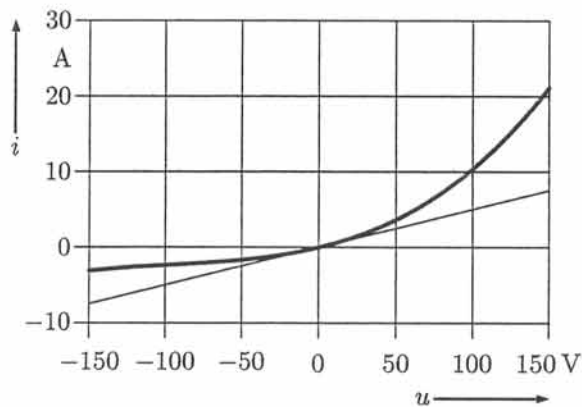


Abb.A6.9

A6.10 Mischer

Mit den Bezeichnungen aus Abb.A6.10b gilt

$$\begin{aligned}i &= i_3 - i_4 = a(u_3 - u_4) + b(u_3^2 - u_4^2) = 2au_1 + 4bu_1u_2 \\ &= 2a\hat{u}_1 \cos(\omega_1 t) + 4b\hat{u}_1\hat{u}_2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t),\end{aligned}$$

als Summe von Sinusschwingungen also

$$\begin{aligned}i(t) &= 2a\hat{u}_1 \cos(\omega_1 t) \\ &+ 2b\hat{u}_1\hat{u}_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t] + 2b\hat{u}_1\hat{u}_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t].\end{aligned}$$

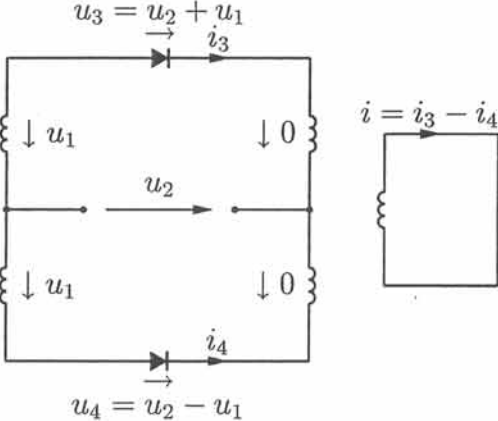


Abb.A6.10b



A7.1 Laplace-Transformation mit Tabelle

Direkt oder über Linearkombinationen entnehmen wir einer Laplace-Tabelle

- (i) $X(s) = \frac{2}{s+3}$,
- (ii) $X(s) = \frac{32}{(s+2)^2 + 64} = \frac{32}{s^2 + 4s + 68}$,
- (iii) $X(s) = \frac{12}{s^2 + 16}$,
- (iv) $X(s) = \frac{2}{(s+3)^2} = \frac{2}{s^2 + 6s + 9}$,
- (v) $X(s) = \frac{5}{s+4} - \frac{3}{s+7} = \frac{2s+23}{(s+4)(s+7)} = \frac{2s+23}{s^2 + 11s + 28}$,
- (vi) $X(s) = 5 + \frac{4}{s}$.

A7.2 Laplace-Rücktransformation mit Tabelle

(i) Partialbruchzerlegung liefert

$$X(s) = \frac{8s-1}{(s+1)(s+2)} = -\frac{9}{s+1} + \frac{17}{s+2} \bullet \circ$$

$$x(\tau) = (-9e^{-\tau} + 17e^{-2\tau}) \varepsilon(\tau).$$

(ii) Das Nennerpolynom besitzt komplexe Wurzeln. Wir formen es in eine Summe zweier Quadrate um:

$$X(s) = \frac{4}{(s+1)^2 + 4^2} \bullet \circ \quad x(\tau) = e^{-\tau} \sin(4\tau) \varepsilon(\tau).$$

(iii) Analog zu (ii) haben wir

$$X(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} \bullet \circ \quad x(\tau) = e^{-\tau} \cos(2\tau) \varepsilon(\tau)$$

(iv) und

$$X(s) = \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2 + 2^2} \bullet \circ \quad x(\tau) = e^{-\tau} \left[\cos(2\tau) + \frac{1}{2} \sin(2\tau) \right] \varepsilon(\tau).$$

A7.3 Partialbruchzerlegungen(i) Das Nennerpolynom besitzt die vier einfachen Wurzeln $(\pm 1 \pm j)a$. Nach dem Bestimmen der zugehörigen Residuen, z.B. über

$$r_i = \frac{Z(s)}{N'(s)} \Big|_{p_i} = \frac{a^4}{2p_i^2},$$

ergibt sich die Partialbruchzerlegung

$$X(s) = \frac{a^2}{j4} \left[\frac{1}{s - (1+j)a} + \frac{1}{s + (1+j)a} - \frac{1}{s - (-1+j)a} - \frac{1}{s + (-1+j)a} \right]$$

und nach Rücktransformation

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{a^2}{j^4} \left[e^{(1+j)a\tau} + e^{-(1+j)a\tau} - e^{(-1+j)a\tau} - e^{-(-1+j)a\tau} \right] \varepsilon(\tau) \\ &= \frac{a^2}{j^4} \left[e^{a\tau} (e^{ja\tau} - e^{-ja\tau}) - e^{-a\tau} (e^{ja\tau} - e^{-ja\tau}) \right] \varepsilon(\tau) \\ &= \frac{a^2}{2} (e^{a\tau} - e^{-a\tau}) \sin(a\tau) \varepsilon(\tau), \\ x(\tau) &= a^2 \sinh(a\tau) \sin(a\tau) \varepsilon(\tau). \end{aligned}$$

(ii) Es gibt mehrere Möglichkeiten der systematischen Partialbruchzerlegung. Mit etwas Übung ist jedoch sofort

$$X(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1}$$

erkennbar, d.h.

$$x(\tau) = [\tau - \sin(\tau)] \varepsilon(\tau).$$

(iii) Partialbruchzerlegung ist hier nicht nötig. Mit

$$s^{-2} \bullet \circ \tau \varepsilon(\tau), \quad (s+1)^{-3} \bullet \circ \frac{1}{2} \tau^2 e^{-\tau} \varepsilon(\tau)$$

und dem Zeitverschiebungssatz haben wir

$$x(\tau) = (\tau - 1) \varepsilon(\tau - 1) + \frac{1}{2} (\tau - 2)^2 e^{2-\tau} \varepsilon(\tau - 2).$$

■

A7.4 Zeitverschiebung

Ausgehend von

$$\begin{aligned} x_1(\tau) = \varepsilon(\tau) &\circ \bullet X_1(s) = 1/s, \\ x_2(\tau) = \tau \varepsilon(\tau) &\circ \bullet X_2(s) = 1/s^2 \end{aligned}$$

erhalten wir mit

(i) Abb.A7.4a

$$x(\tau) = \tau \varepsilon(\tau) - 5 \varepsilon(\tau) \circ \bullet X(s) = 1/s^2 - 5/s = (1 - 5s)/s^2;$$

(ii) Abb.A7.4b

$$x(\tau) = x_2(\tau - 5) \circ \bullet X(s) = e^{-5s} X_2(s) = e^{-5s}/s^2;$$

(iii) Abb.A7.4c

$$\begin{aligned} x(\tau) &= (\tau - 5) \varepsilon(\tau - 5) + 5 \varepsilon(\tau - 5) = x_2(\tau - 5) + 5x_1(\tau - 5) \circ \bullet \\ X(s) &= e^{-5s} [X_2(s) + 5X_1(s)] = (1/s^2 + 5/s) e^{-5s}. \end{aligned}$$

Analog ist

$$(iv) \quad x(\tau) = 5e^6 e^{-2\tau} \varepsilon(\tau) \quad \circ \bullet \quad X(s) = \frac{5e^6}{s+2};$$

$$(v) \quad x(\tau) = 5e^{-2(\tau-3)} \varepsilon(\tau-3) \quad \circ \bullet \quad X(s) = \frac{5e^{-3s}}{s+2};$$

$$(vi) \quad x(\tau) = 5e^{-6} e^{-2(\tau-3)} \varepsilon(\tau-3) \quad \circ \bullet \quad X(s) = 5e^{-6} \frac{e^{-3s}}{s+2}.$$

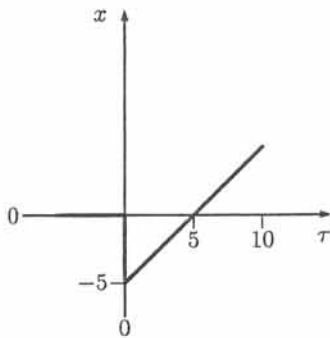


Abb.A7.4a

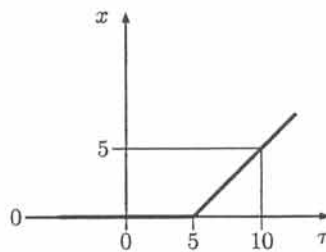


Abb.A7.4b

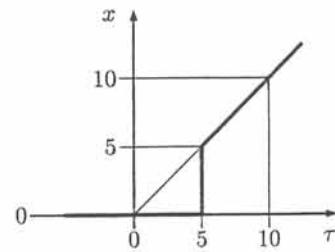


Abb.A7.4c

A7.5 Verschobener Dreieckimpuls

Das Signal lässt sich in der Form

$$x(\tau) = 2a[(\tau - \tau_1) \varepsilon(\tau - \tau_1) - 2(\tau - \tau_1 - 1/2) \varepsilon(\tau - \tau_1 - 1/2) + (\tau - \tau_1 - 1) \varepsilon(\tau - \tau_1 - 1)]$$

darstellen. Mit $\tau \varepsilon(\tau) \circ \bullet 1/s^2$ und dem Zeitverschiebungssatz folgt dann sofort

$$X(s) = \frac{2a}{s^2} (1 - 2e^{-s/2} + e^{-s}) e^{-s\tau_1} = 2a \left(\frac{1 - e^{-s/2}}{s} \right)^2 e^{-s\tau_1}.$$

A7.6 Laplace- und Fourier-Transformation im Vergleich

Wir formen das Signal zuerst passend um,

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{1}{4} (e^{j\tau} + e^{-j\tau}) (e^{j2\tau} + e^{-j2\tau}) \varepsilon(\tau) \\ &= \frac{1}{4} (e^{j3\tau} + e^{j\tau} + e^{-j\tau} + e^{-j3\tau}) \varepsilon(\tau) \\ &= \frac{1}{2} [\cos(\tau) + \cos(3\tau)] \varepsilon(\tau), \end{aligned}$$

und erhalten daraus die

(i) Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}[x(\tau)] = \frac{1}{2} \left(\frac{s}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+9} \right) = \frac{s(s^2+5)}{(s^2+1)(s^2+9)},$$

