Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 3 (SS 2014)
Lösungen

Aufgabe 3.1 Drücken Sie folgende Prädikate jeweils als Boolsche Ausdrücke aus oder argumentieren Sie warum das nicht möglich ist. Die Ausdrücke sollen nur die Variablensymbole $\underline{\mathtt{x}}$, $\underline{\mathtt{y}}$, bzw. $\underline{\mathtt{z}}$ enthalten. Verwenden Sie die **offizielle Syntax** für $\mathcal{BA}(\mathcal{D})$, d.h. **keine** der zusätzlichen Notationsvereinbarungen, die auf den Vorlesungsfolien erwähnt werden.

a) Über $\mathcal{D} = \mathsf{FamX}$: x ist ein Neffe von y.

b) Über $\mathcal{D} = \mathsf{FamX}$: x ist ein Vater oder eine Mutter.

c) Über $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$: $x = |y - z|$.

d) Über $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: $x = |y - z|$. (Wenn möglich: kompakter als über $\mathbb{Z}$.)

e) Über $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: x teilt y (ganzzahlig).

f) Über $\mathcal{D} = \mathbb{S}$: Stack x hat Tiefe 2 oder 3 (enthält also 2 oder 3 Binärzeichen).

Lösung

a) $\underline{(}\underline{\textit{männlich}}\underline{(}\underline{\mathtt{x}}\underline{)}\ \underline{\wedge}\underline{(}\underline{\textit{Geschwister}}\underline{(}\underline{\textit{Mutter}}\underline{(}\underline{\mathtt{x}}\underline{)}\underline{,}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{\vee}\underline{\textit{Geschwister}}\underline{(}\underline{\textit{Vater}}\underline{(}\underline{\mathtt{x}}\underline{)}\underline{,}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}\underline{)}$

b) Man kann zwar einen Boolschen Ausdruck angeben, der besagt, dass x Vater oder Mutter eines Kindes y ist; aber um das *einstellige* Prädikat 'Vater oder Mutter' auszudrücken benötigt man einen Existenzquantor.

c) $\underline{(}\underline{(}\underline{\leq}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{,}\underline{\mathtt{z}}\underline{)}\underline{\wedge}\underline{\mathtt{x}}\underline{=}\underline{-}\underline{(}\underline{\mathtt{z}}\underline{,}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}\underline{\vee}\underline{(}\underline{\neg}\underline{\leq}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{,}\underline{\mathtt{z}}\underline{)}\underline{\wedge}\underline{\mathtt{x}}\underline{=}\underline{-}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{,}\underline{\mathtt{z}}\underline{)}\underline{)}\underline{)}$

d) $\underline{\mathtt{x}}\underline{=}\underline{+}\underline{(}\underline{\dot{-}}\underline{(}\underline{\mathtt{y}}\underline{,}\underline{\mathtt{z}}\underline{)}\underline{,}\underline{\dot{-}}\underline{(}\underline{\mathtt{z}}\underline{,}\underline{\mathtt{y}}\underline{)}\underline{)}$

e) Man braucht einen Existenzquantor um das (zweistellige) Teilbarkeitsprädikat auszudrücken. Es gibt daher keinen entsprechenden Boolschen Ausdruck.

f) $\underline{(}\underline{\text{istleer?}}\underline{(}\underline{\text{pop}}\underline{(}\underline{\text{pop}}\underline{(}\underline{\text{pop}}\underline{(}\underline{\mathtt{x}}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\underline{)}\underline{\wedge}\underline{\neg}\underline{\text{istleer?}}\underline{(}\underline{\text{pop}}\underline{(}\underline{\mathtt{x}}\underline{)}\underline{)}\underline{)}$

Anmerkung: Es gibt natürlich jeweils auch alternative Lösungen.

