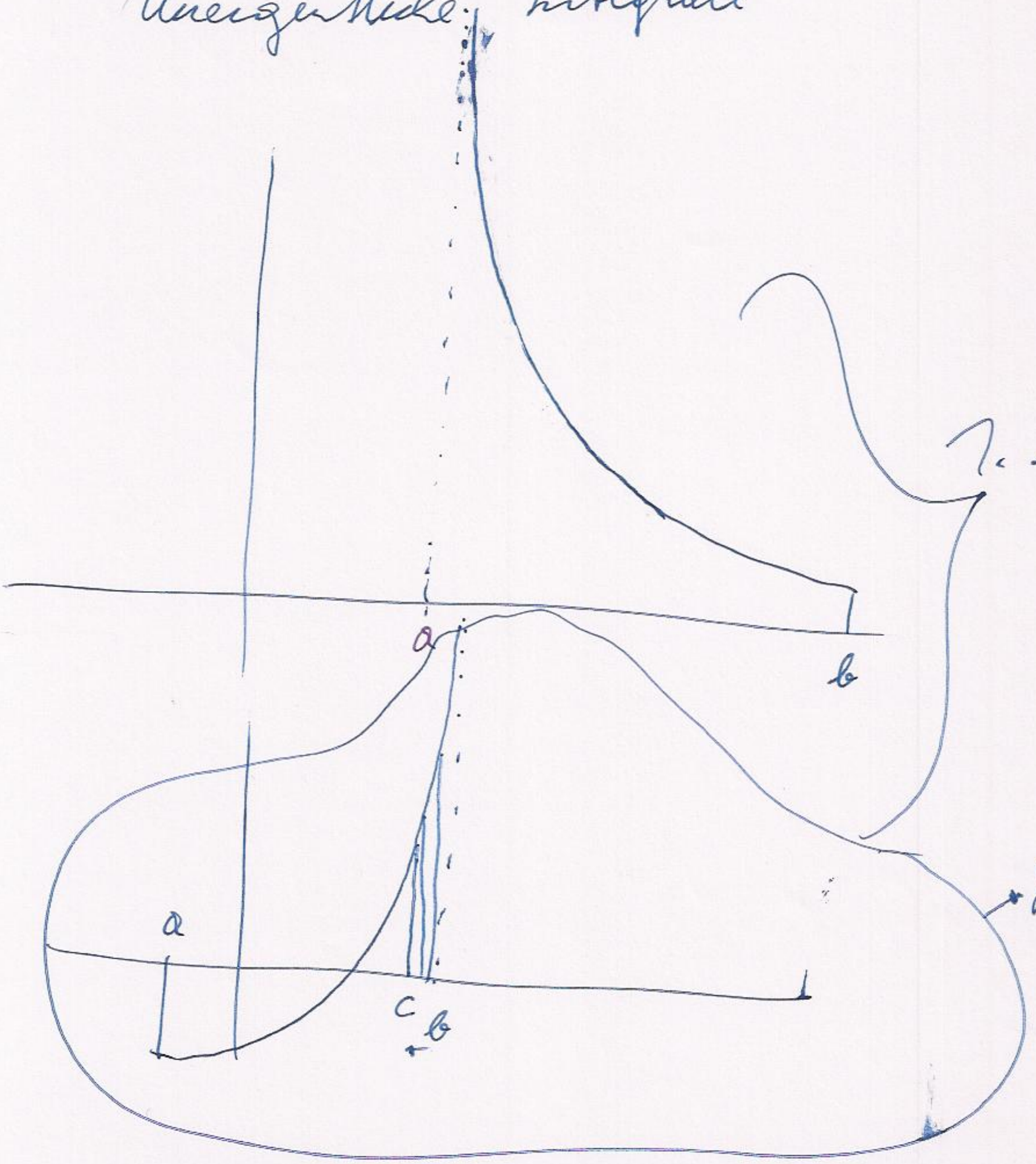
Uneigentliche Integrale



1. Art

Def. 1

2. Art

⇓

Def. 2

Def.:

- f auf $[a, b)$ definiert
- f auf jedem $[a, c] \subset [a, b)$ integrierbar
- $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$ (bzw. $-\infty$)

