1. Aus einer umfangreichen Datenbank medizinischer Untersuchungen ist bekannt, dass ein bestimmter Blutwert normalverteilt ist mit $\mu_1 = 196$ und $\sigma_1 = 16$ (in ppm). Tritt eine bestimmte Infektion des Patienten auf, so stammt der selbe Blutwert aus einer Normalverteilung mit $\mu_2 = 236$ und $\sigma_2 = 21$. Nachdem die Infektion nur mit großem medizinischen Aufwand nachzuweisen ist, möchte man aufgrund dieses Blutwertes eine einfache Testentscheidung erhalten. Und zwar entscheidet man bei einem Grenzwert bis 221, dass der Patient nicht infiziert ist. Bei höheren Werten nimmt man Infektion an.

   a) Veranschaulichen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeiten in einer Skizze. (1.5)

   b) Wie groß sind die Fehlerwahrscheinlichkeiten 1. und 2. Art bei dieser Testentscheidung? (2)

   c) Bei welchem Grenzwert müsste entschieden werden, sodass beide Fehlerwahrscheinlichkeiten gleich groß sind. Wie groß sind die resultierenden Fehlerwahrscheinlichkeiten? (2)

   (Lösungsblatt: Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art und 2. Art)

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man im Roulette, wenn man immer nur auf *impair* setzt? Hinweis: *impair* = ungerade gewinnt, wenn von den Zahlen 0 bis 36 eine ungerade Zahl fällt. Insgesamt gewinnt man, wenn man mehr Spiele gewinnt als verliert.
   Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für Gewinnen, bei

   - 6 Spielen?
   - 10 Spielen?

   Was ist die bessere Strategie: Öfter mit kleineren Einsätzen oder weniger oft mit größeren Einsätzen zu spielen? Oder macht dies keinen Unterschied? (3)
   (Lösungsblatt: Wahrscheinlichkeiten für Gewinnen bei 6 und 10 Spielen)

3. Abbildung 1 zeigt einen Scatterplot. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

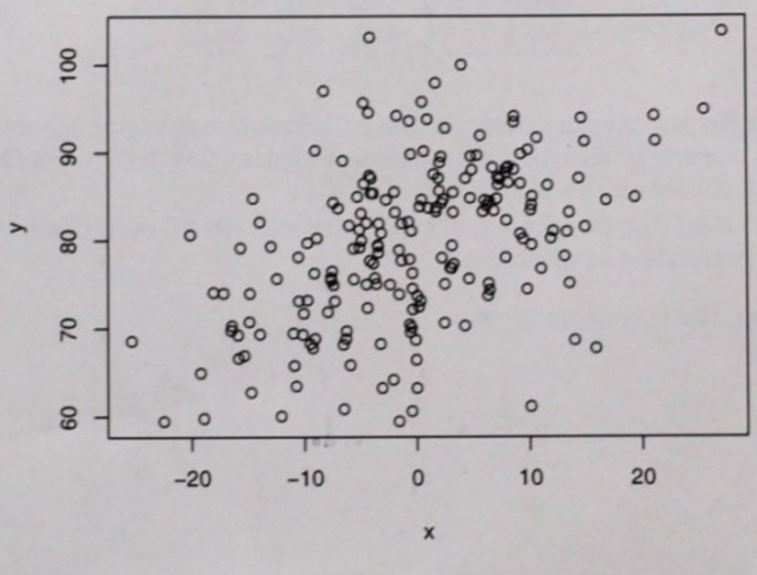

Abbildung 1: Scatterplot

   (a) Die Korrelation ist kleiner als 0.8.

   (b) Die Steigung der Regressionsgeraden ist ungefaehr 1.

   (c) Das Mittel von Y ist mindestens 30.

   (d) Die Standardabweichung von X ist mindestens 6.

   (e) Fuer $X = 4$ wird der Wert von Y in etwa bei 82 erwartet.

   (2.5)

   (Lösungsblatt ankreuzen - zB ein Plus wenn zutreffend, ein Minus wenn nicht)

4. Sei $X_1, X_2, \dots, X_n$ eine einfache Stichprobe aus einer Grundgesamtheit $N(0,1)$.
Wie sind folgende Stichprobenfunktionen verteilt?

$$(a)\ X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \qquad (b)\ Y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} X_i^2/m}{\sum\limits_{j=m+1}^{n} X_j^2/(n-m-1)}\ (n > m) \qquad (c)\ Z = \frac{X_1}{\sqrt{\sum\limits_{j=2}^{n} X_i^2/(n-1)}}$$

Sei $X_1, X_2, \dots, X_n$ eine einfache Stichprobe aus einer Grundgesamtheit $N(\mu, \sigma^2)$.
Wie sind folgende Stichprobenfunktionen verteilt?

$$(d)\ X = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \qquad (e)\ Y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (X_i - \mu)^2/m}{\sum\limits_{j=m+1}^{n} (X_j - \mu)^2/(n-m-1)}\ (n > m)$$

$$(f)\ Z = \frac{(X_1 - \mu)}{\sqrt{\sum\limits_{j=2}^{n} (X_i - \mu)^2/(n-1)}}$$

(3)

5. Im Rahmen der PISA-Studie wurde in den einzelnen Ländern die durchschnittliche Klassengröße ermittelt. Wir bilden drei Klassen, wobei die Länder der ersten Klasse eine kleine, die Länder der zweiten Klasse eine mittlere und die Länder der dritten Klasse eine hohe Klassengröße besitzen. Aus jeder Klasse wurden jeweils 4 Länder ausgewählt. Die folgende Tabelle zeigt die Ergebnisse im Bereich naturwissenschaftliche Grundbildung dieser Länder:

	1	2	3	4
klein	493	479	481	504
mittel	373	555	548	419
hoch	489	509	536	497

a) Nehmen Sie an, dass die Daten in den einzelnen Gruppen normalverteilt sind mit der gleichen Varianz σ. Stimmen die mittleren Punktezahlen in den drei Gruppen überein (Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$)? (3)

b) Zeichnen Sie einen Boxplot von allen Ergebnissen (der Tabelle oben). Geben Sie eine kurze Interpretation ihres Boxplots. (3)

(Lösungsblatt: Wert der Teststatistik)