Aufgabe 3.2 Gegeben sei folgende Grammatik G für eine Teilmenge $\mathcal{A}$ arithmetischer Ausdrücke:

$$G = \langle \{S, K\}, \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{+}, \underline{-}, \underline{(}, \underline{)}\}, \{S \to K|\underline{(}S\underline{+}S\underline{)}|\underline{-}S, K \to \underline{0}|\underline{1}|\underline{2}\}, S\rangle$$

a) Geben Sie eine induktive Definition der von G erzeugten Sprache $\mathcal{A} = \mathcal{L}(G)$ an.

b) Geben Sie eine Interpretationsfunktion $\mathcal{M}$ für $\mathcal{A}$ an, die der intendierten Bedeutung entspricht. Berechnen Sie damit schrittweise den Wert des Ausdrucks $\underline{(}\underline{(}\underline{1}\underline{+}\underline{0}\underline{)}\underline{+}\ \underline{-}\underline{(}\underline{2}\underline{+}\underline{-}\underline{2}\underline{)}\underline{)}$.

c) Warum ist es sinnvoll zur Gewinnung der Definition von $\mathcal{M}$ die Grammatik zunächst in eine induktive Definition von $\mathcal{A}$ umzuformulieren?

Lösung

a) $\mathcal{A}$ ist die kleinste Menge für die Folgendes gilt:

(A1) $\underline{0}, \underline{1}, \underline{2} \in \mathcal{A}$

(A2) $\underline{-}\,t \in \mathcal{A}$ wenn $t \in \mathcal{A}$

(A3) $\underline{(}t_1\underline{+}t_2\underline{)} \in \mathcal{A}$ wenn $t_1, t_2 \in \mathcal{A}$

b) Der intendierte Wertebereich von $\mathcal{M}$ ist Z (ganze Zahlen). Da keine Variablen in der Sprache vorkommen ist $\mathcal{M}$ vom Typ $\mathcal{M} : \mathcal{A} \to Z$ und wird folgendermaßen definiert:

(MA1) $\mathcal{M}(\underline{0}) = 0$, $\mathcal{M}(\underline{1}) = 1$, $\mathcal{M}(\underline{2}) = 2$;

(MA2) $\mathcal{M}(\underline{-}T) = -\mathcal{M}(T)$

(MA3) $\mathcal{M}(\underline{(}t_1\underline{+}t_2\underline{)}) = \mathcal{M}(t_1) + \mathcal{M}(t_2)$

Auswertung des angegebenen Terms entsprechend dieser Definition:

$\mathcal{M}(\underline{(}\underline{(}\underline{1}\underline{+}\underline{0}\underline{)}\underline{+}\,\underline{-}\underline{(}\underline{2}\underline{+}\underline{-}\underline{2}\underline{)}\underline{)}) \overset{MA3}{=}$

$\mathcal{M}(\underline{(}\underline{1}\underline{+}\underline{0}\underline{)}) + \mathcal{M}(\underline{-}\underline{(}\underline{2}\underline{+}\underline{-}\underline{2}\underline{)}) \overset{MA3}{=}$

$(\mathcal{M}(\underline{1}) + \mathcal{M}(\underline{0})) + \mathcal{M}(\underline{-}\underline{(}\underline{2}\underline{+}\underline{-}\underline{2}\underline{)}) \overset{MA2}{=}$

$(\mathcal{M}(\underline{1}) + \mathcal{M}(\underline{0})) + (-\mathcal{M}(\underline{(}\underline{2}\underline{+}\underline{-}\underline{2}\underline{)}) \overset{MA3}{=}$

$(\mathcal{M}(\underline{1}) + \mathcal{M}(\underline{0})) - (\mathcal{M}(\underline{2}) + \mathcal{M}(\underline{-}\underline{2})) \overset{MA2}{=}$

$(\mathcal{M}(\underline{1}) + \mathcal{M}(\underline{0})) - (\mathcal{M}(\underline{2}) + (-\mathcal{M}(\underline{2})) \overset{MA1}{=}$

$(1 + 0) - (2 + (-2)) = 1 - (2 - 2) = 1 - 0 = 1$

c) Die induktive Definition von $\mathcal{L}(G)$ ergibt sich einerseits leicht aus G, hat aber andererseits bereits genau die Form, die unmittelbar für eine Definition von $\mathcal{M}$ verwendet werden kann. Das gilt insbesonders für die notwendige Trennung der verwendeten Termvariablen für die beiden Argumente für + in $MA3$, die in der entsprechenden Produktion $S \to \underline{(}S\underline{+}S\underline{)}$ nicht sichtbar ist.