(ii) Fourier-Transformierte

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[x(\tau)] &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} [\delta(\nu - 1) + \delta(\nu + 1)] + \frac{j\nu}{1 - \nu^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} [\delta(\nu - 3) + \delta(\nu + 3)] + \frac{j\nu}{9 - \nu^2} \right\} \\ &= \underbrace{\frac{s(s^2 + 5)}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}}_{\text{mit } s=j\nu} + \frac{\pi}{4} [\delta(\nu + 3) + \delta(\nu + 1) + \delta(\nu - 1) + \delta(\nu - 3)]. \end{aligned}$$

■

A7.7 Potenzreihe

Konvergenz vorausgesetzt, korrespondiert der angegebenen Taylor-Reihe wegen

$$X(s) = \mathcal{L} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \tau^n \varepsilon(\tau) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathcal{L} \left[\frac{\tau^n}{n!} \varepsilon(\tau) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{s^{n+1}}$$

die Laurent-Reihe um den Nullpunkt

$$X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} s^{-n}.$$

■

A7.8 Faltungen

(i) Unter Beachtung von

$$x_1(\tau) = e^{a\tau} \varepsilon(\tau) \quad \circ \bullet \quad X_1(s) = \frac{1}{s - a}$$

überträgt sich das Faltungsprodukt gemäß

$$x(\tau) = \underbrace{x_1(\tau) * \dots * x_1(\tau)}_{n \text{ Faktoren}} \quad \circ \bullet \quad X(s) = X_1(s)^n = (s - a)^{-n}$$

in den Unterbereich. Rücktransformation liefert

$$x(\tau) = \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{a\tau} \varepsilon(\tau).$$

(ii) Mit $\varepsilon(\tau) \circ \bullet 1/s$ gilt

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{a - b}{s(s - a)(s - b)} = \frac{a - b}{ab} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{s - a} - \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{s - b}, \\ x(\tau) &= \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} e^{a\tau} - \frac{1}{b} e^{b\tau} \right) \varepsilon(\tau) = \left(\frac{e^{a\tau} - 1}{a} - \frac{e^{b\tau} - 1}{b} \right) \varepsilon(\tau). \end{aligned}$$

■

A7.9 Rechtsseitige periodische Signale

Wir definieren

$$x_1(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau < 0- \\ x(\tau) & \text{für } 0- \leq \tau < \tau_1- \\ 0 & \text{für } \tau \geq \tau_1- \end{cases}$$

mit der zugehörigen Laplace-Transformierten

$$X_1(s) = \mathcal{L}[x_1(\tau)] = \int_{0-}^{\tau_1-} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Dann ist

$$x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(\tau - k\tau_1),$$

und der Zeitverschiebungssatz liefert

$$\mathcal{L}[x(\tau)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}[x_1(\tau - k\tau_1)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k\tau_1 s} X_1(s) = X_1(s) \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-s\tau_1})^k,$$

wobei (geometrische Reihe)

$$\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-s\tau_1})^k = \frac{1}{1 - e^{-s\tau_1}} \quad \text{für } |e^{-s\tau_1}| < 1,$$

also

$$\mathcal{L}[x(\tau)] = \frac{X_1(s)}{1 - e^{-s\tau_1}}.$$

 $X_1(s)$ von oben eingesetzt führt auf die zu zeigende Formel.

$$(i) \quad \tau_1 = 2, \quad X_1(s) = \int_0^1 e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{s} (1 - e^{-s}),$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - e^{-2s})} = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}.$$

$$(ii) \quad X_1(s) = \int_0^{\tau_1} \frac{\tau}{\tau_1} e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{s^2 \tau_1} [1 - (1 + s\tau_1) e^{-s\tau_1}],$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1 - (1 + s\tau_1) e^{-s\tau_1}}{s^2 \tau_1 (1 - e^{-s\tau_1})} = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s\tau_1} - \frac{1}{e^{s\tau_1} - 1} \right).$$

$$(iii) \quad \tau_1 = \pi, \quad x_1(\tau) = \sin(\tau)\varepsilon(\tau) + \sin(\tau - \pi)\varepsilon(\tau - \pi),$$

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} e^{-s\pi} = \frac{1 + e^{-s\pi}}{s^2 + 1},$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \cdot \frac{1 + e^{-s\pi}}{1 - e^{-s\pi}} = \frac{\coth(s\pi/2)}{s^2 + 1}.$$

(iv) $\tau_1 = 2\pi$, $X_1(s) = \frac{1 + e^{-s\pi}}{s^2 + 1}$, wie (iii),

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \cdot \frac{1 + e^{-s\pi}}{1 - e^{-s2\pi}} = \frac{1}{(s^2 + 1)(1 - e^{-s\pi})}.$$

A7.10 Anfangs- und Endwertsatz

Wir bilden die Grenzwerte von $sX(s)$ für $s \rightarrow 0$ und $s \rightarrow \infty$.

(i) $\lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{7s}{s^3 + 2s^2 + 9s + 7} \right) = 0 \Rightarrow$

$$x(0+) = 0,$$

da kein Anfangsstoß vorliegt.

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sX(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{7s}{s^3 + 2s^2 + 9s + 7} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$x(\infty) = 0,$$

da die Wurzeln des Nennerpolynoms von $X(s)$ alle in der linken Halbebene liegen.

(ii) $\lim_{s \rightarrow \infty} [sX(s)] = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{s^2 + 7s - 15} \right) = 0 \Rightarrow$

$$x(0+) = 0,$$

da kein Anfangsstoß vorliegt.

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sX(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{2}{s^2 + 7s - 15} \right) = -\frac{2}{15}. \text{ Achtung:}$$

$$x(\infty) \neq -\frac{2}{15},$$

da eine Wurzel des Nennerpolynoms von $X(s)$ in der rechten Halbebene liegt, also kein stationärer Endwert existiert.

A8.1 Differentialgleichungen

Laplace-Transformation der Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$(i) \quad sY(s) + 7Y(s) = 2U(s), \quad U(s) = 1/s \quad \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{2}{s(s+7)} = \frac{2}{7} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+7} \right) \bullet \circ$$

$$y(\tau) = \frac{2}{7} (1 - e^{-7\tau}) \varepsilon(\tau), \quad \text{Sprungantwort.}$$

$$(ii) \quad sY(s) + 5 + 3Y(s) = sU(s) + 2U(s), \quad U(s) = 25s/(s^2 + 16) \quad \Rightarrow$$

$$Y(s) = -\frac{5}{s+3} + \frac{s+2}{s+3} \cdot \frac{25s}{s^2+16} = -\frac{2}{s+3} + \frac{22s-16}{s^2+16} \bullet \circ$$

$$y(\tau) = -2e^{-3\tau} + 22 \cos(4\tau) - 4 \sin(4\tau), \quad \tau > 0.$$

y springt bei $\tau = 0$.

$$(iii) \quad s^2Y(s) - 2s + 3 + 7sY(s) - 14 + 12Y(s) = 2sU(s) + 2U(s), \quad U(s) = 1/s \quad \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{2s+11}{s^2+7s+12} + \frac{2(s+1)}{s(s^2+7s+12)} = \frac{2s^2+13s+2}{s(s+3)(s+4)}$$

$$= \frac{1}{6s} + \frac{19}{3(s+3)} - \frac{9}{2(s+4)} \bullet \circ$$

$$y(\tau) = \frac{1}{6} + \frac{19}{3}e^{-3\tau} - \frac{9}{2}e^{-4\tau}, \quad \tau > 0.$$

y' springt bei $\tau = 0$.

A8.2 Integralgleichung

Die Integralgleichung lässt sich in der Form

$$x(\tau) = \tau + 2 \cos(\tau) * x(\tau), \quad \tau > 0,$$

schreiben. Nach Laplace-Transformation erhalten wir

$$X(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2s}{s^2+1} X(s)$$

und daraus

$$X(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s-1)^2} = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{(s-1)} + \frac{2}{(s-1)^2} \bullet \circ$$

$$x(\tau) = \tau + 2 + 2(\tau-1)e^\tau, \quad \tau \geq 0.$$

A8.3 Differentialgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten

Unter Beachtung der Laplace-Korrespondenzen

$$\begin{aligned}x'(\tau) &\circ\bullet sX(s) - x(0), \\x''(\tau) &\circ\bullet s^2X(s) - sx(0) - x'(0), \\ \tau x(\tau) &\circ\bullet -dX(s)/ds\end{aligned}$$

erhalten wir aus der vorliegenden Differentialgleichung

$$-\frac{d}{ds} [s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + 2[sX(s) - x(0)] - \frac{d}{ds}X(s) = 0,$$

also den Ausdruck

$$\frac{d}{ds}X(s) = -\frac{x(0)}{s^2+1} \circ\bullet -\tau x(\tau) = -x(0)\sin(\tau), \quad \tau > 0.$$

Die gesuchte Lösungsfunktion ist daher

$$x(\tau) = x(0)\frac{\sin(\tau)}{\tau}, \quad \tau > 0.$$

A8.4 Differential-Differenzgleichung

Laplace-Transformation der Gleichung ergibt

$$sY(s) + e^{-s}Y(s) = \frac{1}{s},$$

also

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+e^{-s})}.$$

Zur Rücktransformation entwickeln wir die rechte Seite als geometrische Reihe,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(1+e^{-s}/s)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-ns}}{s^{n+2}},$$

und benutzen

$$\frac{1}{s^{n+2}} \circ\bullet \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon(\tau) \implies \frac{e^{-ns}}{s^{n+2}} \circ\bullet \frac{(\tau-n)^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon(\tau-n),$$

$$y(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\tau-n)^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon(\tau-n) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-\tau)^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon(\tau-n).$$

Die Reihe ist endlich, sie bricht für $n > \tau$ ab.

A8.5 Eingang mit Verzögerung

Unter Beachtung der Korrespondenzen

$$u(\tau) = \varepsilon(\tau) \circ \bullet 1/s,$$

$$u'(\tau) = \delta(\tau) \circ \bullet 1,$$

$$u(\tau - 1) = \varepsilon(\tau - 1) \circ \bullet e^{-s}/s,$$

liefert die Laplace-Transformation ($Y(s) = H(s) \bullet \circ h(\tau)$)

$$H(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{3}{s(s+2)}e^{-s} = \frac{1}{s+2} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right) e^{-s},$$

nach Rücktransformation also die Sprungantwort

$$h(\tau) = e^{-2\tau} \varepsilon(\tau) - \frac{3}{2} \left[1 - e^{-2(\tau-1)} \right] \varepsilon(\tau - 1),$$

gezeichnet in Abb.A8.5.