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x) \cdot dx$$

uneigentliches Integral erster Art

Integral konvergent ⇔ Grenzwert existiert
divergent existiert NICHT

- f auf jedem $[a, b] \subset [a, \infty)$ integrierbar

$$\Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x) \cdot dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x) \cdot dx$$

uneigentliches Integral zweiter Art

Integral konvergent ⇔ Grenzwert existiert
divergent existiert NICHT

Bsp. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} \cdot dx = \lim_{a \to 0^+} \int_a^1 x^{-\frac{1}{3}} \cdot dx =$

1. Art.

$$\overset{HS}{=} \lim_{a \to 0^+} \left(\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \right) \Bigg|_a^1 = \frac{3}{2} \cdot \left(1^{\frac{2}{3}} - \lim_{a \to 0^+} a^{\frac{2}{3}} \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (1 - 0) = \frac{3}{2}$$ (Int. konv.)

2. Art.: $\int_1^\infty x \cdot e^{-x} \cdot dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b x \cdot e^{-x} \cdot dx =$

$$\boxed{\begin{aligned} \int x \cdot e^{-x} \cdot dx &= -e^{-x} \cdot x + \int e^{-x} \cdot 1 \cdot dx = \\ &= -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C \end{aligned}}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(-x e^{-x} - e^{-x} \right) \Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b \to \infty} \Big(\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\overset{\text{"}\infty \cdot 0\text{"}}{-b \cdot e^{-b}}} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{- e^{-b}} \Big) + 1 \cdot e^{-1} + e^{-1} =$$

$$= 0 + \frac{2}{e} = \frac{2}{e}$$ (Int. konv.)

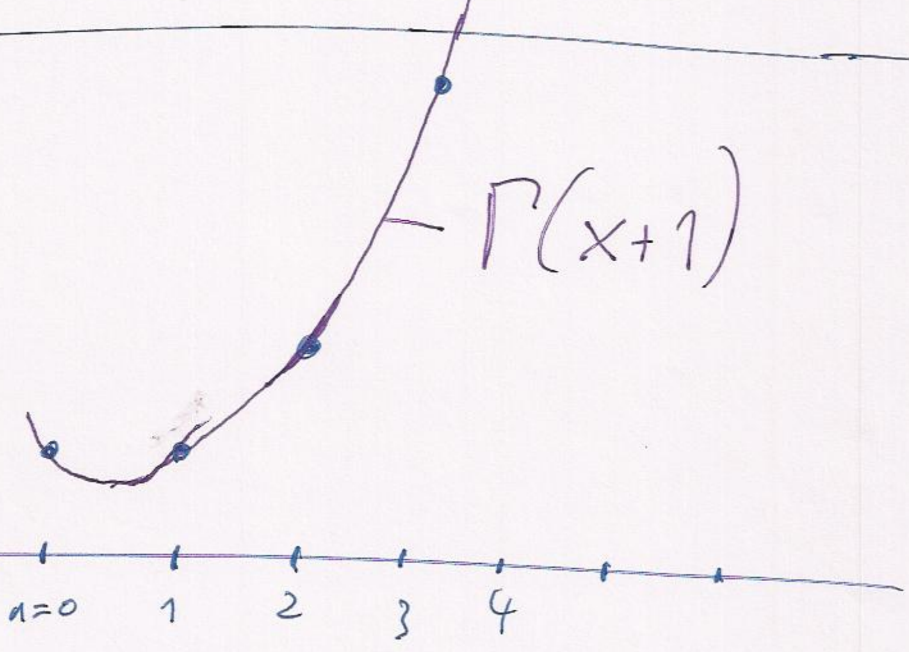
$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{x-1} \cdot dt \quad \exists \text{ ex.}$$

int.

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{1-1} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot dt =$$

$$= -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 0 + e^{0} = 1$$

$n!$



$$\Gamma(n+1) = n!$$

("Majorantenkrit." für Reihen)

