Runde 1, Beispiel 4

LVA 118.181, Übungsrunde 1, 20.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.10.2006

1 Angabe

Man löse das folgende AWP durch Trennung der Variablen: $1 + y^2 - xy' = 0$, $y(1) = 1$.

2 Theoretische Grundlagen: 'Trennbare Differentialgleichungen'

Ergibt sich (eventuell nach Umformung) eine Differentialgleichung in der Form

$$y' = f(x) \cdot g(x),$$

welche stetige, auf den Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}(x, x_0 \in I)$ und $J \subseteq \mathbb{R}(y, y_0 \in J)$ stetig definierte Funktionen f und g besitzt, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $g(y) \neq 0$ - durch **Trennung der Variablen (Veränderlichen)** ergibt sich eine exakte Differentialgleichung in der Form:

   $$f(x) - \frac{1}{g(y)} \cdot y' = 0$$

   und der Stammfunktion ($x, x_0 \in I$, $y, y_0 \in J$):

   $$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi - \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}$$

2. $g(\eta) = 0, \eta \in J$ - es gilt: $y(x) = \eta$, $x \in I$ ist eine konstante Lösung.

Für trennbare Differentialgleichungen ($x_0 \in I$, $y_0 \in J$) besagt der **Existenz- und Eindeutigkeitssatz**, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(x) \cdot g(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

lokal eindeutig lösbar ist wenn gilt:

1. $g(y_0) \neq 0$, oder
2. $|g(y)| < L \cdot |y - y_0|$ in einer Umgebung von y_0, $L > 0$ konstant (`Lipschitz`).

Das **Lösungsverfahren** für $y' = f(x) \cdot g(x)$ lautet allgemein:

1. Sämtliche Nullstellen von $\eta \in J$ bestimmen - $y(x) = \eta$ ist jeweils eine partikuläre Lösung

2. Trennung der Variablen ('y, dy nach links; x, dx nach rechts')

$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$$

3. Unbestimmte Integration beider Seiten:

$$G(y) := \int \frac{dy}{g(y)}, \qquad F(x) := \int f(x)\,dx.$$

   Allgemeine implizite Lösung lautet:

$$G(y) - F(x) = x, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

4. Anfangswertproblemlösung: Wenn $g(y_0) \neq 0, c_0 := G(y_0) - F(x_0)$. Soferne möglich $G(y) - F(x) = c - 0$ nach y auflösen.

   Wenn $g(y_0) = 0$, dann ist $y(x) = y_0$ die Lösung.

3 Lösung des Beispiels

3.1 Nullstellenbestimmung

Es sind keine Nullstellen in dem von y abhängigen Funktionsteil vorhanden.

3.2 Umformung (Trennung der Veränderlichen)

$$\begin{aligned} xy' &= 1 + y^2 \\ y' &= \frac{1+y^2}{x} \\ \frac{y'}{1+y^2} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

3.3 Beide Seiten unbestimmt integrieren

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} = \int \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y$$

(Integrationsergebnis lt. Meyberg/Vachenauer, 'Höhere Mathematik 1'. 3. Aufl., S. 167).

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

Die allgemeine Lösung in impliziter Form lautet somit:

$$G(y) - F(x) = c, c \in \mathbb{R}, \qquad \arctan y = \ln x + c \qquad \mathbf{y} = \tan(\ln \mathbf{x} + \mathbf{c})$$

3.4 Lösung des Anfangswertproblems

Es gilt: $y(1) = 1$, daher errechnet sich c aus $c = G(y_0) - F(x_0) = 0.7854 - 0 = 0.7854$.
Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit:

$$\arctan \mathbf{y} = \ln \mathbf{x} + \mathbf{0.7854}$$

4 Literatur

- Meyberg/Vachenauer, 'Höhere Mathematik 2'. 2. Aufl., S. 14ff.)