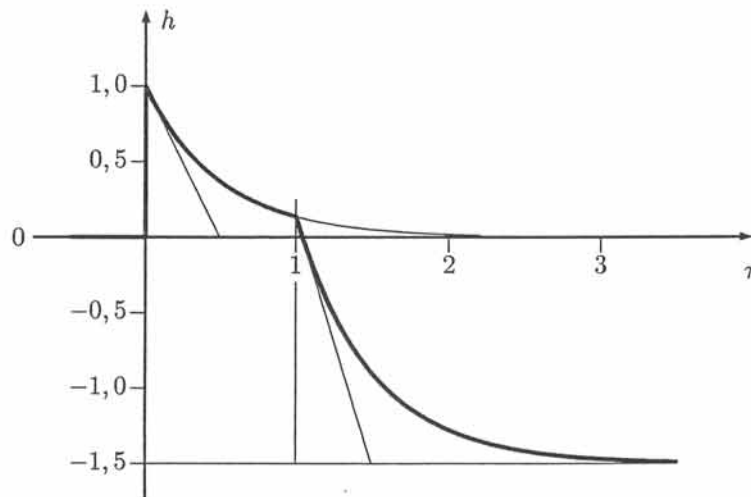


Abb.A8.5

A8.6 Identifikation

Aus den Laplace-Transformierten

$$U(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)},$$

$$Y_{0Z}(s) = 2 \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+4} \right) = \frac{6}{(s+1)(s+4)}$$

erhalten wir die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y_{0Z}(s)}{U(s)} = \frac{3(s+3)}{(s+2)(s+4)} = \frac{Q(s)}{P(s)},$$

aus der sich sofort das charakteristische Polynom $P(s)$ und das Nullstellenpolynom $Q(s)$ ablesen lassen,

$$P(s) = (s + 2)(s + 4) = s^2 + 6s + 8, \quad Q(s) = 3(s + 3).$$

Die System-Differentialgleichung ist daher

$$y'' + 6y' + 8y = 3u' + 9u.$$

■

A8.7 Stoßantworten

Stoßantwort und Übertragungsfunktion bilden ein Laplace-Transformationspaar.

(i)

$$G(s) = \frac{3s + 1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3s + 1}{(s + 1)(s + 2)} = -\frac{2}{s + 1} + \frac{5}{s + 2} \bullet \circ$$

$$g(\tau) = (-2e^{-\tau} + 5e^{-2\tau})\varepsilon(\tau), \quad \text{Abb.A8.7a.}$$

(ii)

$$G(s) = \frac{s + 2}{s + 1} = 1 + \frac{1}{s + 1} \bullet \circ$$

$$g(\tau) = \delta(\tau) + e^{-\tau}\varepsilon(\tau), \quad \text{Abb.A8.7b.}$$

(iii)

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 0,4s + 4,04} = \frac{2}{(s + 0,2)^2 + 2^2} \bullet \circ$$

$$g(\tau) = e^{-0,2\tau} \sin(2\tau)\varepsilon(\tau), \quad \text{Abb.A8.7c.}$$

(iv)

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 0,2s + 4,01} = \frac{1}{(s - 0,1)^2 + 2^2} \bullet \circ$$

$$g(\tau) = \frac{1}{2}e^{0,1\tau} \sin(2\tau)\varepsilon(\tau), \quad \text{Abb.A8.7d.}$$

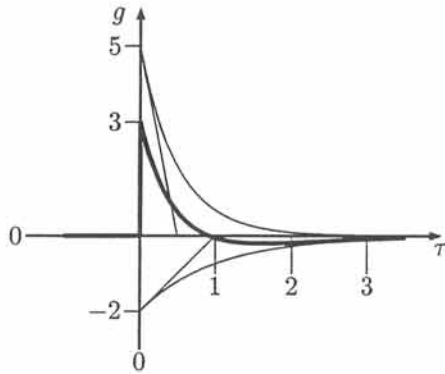


Abb.A8.7a

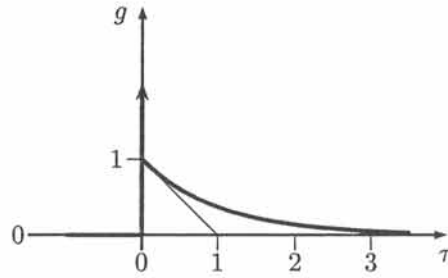


Abb.A8.7b

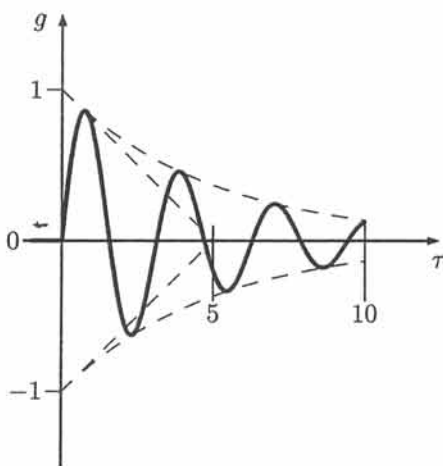


Abb.A8.7c

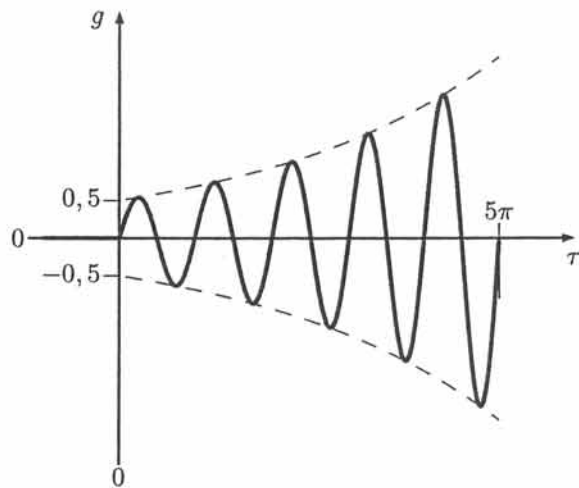


Abb.A8.7d

A8.8 Sprungantworten

Aus $g(\tau) = h'(\tau)$ folgt $G(s) = sH(s)$.

(i)

$$H(s) = \frac{1}{s(s+2)^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2} \right] \quad \bullet \circ$$

$$h(\tau) = \frac{1}{4} [1 - (1 + 2\tau)e^{-2\tau}] \varepsilon(\tau), \quad \text{Abb.A8.8a.}$$

(ii)

$$H(s) = \frac{s+1}{s(s+2)^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} \right] \bullet \circ$$

$$h(\tau) = \frac{1}{4} [1 - (1-2\tau)e^{-2\tau}] \varepsilon(\tau), \quad \text{Abb.A8.8b.}$$

(iii)

$$H(s) = \frac{s-1}{s(s+2)^2} = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{s} + \frac{1}{s+2} + \frac{6}{(s+2)^2} \right] \bullet \circ$$

$$h(\tau) = \frac{1}{4} [-1 + (1+6\tau)e^{-2\tau}] \varepsilon(\tau), \quad \text{Abb.A8.8c.}$$

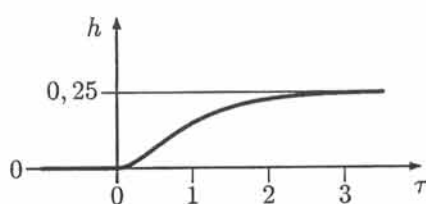


Abb.A8.8a

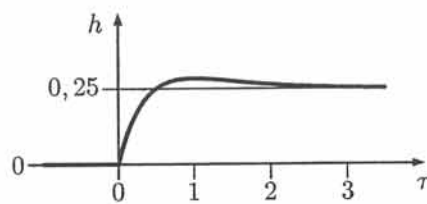


Abb.A8.8b

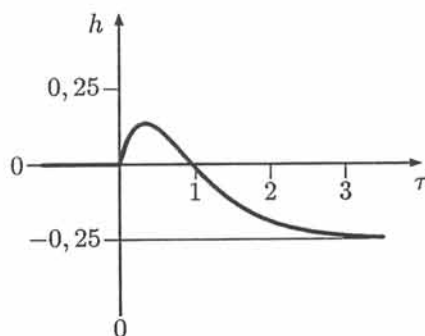


Abb.A8.8c

A8.9 Übergangsverhalten

(i) Eine einfache Wechselstromanalyse der Schaltung liefert (Abb.A8.9b)

$$U_A = -\frac{R_2}{2R_1} U_E - \frac{R_2}{2} \left(\frac{U_E}{R_1} + \frac{R_2}{2R_1} \cdot \frac{U_E}{Z} \right), \quad Z = R + \frac{1}{j\omega C},$$

$$= -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{4Z} \right) U_E,$$

$$\frac{U_A}{U_E} = -\frac{R_2}{R_1} \left[1 + \frac{j\omega R_2 C}{4(1 + j\omega RC)} \right],$$

mit Bezugswerten $U_{EB} = U_{AB}$, $T_B = RC$ und mit $\nu = \omega RC$, $j\nu \mapsto s$ also die Übertragungsfunktion

$$G(s) = -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{4R} \cdot \frac{s}{s+1} \right).$$

- (ii) Aus der Übertragungsfunktion folgt die Laplace-Transformierte der Sprungantwort und daraus durch Rücktransformation die Sprungantwort selbst,

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s) = -\frac{R_2}{R_1} \left(\frac{1}{s} + \frac{R_2}{4R} \cdot \frac{1}{s+1} \right) \bullet \circ$$

$$h(\tau) = -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{4R} e^{-\tau} \right) \varepsilon(\tau), \quad \tau = \frac{t}{RC}.$$

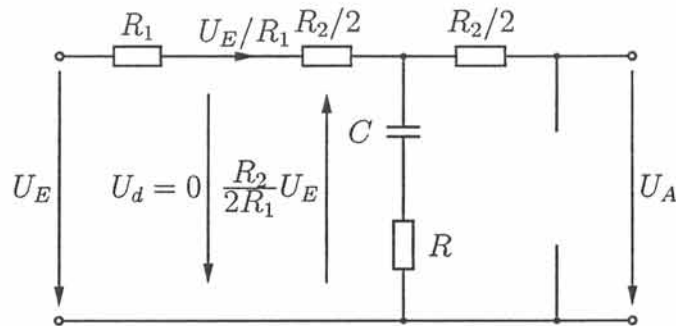


Abb. A8.9b

A8.10 Antwort auf kurzen Rechteckimpuls

- (i) Mit $\delta(\tau) \bullet \circ 1$ erhalten wir durch Laplace-Transformation der Differentialgleichung

$$Y(s) = \frac{s+1/2}{s+1} U(s) = 1 - \frac{1}{2(s+1)} \bullet \circ$$

$$y(\tau) = \delta(\tau) - \frac{1}{2} e^{-\tau} \varepsilon(\tau).$$

- (ii) In Originalvariablen entspricht $y(\tau)$ der Verlauf

$$u_1(t) = U_{AB} y\left(\frac{t}{T_B}\right) = \frac{U_0 t_0}{T_B} \left[\delta\left(\frac{t}{T_B}\right) - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{T_B}} \varepsilon\left(\frac{t}{T_B}\right) \right],$$

$$u_1(t) = U_0 t_0 \delta(t) - \frac{U_0 t_0}{RC} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) \varepsilon(t),$$

skizziert in Abb. A8.10c.