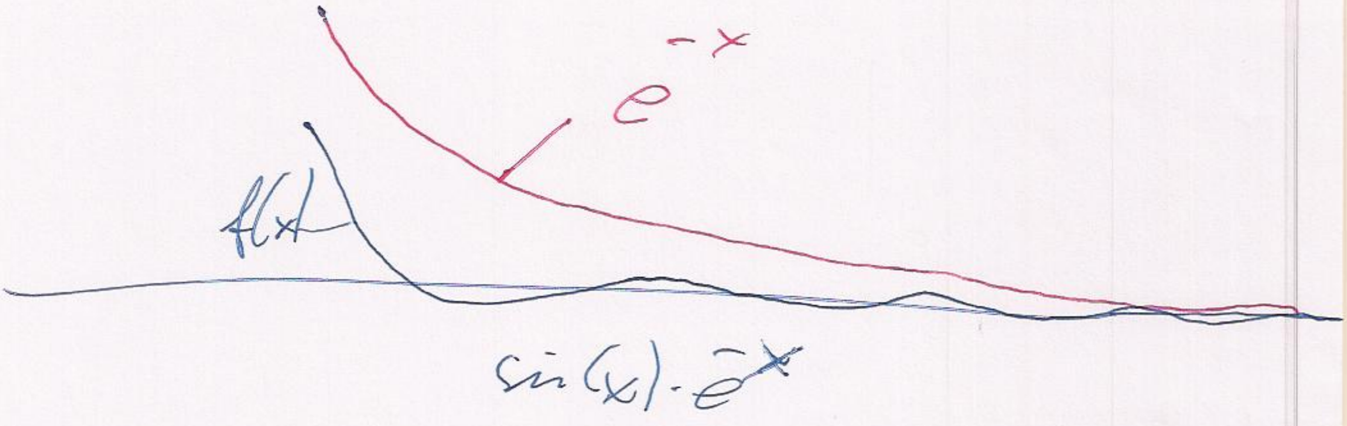
Satz: f, g stückweise stetige Fkt. auf $[0, \infty)$.

$|f(x)| \le g(x)$ für alle $x \ge 0$

$$\int_0^\infty g(x)\cdot dx \quad \text{konvergent}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^\infty f(x)\cdot dx \quad \text{konvergent}$$



$$\begin{tikzcd} \sum a_n \arrow[d] & |a_n| \le b_n & \sum b_n \arrow[d] \\ \text{konv.} & \Longleftarrow & \text{konv.} \end{tikzcd}$$

Satz (Integralkriterium)

$f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ nichtnegative, monoton fallende Fkt.

$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_1^\infty f(x) \cdot dx$ konvergent

$$\Updownarrow$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergent

Beweis:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Bsp.: hyperharmonische Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

Wir wissen bereits:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty \quad \text{divergent}$$

$$\Downarrow \text{ Minor.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \to \infty, \quad \alpha \leq 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}} \to \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ (bew)}$$

U.I.: $$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\, dx = \int_1^{\infty} x^{-\alpha} \cdot dx = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^{\infty} =$$

$$\overset{\alpha \neq 1}{=} \lim_{b\to\infty} \frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \overset{\alpha > 1}{=} 0 + \frac{1}{\alpha-1}$$

$$0 \leftarrow \frac{1}{b^{\alpha-1} \cdot (-\alpha+1)} \Big| \alpha > 1$$

konv.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \text{konv.}, & \alpha > 1 \\ \text{div.} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Funktionen in mehreren Variablen

$$f : \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

skalarwertige Fkt. in n Variablen

Bsp.: • Lineare Fkt.

$$f(x,y) = \alpha \cdot x + \beta \cdot y \qquad \text{(2 Variable)}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n \qquad \text{(n Var.)}$$

• Polynomfkt.

