46. Man berechne alle möglichen Gleichgewichtszustände der nichtelinearen Differentialgleichung $y'=y\cdot\left(\frac{8y}{y+1}-y-1\right)$ und überprüfe sie auf Stabilität.

1. y^* heißt Gleichgewichtspunkt der Differentialgleichung $y'=f(y)$, falls $f(y)=0$; damit ist $y=y^*$ eine konstante Lösung der Differentialgleichung

$$y'=f(x)=y\cdot\left(\frac{8y}{y+1}-y-1\right)\Rightarrow f(y)=0\Rightarrow y\cdot\left(\frac{8y}{y+1}-y-1\right)=0$$

also überlegen wir uns, wann die Gleichung zutrifft:
$y^*_1=0$: wenn das äußere y den Wert 0 hat, dann ist alles 0, also sehen wir uns den Klammerausdruck näher an

$$\frac{8y}{y+1}-y-1=0\,\Big|\cdot(y+1)$$

$$8y-y\cdot(y+1)-1\cdot(y+1)=0$$

$$8y-y^2-y-y-1=0$$

$$-y^2+6y-1=0\,\Big|\cdot(-1)$$

$$y^2-6y+1=0\Rightarrow {}_2y_1=+\frac{6}{2}\pm\sqrt{\frac{36}{4}-1}=3\pm\sqrt{9-1}=3\pm\sqrt{8}$$

also haben wir 3 Gleichgewichtspunkte: $y^*_1=0$, $y^*_2=3+\sqrt{8}$, $y^*_3=3-\sqrt{8}$

2. Ein Gleichgewichtspunkt y^* kann stabil, asymptotisch stabil oder instabil sein.
asymptotisch stabil: Lösung konvergiert zu einem Gleichgewicht y^*
stabil: Lösung bleibt in der Nähe von y^*
instabil: Lösung verlässt jede ε-Umgebung um y^*

Ein Gleichgewichtspunkt y^* von $y'=f(y)$ ist asymptotisch stabil, falls $f'(y^*)<0$ und instabil, falls $f'(y^*)>0$ ist (bei $f'(y^*)=0$ ist keine Aussage möglich).

also nehmen wir unsere Angabe $y'=f(y)=y\cdot\left(\frac{8y}{y+1}-y-1\right)$ her, und leiten sie ab:

$$y'=f(y)=y\cdot\left(\frac{8y}{y+1}-y-1\right)=\frac{8y^2}{y+1}-y^2-y$$

$$f'(y)==\frac{16y\cdot(y+1)-1\cdot 8y^2}{(y+1)^2}-2y-1$$

$$f'(y)==\frac{16y^2+16y-8y^2}{(y+1)^2}-2y-1 \quad \text{(Achtung beim Ableiten auf die Quotientenregel)}$$

$$f'(y)==\frac{8y^2+16y}{(y+1)^2}-2y-1$$

nun unsere Gleichgewichtspunkte einsetzen und schaun was rauskommt (das sagt uns der Taschenrechner)

$f'\left(y^*_1 = 0\right) = -1 \Rightarrow f'\left(y^*\right) < 0 \Rightarrow$ asymptotisch stabil

$f'\left(y^*_2 = 3 + \sqrt{8}\right) = -4,82843 \Rightarrow f'\left(y^*\right) < 0 \Rightarrow$ asymptotisch stabil

$f'\left(y^*_3 = 3 - \sqrt{8}\right) = 0,828427 \Rightarrow f'\left(y^*\right) > 0 \Rightarrow$ instabil