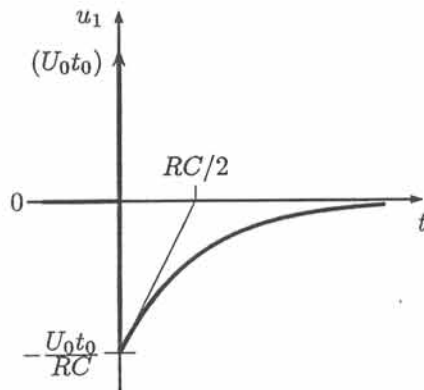


Abb.A8.10c

A8.11 Kombination zweier Differenzierer

(i) Aus dem Strukturbild folgt

$$y(\tau) = -\frac{d}{d\tau} \left[u(\tau) - \frac{d}{d\tau} y(\tau) \right],$$

also die System-Differentialgleichung

$$y'' - y = u',$$

der die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s}{s^2 - 1} = \frac{s}{(s+1)(s-1)}$$

zugeordnet ist. Von den beiden Polen $p_1 = -1$ und $p_2 = 1$ liegt der zweite in der rechten Halbebene. Das System ist demnach *instabil*.

(ii) Aus der Übertragungsfunktion ergibt sich die Laplace-Transformierte der Sprungantwort, deren Rücktransformation über eine einfache Partialbruchzerlegung die Sprungantwort liefert:

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1} \right) \bullet \circ$$

$$h(\tau) = \frac{1}{2} (e^\tau - e^{-\tau}) \varepsilon(\tau) = \sinh(\tau) \varepsilon(\tau).$$

A8.12 Kombination zweier Integratoren

Das Strukturbild führt auf die Übertragungsfunktion,

$$Y = \frac{1}{s} \left(U - \frac{1}{s} Y \right), \quad \left(1 + \frac{1}{s^2} \right) Y = \frac{1}{s} U,$$

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Die Sprungantwort folgt dann über

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \quad \bullet \text{---} \circ$$

$$h(\tau) = \sin(\tau) \varepsilon(\tau),$$

ist also eine rechtsseitige Sinusschwingung.

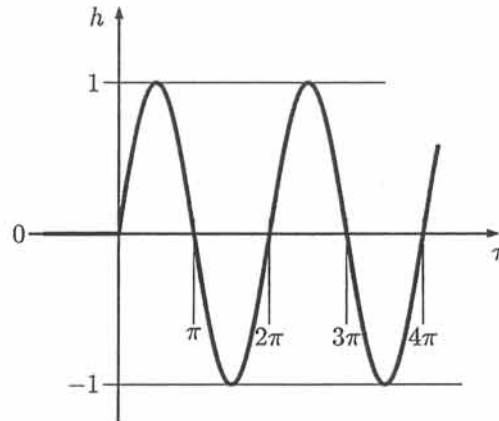


Abb.A8.12b

A8.13 Kombination von Systemen

Mit den Kombinationsregeln folgt sofort

$$G(s) = \left(\frac{1}{s} + \frac{5}{s+2} \right) \frac{10(s+3)}{s^2+3s+2} \cdot \frac{5(s+1)}{s+2}$$

$$= \frac{50(6s+2)(s+3)(s+1)}{s(s+2)^2(s^2+3s+2)} = 300 \frac{(s+1/3)(s+3)}{s(s+2)^3}.$$

A8.14 Systeme mit Rückführung

Ist $G_1 = Q_1/P_1$ die Übertragungsfunktion des Vorwärtszweiges und $G_2 = Q_2/P_2$ die der Rückführung, so ist

$$G = \frac{Q}{P} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} = \frac{Q_1 P_2}{P_1 P_2 + Q_1 Q_2}$$

die Übertragungsfunktion der Kombination.

(i)

$$G(s) = \frac{100(s+0,1)(s+0,2)}{(s+10)(s+0,2) + 100(s+0,1)(s+2)} = \frac{100(s+0,1)(s+0,2)}{101s^2 + 220,2s + 22}$$

$$= \frac{0,990(s+0,1)(s+0,2)}{(s+2,075)(s+0,105)}.$$

Pole: $p_1 = -2,075; \quad p_2 = -0,105;$
 Nullstellen: $q_1 = -0,1; \quad q_2 = -0,2.$

(ii)

$$G(s) = \frac{10(s-1)(s+1)}{(s+2)(s+1) + 10(s-1)} = \frac{10(s-1)(s+1)}{s^2 + 13s - 8}$$

$$= \frac{10(s-1)(s+1)}{(s+13,589)(s-0,589)}.$$

Pole: $p_1 = -13,589; \quad p_2 = +0,589;$
 Nullstellen: $q_1 = 1; \quad q_2 = -1.$

Obwohl die Teilsysteme stabil sind, ist das Gesamtsystem instabil. ■

A8.15 System-Differentialgleichung aus Strukturdiagramm

Bezeichnet Y_0 die Laplace-Transformierte des Ausgangssignals des ersten Integrators, so gilt

$$Y_0 = \frac{1}{s}(U - a_0 Y), \quad Y = \frac{1}{s}(Y_0 - a_1 Y).$$

Nach Elimination von Y_0 folgt daraus die Beziehung

$$(s^2 + a_1 s + a_0) Y = U,$$

die der System-Differentialgleichung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = u$$

entspricht. ■

A8.16 Stabilisierung

Mit $G_1(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ gilt

(i) für S offen:

$$H(s) = \frac{1}{s} G_1(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \bullet \circ$$

$$h(\tau) = (\tau - 1 + e^{-\tau}) \varepsilon(\tau).$$

Das System ist grenzstabil, die Sprungantwort wächst unbeschränkt; Abb.A8.16b(i).

(ii) Für S geschlossen:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1},$$

$$H(s) = \frac{1}{s} G(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + s + 1}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{(s+1/2) + 1/2}{(s+1/2)^2 + 3/4} \bullet \circ$$

$$h(\tau) = \left[1 - e^{-\tau/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\tau/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau\right) \right] \varepsilon(\tau),$$

also

$$h(\tau) = \left[1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\tau/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tau + \frac{\pi}{3}\right) \right] \varepsilon(\tau).$$

Das System ist nun stabil, die Sprungantwort schwingt auf den Endwert $h(\infty) = 1$ ein; Abb.A8.16b(ii).

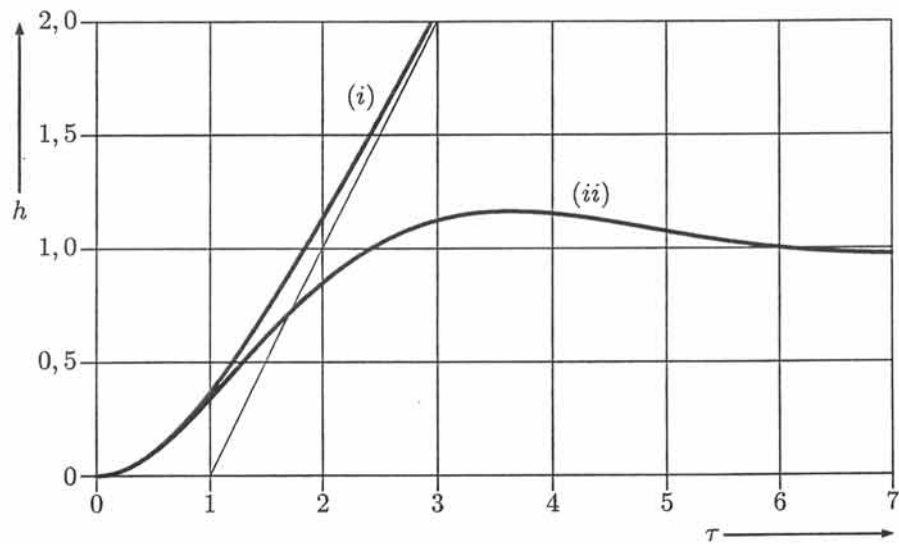


Abb.A8.16b

A8.17 Partialbruchzerlegung und Parallelschaltung

Die gegebene Übertragungsfunktion lässt sich durch Partialbruchzerlegung additiv aufspalten,

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)(s+c)} = \frac{r_1}{s+a} + \frac{r_2}{s+b} + \frac{r_3}{s+c}.$$

Dies entspricht der Parallelkombination nach Abb.A8.17 mit

$$G_1(s) = \frac{K}{(b-a)(c-a)} \cdot \frac{1}{s+a},$$

$$G_2(s) = \frac{K}{(c-b)(a-b)} \cdot \frac{1}{s+b},$$

$$G_3(s) = \frac{K}{(a-c)(b-c)} \cdot \frac{1}{s+c}.$$

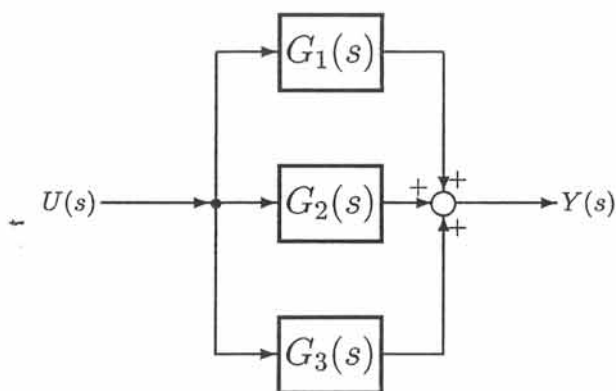


Abb.A8.17

■

A8.18 Integrator und Laufzeitglieder

- (i) Der gegebenen Sprungantwort entspricht gemäß $g(\tau) = h'(\tau)$ die Stoßantwort Abb.A8.18b, d.h.

$$g(\tau) = \varepsilon(\tau) - 3\varepsilon(\tau - 1) + 3\varepsilon(\tau - 2) - \varepsilon(\tau - 3).$$

Daraus erhalten wir die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \mathcal{L}[g(\tau)] = \frac{1}{s} (1 - 3e^{-s} + 3e^{-2s} - e^{-3s}),$$

- (ii) die sich z.B. durch die Schaltung Abb.A8.18c realisieren lässt. Dies ist jedoch nicht die einzige Möglichkeit. Aus der Form

$$G(s) = \frac{1}{s} (1 - e^{-s})^3$$

lässt sich beispielsweise die Realisierung Abb.A8.18d ablesen.