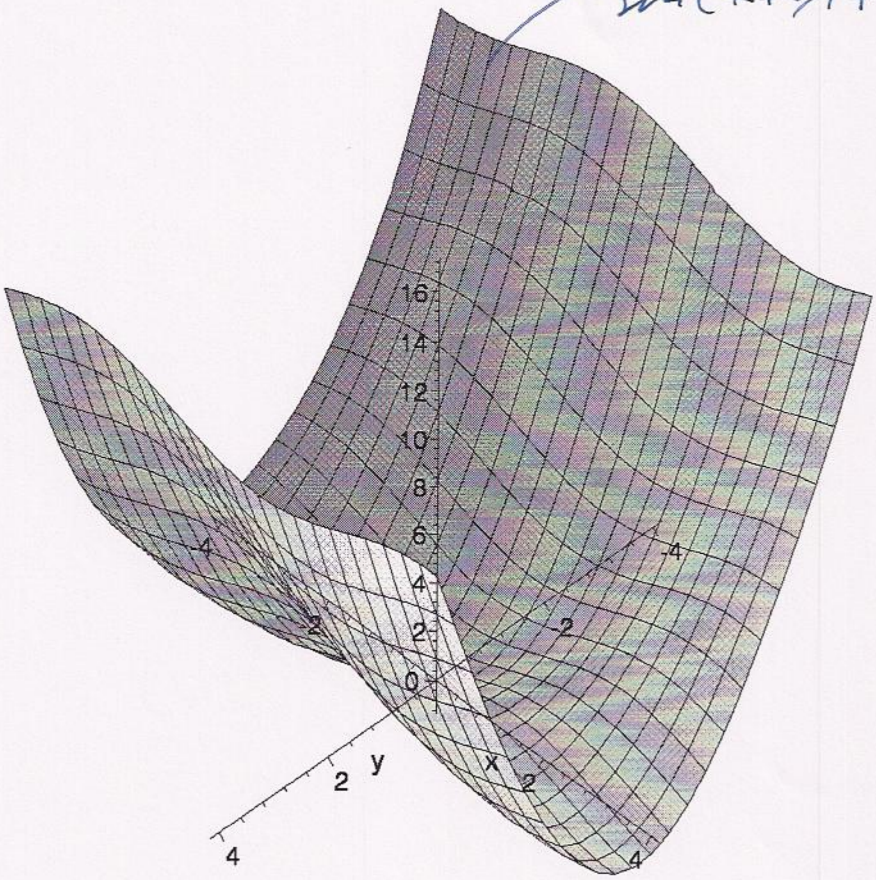
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2} \cdots \sum_{i_n=0}^{k_n} \underbrace{a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot \underbrace{x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}}_{\text{Potenzprodukt}}}_{\text{Term}}$$

$$\text{z.B.: } f(x,y) = x^{\boxed{2}} + 2x^{1}y^{1} + y^{\boxed{2}} + x^{\boxed{1}} + 2 \cdot x^{\boxed{0}}$$

$$\overset{\boxed{2}}{\overset{\shortparallel}{\boxed{1+1}}}$$

$$\deg f = 2$$

```
> plot3d(sin(x+y)+x^2,x=-4..4,y=-4..4);
```



$\sin(x+y)+x^2 = z$

z

```
>
```

- Elementare Fkt. in mehreren Variablen:

analog elem. Fkt. in einer Var.

Darstellung von Fkt. : $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

- als Fläche im Raum
- über <u>Niveaulinien</u> (= Isohypsen)

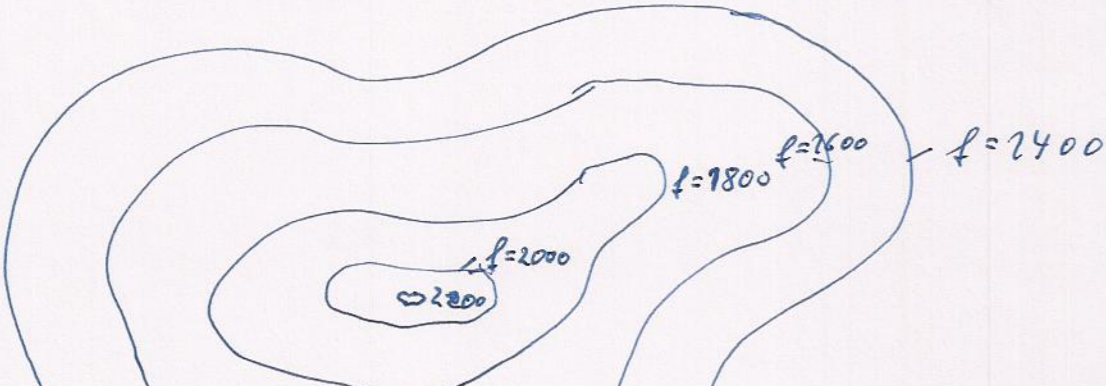
↓

Niveaulinie zum Niveau c der Fkt. f

$$\| $$

$$\{(x,y) \in D : f(x,y) = c\}$$

Bsp.:



Vektorwertige Fkt:

Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Bildbereich $\subseteq \mathbb{R}^m$

$n = m \Rightarrow$ Vektorfeld

Bsp.: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ e^{x-y} \end{pmatrix}$$

jedem Punkt in Ebene (n = 2) wird ein Vektor zugeordnet