16. Gesucht ist das absolute Maximum der Funktion $f(x,y) = xy(3-x-y)$ auf dem Definitionsbereich $D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, y \leq 3-x\}$.

notwendige Bedingung: Besitzt f in $\vec{x}_0$ eine relatives Extremum, so gilt $f_{x_1}(\vec{x}_0) = 0, \ldots, f_{x_n}(\vec{x}_0) = 0$, kurz: $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

hinreichende Bedingung (für n = 2): Gilt für $f(x,y)$, dass $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$, sowie $D = (x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$, dann nimmt f in (x_0,y_0) ein relatives Extremum an, und zwar für $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ ein relatives Minimum und für $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ ein relatives Maximum. Gilt $D = (x_0,y_0) < 0$, so liegt kein Extremum vor.

$f(x,y) = xy(3-x-y) = 3xy - x^2y - xy^2$
$f_x = 3y - 2xy - y^2 = 0 \rightarrow y_1 = 0$
$f_y = 3x - x^2 - 2xy = 0 \rightarrow x_1 = 0$

das wäre die erste Nullstelle, nun die zweite:
$f_x = 3y - 2xy - y^2 = 0 \rightarrow y^2 = 3y - 2xy$ (durch y dividieren) $\rightarrow y = 3 - 2x$
$f_y = 3x - x^2 - 2xy = 0 \rightarrow y = 3 - 2x$ von oben einsetzen:
$0 = 3x - x^2 - 2x(3-2x) = 3x - x^2 - 6x + 4x^2 = -3x + 3x^2 = 0 \rightarrow 3x = 3x^2 \rightarrow x_2 = 1$
nun wieder einsetzen: $y = 3 - 2x = 3 - 2 \cdot 1 = 1 \rightarrow y_2 = 1$

laut Definitionsbereich: $y \leq 3 - x$ ist der nächste Punkt daraus folgernd:
$x_3 = 0$, $y_3 = 3$

also wären die Punkte:
$x_1 = 0$, $y_1 = 0$
$x_2 = 1$, $y_2 = 1$
$x_3 = 0$, $y_3 = 3$

für die hinreichende Bedingung:
$f_{xx} = -2y$
$f_{xy} = f_{yx} = 3 - 2x - 2y$
$f_y = -2x$

Determinante wäre: $D = (x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2y & 3-2x-2y \\ 3-2x-2y & -2x \end{vmatrix} =$
$= (-2y) \cdot (-2x) - (3-2x-2y)^2 = 4xy - (3-2x-2y)^2$

nun in die Determinante einsetzen und sie auswerten:
$D(0,0) = 4 \cdot 0 \cdot 0 - (3 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0)^2 = -9 < 0 \rightarrow$ Sattelpunkt
$D(1,1) = 4 \cdot 1 \cdot 1 - (3 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0 \rightarrow$ Extremum, $f_{xx} = -2 < 0 \rightarrow$ relatives Maximum
$D(0,3) = 4 \cdot 0 \cdot 3 - (3 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot 3)^2 = -9 < 0 \rightarrow$ Sattelpunkt