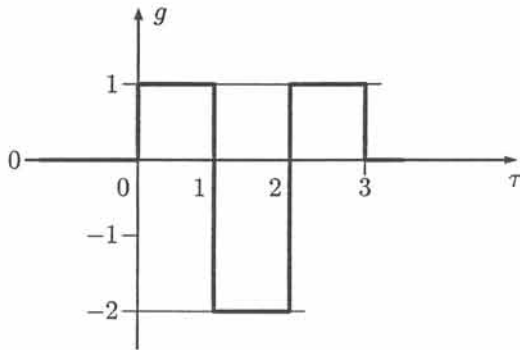


Abb.A8.18b

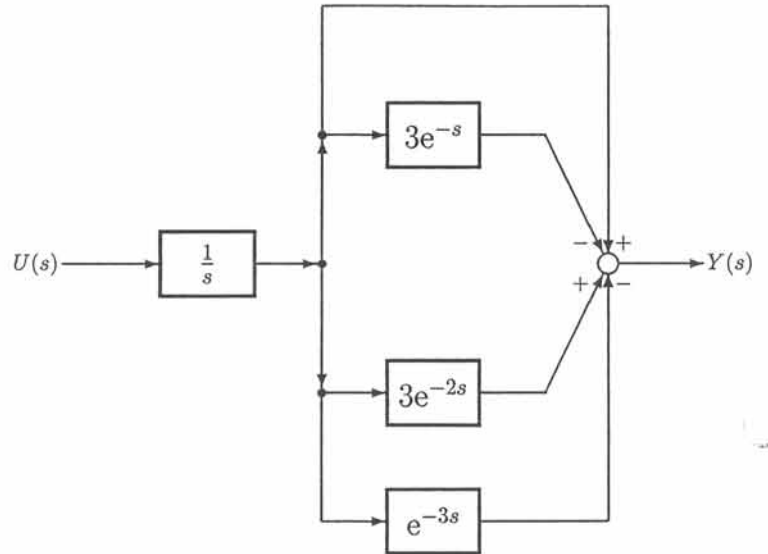


Abb.A8.18c

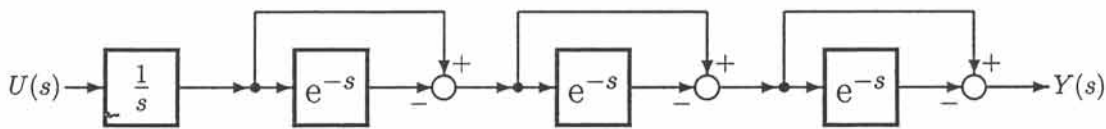


Abb.A8.18d

A8.19 Gleitende Mittelwertbildung

- (i) Die Frequenzgangskurve, also die graphische Darstellung von

$$G(j\nu) = \frac{1 - e^{-j\nu}}{j\nu} = e^{-j\nu/2} \frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2}$$

in der komplexen Ebene mit ν als Parameter, zeigt Abb.A8.19a.

- (ii) Eine der möglichen Realisierungen ist in Abb.A8.19b dargestellt.

- (iii) Der Übertragungsfunktion entspricht die Stoßantwort

$$g(\tau) = \varepsilon(\tau) - \varepsilon(\tau - 1)$$

und damit die Faltungsdarstellung der Eingangs-Ausgangs-Beziehung

$$y(\tau) = \int_{\tau-1}^{\tau} u(\tau') d\tau'$$

Es handelt sich also um einen "Kurzzeit-Integrator" bzw. um eine gleitende Mittelwertbildung über dem Zeitintervall $[\tau - 1, \tau]$.

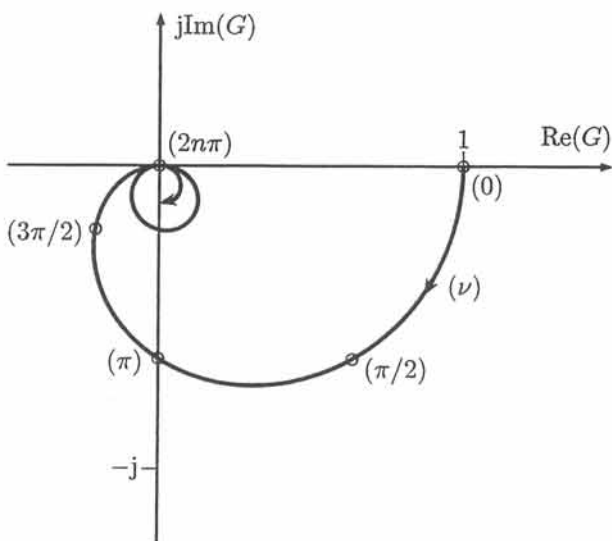


Abb.A8.19a

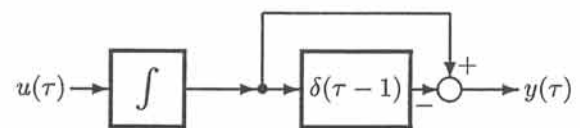
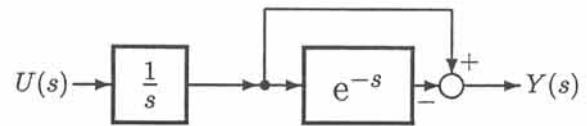


Abb.A8.19b

■

A8.20 PID-Glied

- (i) Eine elementare Wechselstromanalyse liefert

$$\frac{U_A}{U_E} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \left(1 + \frac{1}{j\omega R_1 C_1} \right) (1 + j\omega R_2 C_2),$$

mit allgemeinen Bezugswerten $U_{EB} = U_{AB}$, T_B und mit $j\nu = j\omega T_B \mapsto s$
also die Übertragungsfunktion

$$G(s) = 1 + \underbrace{\frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}}_{G_1(s)} + \underbrace{\frac{T_B}{R_2 C_1} \cdot \frac{1}{s}}_{G_2(s)} + \underbrace{\frac{R_1 C_2}{T_B} \cdot s}_{G_3(s)}.$$

- (ii) Die Summe der Übertragungsfunktionen entspricht der Parallelkombination nach Abb.A8.20b, wobei

$$G_1(s) = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1} \quad \text{Proportionalglied (idealer Verstärker),}$$

$$G_2(s) = \frac{T_B}{R_2 C_1} \cdot \frac{1}{s} \quad \text{Integrierer,}$$

$$G_3(s) = \frac{R_1 C_2}{T_B} \cdot s \quad \text{Differenzierer.}$$

L 118

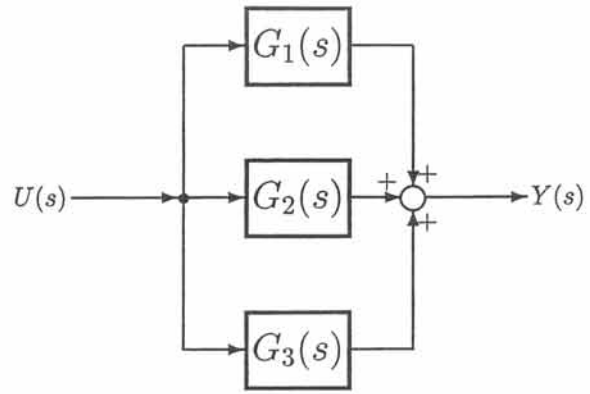


Abb.A8.20b

A9.1 Zustandsmodelle mit Phasen-Variablen

(i) $y' + 2y = 3u; \quad m = 0, n = 1; \quad a_0 = 2, b_0 = 3 :$

$$\begin{aligned}x' &= -2x + u, \\y &= 3x.\end{aligned}$$

(ii) $y' - 2y = 5u; \quad m = 0, n = 1; \quad a_0 = -2, b_0 = 5 :$

$$\begin{aligned}x' &= 2x + u, \\y &= 5x.\end{aligned}$$

(iii) $y' + 2y = 3u' + 8u; \quad m = 1, n = 1; \quad a_0 = 2, b_0 = 8, b_1 = 3 :$

$$\begin{aligned}x' &= -2x + u, \\y &= 2x + 3u.\end{aligned}$$

(iv) $y' - 2y = 5u' + 10u; \quad m = 1, n = 1; \quad a_0 = -2, b_0 = 10, b_1 = 5 :$

$$\begin{aligned}x' &= 2x + u, \\y &= 20x + 5u.\end{aligned}$$

(v) $y'' + 3y' + 2y = 3u; \quad m = 0, n = 2; \quad a_0 = 2, a_1 = 3, b_0 = 3 :$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\y &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(vi) $y'' + 3y' + 2y = 3u' + 9u; \quad m = 1, n = 2; \quad a_0 = 2, a_1 = 3, b_0 = 9, b_1 = 3 :$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\y &= \begin{bmatrix} 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(vii) $y'' + 3y' + 2y = 3u'' + 6u' - 4u; \quad m = 2, n = 2;$

$a_0 = 2, a_1 = 3, b_0 = -4, b_1 = 6, b_2 = 3 :$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\y &= \begin{bmatrix} -10 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 3u.\end{aligned}$$

(viii) $y'' + y' = 5u' + 15u$; $m = 1, n = 2$; $a_0 = 0, a_1 = 1, b_0 = 15, b_1 = 5$:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 15 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(ix) $y'' + y' = 5u'' + 4u' - 10u$; $m = 2, n = 2$;

$a_0 = 0, a_1 = 1, b_0 = -10, b_1 = 4, b_2 = 5$:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} -10 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 5u.$$

A9.2 Anfangswerte der Zustandsvariablen

(i) $x(0) = \frac{1}{3}y(0) = -1/3.$

(ii) $x(0) = \frac{1}{5}y(0) = -1/5.$

(iii) $x(0) = \frac{1}{2}y(0) - \frac{3}{2}u(0) = -1/2 + 3 = 5/2.$

(iv) $x(0) = \frac{1}{20} [y(0) - 5u(0)] = \frac{1}{20} (-1 + 10) = 0,45.$

(v) $y = 3x_1, \quad x_1(0) = \frac{1}{3}y(0) = -1/3,$
 $y' = 3x_1' = 3x_2, \quad x_2(0) = \frac{1}{3}y'(0) = 4/3.$

(vi) $y = 9x_1 + 3x_2,$
 $y' = 9x_1' + 3x_2' = 9x_2 + 3(-2x_1 - 3x_2 + u),$

$$\begin{aligned} 9x_1(0) + 3x_2(0) &= y(0) = -1, & x_1(0) &= -5/3, \\ -6x_1(0) &= y'(0) - 3u(0) = 10, & x_2(0) &= 14/3. \end{aligned}$$

(vii) $y = -10x_1 - 3x_2 + 3u,$
 $y' = -10x_1' - 3x_2' + 3u' = -10x_2 + 3(2x_1 + 3x_2 - u) + 3u'$
 $= 6x_1 - x_2 - 3u + 3u'.$

$$\begin{aligned} 10x_1(0) + 3x_2(0) &= -y(0) + 3u(0) = -5, & x_1(0) &= -5/7, \\ 6x_1(0) - x_2(0) &= y'(0) + 3u(0) - 3u'(0) = -5, & x_2(0) &= 5/7. \end{aligned}$$

(viii) $y = 15x_1 + 5x_2,$
 $y' = 15x_1' + 5x_2' = 15x_2 + 5(-x_2 + u) = 10x_2 + 5u,$

$$\begin{aligned} 15x_1(0) + 5x_2(0) &= y(0) = -1, & x_1(0) &= -8/15, \\ 10x_2(0) &= y'(0) - 5u(0) = 14, & x_2(0) &= 1,4. \end{aligned}$$

(ix) $y = -10x_1 - x_2 + 5u,$
 $y' = -10x_1' - x_2' + 5u' = -10x_2 + x_2 - u + 5u',$

$$\begin{aligned} -10x_1(0) - x_2(0) &= y(0) - 5u(0) = 9, & x_1(0) &= -28/30 = -14/15, \\ -9x_2(0) &= y'(0) + u(0) - 5u'(0) = -3, & x_2(0) &= 1/3. \end{aligned}$$

■

A9.3 Physikalische Zustandsvariablen

- (a) $n = 2$. Das System besitzt zwei unabhängige Energiespeicher und mit diesen die beiden Zustandsgleichungen

$$u_E = L \frac{di_A}{dt} + u_C, \quad i_A = C \frac{du_C}{dt}.$$

Nach Einführung von bezogenen Variablen,

$$u_E = U_B u, \quad i_A = I_B y = I_B x_2, \quad u_C = U_B x_1, \quad t = T_B \tau,$$

folgt

$$x_2' = \frac{T_B U_B}{L I_B} (-x_1 + u), \quad x_1' = \frac{T_B I_B}{C U_B} x_2, \quad y = x_2.$$

Nach der speziellen Wahl

$$T_B = \sqrt{LC}, \quad \frac{U_B}{I_B} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

erhalten wir

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -x_1 + u, \quad y = x_2$$

oder, in Matrixform mit $\underline{x} = [x_1 \ x_2]^T$,

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \ 1] \underline{x}.$$

- (b) $n = 1$, weil die beiden Energiespeicher nicht unabhängig sind. Die Zustandsgleichung

$$u_E = (L_1 + L_2) \frac{di_A}{dt} + R i_A$$

liefert nach Einführung bezogener Variablen,

$$i_A = I_B x = I_B y, \quad u_E = U_B u, \quad U_B = R I_B, \quad T_B = (L_1 + L_2) / R,$$

das Zustandsmodell

$$\begin{aligned} x' &= -x + u, \\ y &= x. \end{aligned}$$

■

A9.4 Strukturdiagramm

- (a) Das System besitzt $p = 2$ Eingangsgrößen und $q = 1$ Ausgangsgröße. Sein Strukturbild ist in Abb.A9.4a angegeben. Zu den SISO-Komponentensystemen

$$\underline{G}(s) = [G_{11}(s) \quad G_{12}(s)], \quad G_{11}(s) = \frac{s+2}{s^2+6s+5}, \quad G_{12}(s) = \frac{3}{s+5}$$

gehören die Zustandsmodelle

$$G_{11}: \begin{bmatrix} x'_{11} \\ x'_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1, \quad y_{11} = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

und

$$G_{12}: x'_{12} = -5x_{12} + u_2, \quad y_{12} = 3x_{12}.$$

Die Kombination $y = y_{11} + y_{12}$ liefert das Zustandsmodell

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad y = [2 \quad 1 \quad 3] \underline{x}.$$

- (b) Hier haben wir $p = 1$ Eingangsgröße und $q = 2$ Ausgangsgrößen. Das zugehörige Strukturbild zeigt Abb.A9.4b. Zu den SISO-Komponenten

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) \\ G_{21}(s) \end{bmatrix}, \quad G_{11}(s) = \frac{s+2}{s^2+6s+5}, \quad G_{21}(s) = \frac{3}{s+5}$$

gehören die Zustandsmodelle

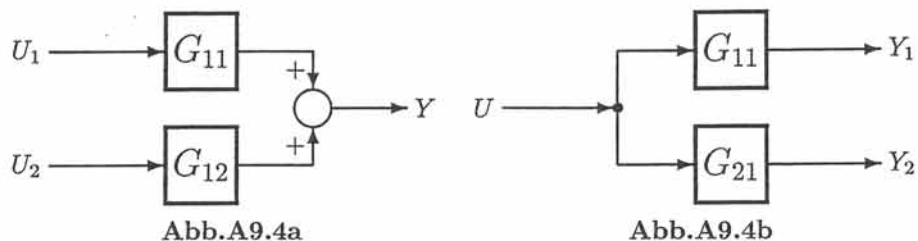
$$G_{11}: \begin{bmatrix} x'_{11} \\ x'_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y_1 = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

und

$$G_{21}: x'_{12} = -5x_{12} + u, \quad y_2 = 3x_{12}.$$

Insgesamt ist demnach

$$\underline{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \underline{x}.$$



A9.5 System erster Ordnung

(i) Die Laplace-Transformation der Zustandsgleichung liefert

$$(s + 2)X(s) = x(0) + 3U(s),$$

nach Rücktransformation also

$$x(\tau) = \left[x(0) + 3 \int_0^\tau e^{2\tau'} u(\tau') d\tau' \right] e^{-2\tau}, \quad \tau \geq 0.$$

Dazu gehört die Ausgangsgröße

$$y(\tau) = 4u(\tau) + 5 \left[x(0) + 3 \int_0^\tau e^{2\tau'} u(\tau') d\tau' \right] e^{-2\tau}, \quad \tau \geq 0.$$

(ii) Differentiation des Ausdrucks für $x(\tau)$ liefert

$$\begin{aligned} x'(\tau) &= \left[3e^{2\tau'} u(\tau') \right]_{\tau'=\tau} e^{-2\tau} - 2 \left[x(0) + 3 \int_0^\tau e^{2\tau'} u(\tau') d\tau' \right] e^{-2\tau} \\ &= 3u(\tau) - 2x(\tau), \end{aligned}$$

die gegebene Zustandsgleichung ist also erfüllt.

(iii) Die Auswertung für den Heaviside-Sprung und den Anfangs-Nullzustand ergibt*

$$\begin{aligned} x(\tau) &= 3e^{-2\tau} \int_0^\tau e^{2\tau'} u(\tau') d\tau', \quad \tau \geq 0, \\ &= 3e^{-2\tau} \left[\frac{1}{2} e^{2\tau'} \right]_0^\tau \varepsilon(\tau) = \frac{3}{2} (1 - e^{-2\tau}) \varepsilon(\tau), \\ y(\tau) &= \frac{15}{2} (1 - e^{-2\tau}) \varepsilon(\tau) + 4\varepsilon(\tau) = \frac{1}{2} (23 - 15e^{-2\tau}) \varepsilon(\tau). \end{aligned}$$

(iv) Aus $X_{0Z}(s) = 3U(s)/(s + 2)$ und $Y_{0Z}(s) = 5X_{0Z}(s) + 4U(s)$ folgt

$$G(s) = \frac{Y_{0Z}(s)}{U(s)} = \frac{15}{s + 2} + 4 = \frac{4s + 23}{s + 2}.$$

■

A9.6 Resolvente

(i) Die Matrix

$$s\underline{E} - \underline{A} = \begin{bmatrix} s + 1 - 2j & 0 \\ 0 & s + 1 + 2j \end{bmatrix}$$

ist diagonal. Daher gilt

$$(s\underline{E} - \underline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s + 1 - 2j} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s + 1 + 2j} \end{bmatrix}$$

und

$$e^{A\tau} = \mathcal{L}^{-1} \left[(s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \right] = \begin{bmatrix} e^{(-1+j2)\tau} & 0 \\ 0 & e^{(-1-j2)\tau} \end{bmatrix}.$$

(ii)

$$s\underline{E} - \underline{A} = \begin{bmatrix} s+1 & -2 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix},$$

$$(s\underline{E} - \underline{A})^{-1} = \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix}, \quad P(s) = (s+1)^2 + 4,$$

$$e^{A\tau} = \mathcal{L}^{-1} \left[(s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \right] = \begin{bmatrix} \cos(2\tau) & \sin(2\tau) \\ -\sin(2\tau) & \cos(2\tau) \end{bmatrix} e^{-\tau}.$$

(iii)

$$s\underline{E} - \underline{A} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 5 & s+2 \end{bmatrix},$$

$$(s\underline{E} - \underline{A})^{-1} = \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -5 & s \end{bmatrix}, \quad P(s) = s(s+2) + 5 = (s+1)^2 + 4,$$

$$e^{A\tau} = \mathcal{L}^{-1} \left[(s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \right] = \begin{bmatrix} \cos(2\tau) + \frac{1}{2} \sin(2\tau) & \frac{1}{2} \sin(2\tau) \\ -\frac{5}{2} \sin(2\tau) & \cos(2\tau) - \frac{1}{2} \sin(2\tau) \end{bmatrix} e^{-\tau}.$$

(iv) $(s\underline{E} - \underline{A})^{-1}$ und $e^{A\tau}$ sind die Transponierten der in (iii) angegebenen Ausdrücke. ■

A9.7 Übertragungsfunktion

Allgemein gilt

$$\underline{G}(s) = \underline{C} (s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D},$$

wobei in unseren Fällen $\underline{D} = \underline{0}$ und $\underline{G}(s)$ eine 1×1 -Matrix ist (SISO-Systeme ohne direkten Durchgriff). Unter teilweiser Verwendung der Ergebnisse aus A9.6 gilt

$$(i) \quad \underline{G}(s) = \begin{bmatrix} 2-3j & 2+3j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1-2j} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+1+2j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4s+16}{s^2+2s+5}.$$

$$(ii) \quad \underline{G}(s) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ -2 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4s+16}{s^2+2s+5}.$$

$$(iii) G(s) = [16 \quad 4] \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -5 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4s+16}{s^2+2s+5}.$$

$$(iv) G(s) = [0 \quad 1] \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} s+2 & -5 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{4s+16}{s^2+2s+5}.$$

Die Übertragungsfunktion ist für alle Systeme die gleiche! ■

A9.8 Matrix-Exponentialfunktion

Die zu \underline{A} gehörende Matrix-Exponentialfunktion wurde in A9.6(ii) bereits berechnet:

$$e^{A\tau} = \begin{bmatrix} \cos(2\tau) & \sin(2\tau) \\ -\sin(2\tau) & \cos(2\tau) \end{bmatrix} e^{-\tau}.$$

Über

$$\int_0^\tau \cos(2\tau') e^{-\tau'} d\tau' = \frac{1}{5} \{1 - [\cos(2\tau) - 2\sin(2\tau)] e^{-\tau}\},$$

$$\int_0^\tau \sin(2\tau') e^{-\tau'} d\tau' = \frac{1}{5} \{2 - [2\cos(2\tau) + \sin(2\tau)] e^{-\tau}\}.$$

folgt dann einerseits

$$\int_0^\tau e^{A\tau'} d\tau' = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 - [\cos(2\tau) - 2\sin(2\tau)] e^{-\tau} & 2 - [2\cos(2\tau) + \sin(2\tau)] e^{-\tau} \\ -2 + [2\cos(2\tau) + \sin(2\tau)] e^{-\tau} & 1 - [\cos(2\tau) - 2\sin(2\tau)] e^{-\tau} \end{bmatrix}.$$

Andererseits gilt

$$\underline{A}^{-1} (e^{A\tau} - \underline{E}) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2\tau)e^{-\tau} - 1 & \sin(2\tau)e^{-\tau} \\ -\sin(2\tau)e^{-\tau} & \cos(2\tau)e^{-\tau} - 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 - [\cos(2\tau) - 2\sin(2\tau)] e^{-\tau} & 2 - [2\cos(2\tau) + \sin(2\tau)] e^{-\tau} \\ -2 + [2\cos(2\tau) + \sin(2\tau)] e^{-\tau} & 1 - [\cos(2\tau) - 2\sin(2\tau)] e^{-\tau} \end{bmatrix}.$$
■

A9.9 Transitionsmatrix

Die Matrix-Exponentialfunktion $e^{A\tau}$ genügt der Ableitungsregel

$$\frac{d}{d\tau} e^{A\tau} = \underline{A} e^{A\tau},$$

d.h.

$$\underline{\Phi}'(\tau) = \underline{A} \underline{\Phi}(\tau), \quad \underline{\Phi}(0) = \underline{E}.$$

Mit der angegebenen Matrix \underline{A} ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \underline{\Phi}'_{11}(\tau) & \underline{\Phi}'_{12}(\tau) \\ \underline{\Phi}'_{21}(\tau) & \underline{\Phi}'_{22}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Phi}_{11}(\tau) & \underline{\Phi}_{12}(\tau) \\ \underline{\Phi}_{21}(\tau) & \underline{\Phi}_{22}(\tau) \end{bmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}'_{11}(\tau) &= -\underline{\Phi}_{11}(\tau) + 2\underline{\Phi}_{21}(\tau), & \underline{\Phi}_{11}(0) &= 1, \\ \underline{\Phi}'_{12}(\tau) &= -\underline{\Phi}_{12}(\tau) + 2\underline{\Phi}_{22}(\tau), & \underline{\Phi}_{12}(0) &= 0, \\ \underline{\Phi}'_{21}(\tau) &= -2\underline{\Phi}_{11}(\tau) - \underline{\Phi}_{21}(\tau), & \underline{\Phi}_{21}(0) &= 0, \\ \underline{\Phi}'_{22}(\tau) &= -2\underline{\Phi}_{12}(\tau) - \underline{\Phi}_{22}(\tau), & \underline{\Phi}_{22}(0) &= 1. \end{aligned}$$

A9.10 Lösungsdarstellung

Die Transitionsmatrix wurde in A9.6(ii) berechnet:

$$\underline{\Phi}(\tau) = e^{\underline{A}\tau} \varepsilon(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(2\tau) & \sin(2\tau) \\ -\sin(2\tau) & \cos(2\tau) \end{bmatrix} e^{-\tau} \varepsilon(\tau).$$

Aus der allgemeinen Lösungsdarstellung für die Zustandsgrößen,

$$\underline{x}(\tau) = \underline{\Phi}(\tau - \tau_0) \underline{x}(\tau_0^-) + \int_{\tau_0^-}^{\tau} \underline{\Phi}(\tau - \tau') \underline{B}u(\tau') d\tau',$$

berechnen wir für $\tau \geq \tau_0 = -3$

$$\begin{aligned} \underline{x}(\tau) &= \begin{bmatrix} 20 \cos(2\tau + 6) - 10 \sin(2\tau + 6) \\ -10 \cos(2\tau + 6) - 20 \sin(2\tau + 6) \end{bmatrix} e^{-(\tau+3)} \\ &+ \int_{-3}^{\tau} \begin{bmatrix} \cos[2(\tau - \tau')] + \sin[2(\tau - \tau')] \\ \cos[2(\tau - \tau')] - \sin[2(\tau - \tau')] \end{bmatrix} e^{-(\tau-\tau')} 4 \sin(7\tau') d\tau'. \end{aligned}$$

Die Ausgangsfunktion $y(\tau) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \underline{x}(\tau)$, gültig für $\tau \geq \tau_0 = -3$, ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} y(\tau) &= [110 \cos(2\tau + 6) - 30 \sin(2\tau + 6)] e^{-(\tau+3)} \\ &+ \int_{-3}^{\tau} \{4 \cos[2(\tau - \tau')] + 6 \sin[2(\tau - \tau')]\} e^{-(\tau-\tau')} 4 \sin(7\tau') d\tau'. \end{aligned}$$

A9.11 Stoßantwort

Die Transitionsmatrix wurde in A9.6(ii) berechnet:

$$\underline{\Phi}(\tau) = e^{\underline{A}\tau} \varepsilon(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(2\tau) & \sin(2\tau) \\ -\sin(2\tau) & \cos(2\tau) \end{bmatrix} e^{-\tau} \varepsilon(\tau).$$

Direktes Einsetzen der relevanten Matrizen liefert

$$\begin{aligned} g(\tau) &= \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2\tau) & \sin(2\tau) \\ -\sin(2\tau) & \cos(2\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-\tau} \varepsilon(\tau) \\ &= [4 \cos(2\tau) + 6 \sin(2\tau)] e^{-\tau} \varepsilon(\tau). \end{aligned}$$

Die anderen Systeme aus A9.6 besitzen die gleiche Stoßantwort.
Die Laplace-Transformation ergibt

$$\mathcal{L}[g(\tau)] = \frac{4(s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{6 \cdot 2}{(s+1)^2+4} = \frac{4s+16}{s^2+2s+5},$$

gleich den in A9.7 berechneten Übertragungsfunktionen. ■

A9.12 Anfangszustände

Die allgemeine Lösungsdarstellung

$$\underline{x}(\tau) = \underline{\Phi}(\tau - \tau_0)\underline{x}(\tau_0^-) + \int_{\tau_0^-}^{\tau} \underline{\Phi}(\tau - \tau')\underline{B}u(\tau')d\tau'$$

führt mit $\tau = 0+$, $\tau_0^- = 0-$ und $\underline{x}(0-) = \underline{0}$ auf

$$\underline{x}(0+) = \int_{0-}^{0+} e^{-\underline{A}\tau'} \underline{B}\delta(\tau')d\tau',$$

also

$$\underline{x}(0+) = \underline{B}. \quad \blacksquare$$

A9.13 Euklidische Vektorräume

(i) Die euklidische Norm eines Elements $\underline{v} = [v_1, \dots, v_4]^T \in \mathbb{R}^4$ ist durch

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_4^2}$$

definiert. Somit gilt

$$\|\underline{v}_1\| = \sqrt{5}, \quad \|\underline{v}_2\| = \sqrt{10}, \quad \|\underline{v}_3\| = \sqrt{5/2}, \quad \|\underline{v}_4\| = \sqrt{45}.$$

(ii) Das zu \underline{v} gehörende normierte Element ist $\underline{n} = \underline{v}/\|\underline{v}\|$, also

$$\underline{n}_1 = [1/\sqrt{5} \quad 0 \quad 2/\sqrt{5} \quad 0]^T, \text{ etc.}$$

(iii) Die Definition

$$\underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{v}^T \underline{w} = v_1 w_1 + \dots + v_4 w_4$$

des inneren Produkts liefert

$$\underline{v} \cdot \underline{v}_1 = 0, \quad \underline{v} \cdot \underline{v}_2 = -13, \quad \underline{v} \cdot \underline{v}_3 = 6,5, \quad \underline{v} \cdot \underline{v}_4 = -26.$$

(v) (a) 2, (b) 2, (c) 2, (d) 1, (e) 2, (f) 2, (g) 2, (h) 2, (i) 2, (j) 2.

(vi) $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$, $(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$, $(\underline{v}_1, \underline{v}_4)$, $(\underline{v}_2, \underline{v}_4)$, $(\underline{v}_3, \underline{v}_4)$.

(vii) $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$, $(\underline{v}_1, \underline{v}_3)$. ■

A9.14 Koordinatentransformation

(i) Aus den in A9.13(iv) angegebenen Zusammenhängen

$$\underline{v}_3 = -\underline{v}_2/2, \quad \underline{v}_4 = \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2$$

gewinnen wir

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ii) Mit den Darstellungen

$$\underline{v}_1 = [1 \ 0 \ 2 \ 0]^T, \quad \underline{v}_2 = [-2 \ -1 \ 1 \ 2]^T$$

der Vektoren \underline{v}_1 und \underline{v}_2 in Bezug auf die kanonische Basis in \mathbb{R}^4 gilt tatsächlich

$$3\underline{v}_1 + \underline{v}_2 = [1 \ -1 \ 7 \ 2]^T = \underline{v},$$

also

$$\underline{v}|_{\mathcal{A}} = [3 \ 1]^T.$$

(iii) Die Beziehung $\underline{v}|_{\text{neue Basis}} = \underline{P}^{-1} \underline{v}|_{\text{alte Basis}}$ liefert

$$\underline{v}|_{\mathcal{B}} = \underline{P}^{-1} \underline{v}|_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(iv) Damit gilt (s. A9.13)

$$\underline{v} = 10\underline{v}_3 + 3\underline{v}_4 = [1 \ -1 \ 7 \ 2]^T.$$

A9.15 Transformation von ZustandsmodellenMit der durch $\underline{x}(\tau) = \underline{P}\tilde{\underline{x}}(\tau)$ gegebenen Transformationsmatrix \underline{P} und ihrer Inversen,

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix},$$

berechnen wir

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 & -28 \\ 84 & 47 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\underline{B}} = \underline{P}^{-1} \underline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ -50 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = \underline{C}P = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = [12 \quad 7].$$

Das Zustandsmodell in Bezug auf die neue Basis ist daher

$$\tilde{x}'(\tau) = \begin{bmatrix} -50 & -28 \\ 84 & 47 \end{bmatrix} \tilde{x}(\tau) + \begin{bmatrix} 30 \\ -50 \end{bmatrix} u(\tau), \quad y(\tau) = [12 \quad 7] \tilde{x}(\tau).$$

■

A9.16 Eigenwerte

Die Eigenwerte einer $n \times n$ -Matrix \underline{A} sind die Wurzeln des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \det(\lambda \underline{E} - \underline{A})$.

(i),(ii),(iii) $P(\lambda) = \lambda(\lambda + 2) + 26, \quad \lambda_{1,2} = -1 \pm j5;$

(iv) $P(\lambda) = (\lambda - 3)^3, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3;$

(v) $P(\lambda) = \lambda^3, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0;$

(vi) $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm j.$

■

A9.17 Lineare Gleichungssysteme

(i) Keine Lösung. Das System ist widersprüchlich: Subtrahieren Sie das Doppelte der ersten Gleichung von der zweiten, so folgt $-3x_3 = 4$ im Widerspruch zur dritten Gleichung, $x_3 = 3$. Der Datenvektor \underline{d} ist linear unabhängig von den Spaltenvektoren der Koeffizientenmatrix.

(ii) $\underline{x} = [16 \quad -5 \quad 2]^T;$

(iii) $\underline{x} = [2 \quad 1/2 \quad 0]^T + \alpha [3 \quad 3/2 \quad -1]^T$, mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$;

(iv) $\underline{x} = [2 \quad 1]^T;$

(v) $\underline{x} = [3 \quad 4 \quad 0]^T + \alpha [3 \quad 4 \quad -1]^T$, mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$.

■

A9.18 Eigenvektoren

(i) $\underline{v}_{1,2} = \alpha_{1,2} \begin{bmatrix} 1 \pm j5 \\ 26 \\ -1 \end{bmatrix}^T$, mit beliebigen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$;

(ii) $\underline{v}_{1,2} = \alpha_{1,2} [-(1 \pm j5) \quad -1]^T$, mit beliebigen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$;

(iii) $\underline{v}_{1,2} = \alpha_{1,2} \begin{bmatrix} -1 \pm j5 \\ 26 \\ -1 \end{bmatrix}^T$, mit beliebigen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$;

(iv),(v) $\underline{v}_1 = \alpha [-1 \quad 0 \quad 0]^T$, mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$;

$$(vi) \underline{v}_1 = \alpha_1 [-1 \ 0 \ 0]^T, \quad \underline{v}_{2,3} = \alpha_{2,3} [0 \ \pm j \ -1]^T,$$

mit beliebigen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$.

A9.19 Eigenvektoren und Modalmatrix

$$(a) \lambda_1 = 1, \quad \underline{v}_1 = \alpha_1 [1 \ -1]^T; \quad \lambda_2 = 4, \quad \underline{v}_2 = \alpha_2 [1/4 \ -1]^T;$$

$$(b) \lambda_1 = 2, \quad \underline{v}_1 = \alpha_1 [-1/2 \ -1]^T; \quad \lambda_2 = -2, \quad \underline{v}_2 = \alpha_2 [1/2 \ -1]^T;$$

$$(c) \lambda_1 = 0, \quad \underline{v}_1 = \alpha_1 [-1 \ 0]^T; \quad \lambda_2 = -4, \quad \underline{v}_2 = \alpha_2 [1/4 \ -1]^T.$$

$$(a) \underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}; \quad (b) \underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad (c) \underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

A9.20 Modalmatrix

Zur Systemmatrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}$$

gehören die Eigenwerte und Eigenvektoren

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm j3, \quad \underline{v}_{1,2} = \alpha_{1,2} \begin{bmatrix} \frac{1 \pm j3}{10} & -1 \end{bmatrix}^T$$

und damit eine Modalmatrix und ihre Inverse

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 + j3 & 1 - j3 \\ -10 & -10 \end{bmatrix}, \quad \underline{P}^{-1} = \frac{j}{60} \begin{bmatrix} -10 & -1 + j3 \\ 10 & 1 + j3 \end{bmatrix}.$$

Daraus berechnen sich die neuen Systemmatrizen zu

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} = \begin{bmatrix} -1 + j3 & 0 \\ 0 & -1 - j3 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{B}} = \underline{P}^{-1} \underline{B} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} -3 - j \\ -3 + j \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\underline{C}} = \underline{C} \underline{P} = [-37 + j9 \quad -37 - j9].$$

A9.21 Jordan-Normalform

Zu der gegebenen Systemmatrix \underline{A} gehört das charakteristische Polynom $P(\lambda) = (\lambda + 1)^3$, also der Eigenwert $\lambda_1 = -1$ mit der Vielfachheit $n_1 = 3$. Diesem ist der Eigenvektor

$$\underline{v}_1 = [1 \ \lambda_1 \ \lambda_1^2]^T = [1 \ -1 \ 1]^T$$

zugeordnet. Die zwei restlichen, verallgemeinerten Eigenvektoren sind aus

$$(\underline{A} - \lambda_1 \underline{E}) \underline{g}_{1,1} = \underline{v}_1, \quad (\underline{A} - \lambda_1 \underline{E}) \underline{g}_{1,2} = \underline{g}_{1,1}$$

zu berechnen:

$$\underline{g}_{1,1} = [2 \quad -1 \quad 0]^T, \quad \underline{g}_{1,2} = [3 \quad -1 \quad 0]^T.$$

Damit ist

$$\underline{P} = [\underline{v}_1 \quad \underline{g}_{1,1} \quad \underline{g}_{1,2}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A9.22 Orthogonale Transformation

Das zugehörige Eigenwertproblem liefert die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5}$ und die orthonormierten Eigenvektoren

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0,851 \\ 0,526 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0,526 \\ -0,851 \end{bmatrix}$$

und damit die gesuchte Modalmatrix

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 0,851 & 0,526 \\ 0,526 & -0,851 \end{bmatrix}.$$

A9.23 Cayley-Hamilton-Theorem

Das Cayley-Hamilton-Theorem führt auf eine Darstellung der Form

$$e^{\underline{A}\tau} = \alpha_0(\tau)\underline{E} + \alpha_1(\tau)\underline{A},$$

wobei $\alpha_0(\tau)$ und $\alpha_1(\tau)$ aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(\tau) \\ \alpha_1(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1\tau} \\ e^{\lambda_2\tau} \end{bmatrix}$$

zu berechnen sind.

Die gegebene Matrix \underline{A} besitzt die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = -1 \pm j3$. Wir haben daher das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_0 + (-1 + j3)\alpha_1 &= e^{-\tau} e^{j3\tau}, \\ \alpha_0 + (-1 - j3)\alpha_1 &= e^{-\tau} e^{-j3\tau} \end{aligned}$$

oder, äquivalent,

$$\alpha_0 - \alpha_1 = e^{-\tau} \cos(3\tau), \quad \alpha_1 = \frac{1}{3} e^{-\tau} \sin(3\tau)$$

zu lösen. Daraus folgt

$$\begin{aligned} e^{\underline{A}\tau} &= [e^{-\tau} \cos(3\tau) + \frac{1}{3} e^{-\tau} \sin(3\tau)] \underline{E} + \frac{1}{3} e^{-\tau} \sin(3\tau) \underline{A} \\ &= \underline{E} e^{-\tau} \cos(3\tau) + \frac{1}{3} (\underline{E} + \underline{A}) e^{-\tau} \sin(3\tau) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-\tau} \cos(3\tau) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e^{-\tau} \sin(3\tau). \end{aligned}$$

A9.24 Steuerbarkeit

Die Systemmatrix

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

ist in jedem Fall die gleiche und gehört zu einem System dritter Ordnung ($n = 3$).

(i)

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{M}_s = [\underline{b} \quad \underline{A}\underline{b} \quad \underline{A}^2\underline{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

Offensichtlich ist $\text{ran}(\underline{M}_s) = n = 3$. Das System ist also vollständig steuerbar.

$$\text{im}(\underline{M}_s) = \mathbb{R}^3, \quad \ker(\underline{M}_s^T) = \{0\}.$$

(ii)

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{M}_s = [\underline{b} \quad \underline{A}\underline{b} \quad \underline{A}^2\underline{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Auch hier ist offensichtlich $\text{ran}(\underline{M}_s) = n = 3$, d.h. das System ist vollständig steuerbar.

$$\text{im}(\underline{M}_s) = \mathbb{R}^3, \quad \ker(\underline{M}_s^T) = \{0\}.$$

(iii)

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{M}_s = [\underline{b} \quad \underline{A}\underline{b} \quad \underline{A}^2\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

In diesem Fall ist $\text{ran}(\underline{M}_s) = 1 < n = 3$; das System ist nicht vollständig steuerbar. Der ansteuerbare und der nicht ansteuerbare Unterraum sind

$$\text{im}(\underline{M}_s) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad \ker(\underline{M}_s^T) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

(iv) Das System hat $p = 2$ Eingänge, und die Eingangsmatrix

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hat den Rang $\text{ran}(\underline{B}) = p = 2$. Somit kann die Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{M}_s = [\underline{B} \quad \underline{A}\underline{B}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

untersucht werden. Ihr Rang ist offensichtlich $\text{ran}(\underline{M}_s) = n = 3$, das System ist also vollständig steuerbar.

$$\text{im}(\underline{M}_s) = \mathbb{R}^3, \quad \ker(\underline{M}_s^T) = \{\underline{0}\}.$$

■

A9.25 Beobachtbarkeit

Für jeden der drei Fälle haben wir die gleiche Systemmatrix eines Systems dritter Ordnung ($n = 3$),

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

(i)

$$\underline{C} = [0 \quad 0 \quad 1], \quad \underline{M}_b = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\underline{A} \\ \underline{C}\underline{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Wegen $\text{ran}(\underline{M}_b) = 2 < n$ ist das System nicht vollständig beobachtbar.

$$\text{im}(\underline{M}_b^T) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \quad \ker(\underline{M}_b) = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

(ii)

$$\underline{C} = [0 \quad 1 \quad 0], \quad \underline{M}_b = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\underline{A} \\ \underline{C}\underline{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Auch hier gilt offensichtlich $\text{ran}(\underline{M}_b) = 2 < n$, also nicht vollständige Beobachtbarkeit.

$$\text{im}(\underline{M}_b^T) \quad \text{und} \quad \ker(\underline{M}_b) \quad \text{wie unter (i)}.$$

(iii)

$$\underline{C} = [1 \quad 0 \quad 0], \quad \underline{M}_b = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\underline{A} \\ \underline{C}\underline{A}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wegen $\text{ran}(\underline{M}_b) = 3 = n$ ist das System vollständig beobachtbar, d.h.

$$\text{im}(\underline{M}_b^T) = \mathbb{R}^3, \quad \ker(\underline{M}_b) = \{\underline{0}\}.$$

(iv) Das System hat $q = 2$ Ausgänge und die Ausgangsmatrix

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit $\text{ran}(\underline{C}) = q$. Somit reicht

$$\underline{M}_b = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{CA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

als Beobachtbarkeitsmatrix aus. Offensichtlich ist $\text{ran}(\underline{M}_b) = 2 < n$, das System also nicht vollständig beobachtbar.

$\text{im}(\underline{M}_b^T)$ und $\text{ker}(\underline{M}_b)$ wie unter (i).

■