Aufgabe 3.3 Erweitern Sie die Programmiersprache $AL(\mathcal{D})$ um eine <u>repeat</u>-<u>until</u>-Schleife. Genauer: Spezifizieren Sie in Ergänzung der Definition von $AL(\mathcal{D})$ eine Bedingung (AL5) zur Festlegung der Syntax und in Ergänzung von $\mathcal{M}_{AL}$ eine entsprechende Bedingung (MAL5) zur Festlegung der Semantik der üblichen <u>repeat</u>-<u>until</u>-Schleifenkonstruktion.

Lösung

(AL5) Ist $B \in \mathcal{BA}(\mathcal{D})$ und $\alpha \in AL(\mathcal{D})$, dann ist $\underline{\text{repeat}}\,\alpha\,\underline{\text{until}}\,B \in AL(\mathcal{D})$.

(MAL5) $\mathcal{M}_{AL}(I, \underline{\text{repeat}}\,\alpha\,\underline{\text{until}}\,B) = \begin{cases} \mathcal{M}_{AL}(I, \alpha) & \text{für } w = \mathbf{t} \\ \mathcal{M}_{AL}(\mathcal{M}_{AL}(I, \alpha), \underline{\text{repeat}}\,\alpha\,\underline{\text{until}}\,B) & \text{für } w = \mathbf{f} \end{cases}$

wobei w eine Abkürzungen für $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(\mathcal{M}_{AL}(I, \alpha), B)$ ist.

Aufgabe 3.4 Analysieren Sie folgende Sätze:

(A1) Falls es morgen regnet oder schneit, wird Lara nicht kommen oder sie wird trotzdem kommen, aber verärgert sein.

(A2) Lara wird morgen verärgert sein, wenn weder Tanja noch Gernot Chris einladen.

(A3) Weder Tanja noch Gernot werden bei Regen oder Schneefall Chris einladen.

(A4) Wenn Lara morgen nicht kommt, dann regnet es oder Gernot hat Chris nicht eingeladen.

a) Formulieren Sie Aussagen, die den aussagenlogisch relevanten atomaren Satzteilen dieser Sätze entsprechen und ordnen Sie diesen aussagenlogischen Variable A, B, ... zu.

b) Übersetzen Sie die vier Sätze entsprechend den Zuordnungen aus (a) in aussagenlogische Formeln F_1, F_2, F_3, F_4.

c) Geben Sie ein Gegenbeispiel zur Behauptung an, dass F_4 aus F_1, F_2 und F_3 logisch folgt.

Lösung

a) Folgende Aussagen entsprechen den relevanten Satzteilen:
A: Morgen regnet es.
B: Morgen schneit es.
C: Lara wird morgen kommen.
D: Lara wird morgen verärgert sein.
E: Tanja lädt Chris ein.
F: Gernot lädt Chris ein.

b) $F_1 = (A \vee B) \supset (\neg C \vee (C \wedge D))$
$F_2 = (\neg E \wedge \neg F) \supset D$
$F_3 = (A \vee B) \supset (\neg E \wedge \neg F)$
$F_4 = \neg C \supset (A \vee \neg F)$

c) Um die Konsequenzbehauptung zu überprüfen und Gegenbeispiele zu finden könnte man eine entsprechende Wahrheitstafel konstruieren. Diese hat allerdings in diesem Fall $2^6 = 64$ Zeilen. Eine zielorientiertere Argumentation lautet wie folgt:

Ein Gegenbeispiel der Konsequenzbehauptung $F_1, F_2, F_3 \models F_4$ ist eine Interpretation I, für die $I(F_1) = I(F_2) = I(F_3) = \mathbf{t}$ und $I(F_4) = \mathbf{f}$ gilt. Aus $I(\neg C \supset (A \vee \neg F)) = \mathbf{f}$ folgt $I(\neg C) = \mathbf{t}$ und $I(A \vee \neg F) = \mathbf{f}$ und daher $I(C) = \mathbf{f}$, $I(A) = \mathbf{f}$, $I(F) = \mathbf{t}$. Wenn wir nun außerdem $I(B) = \mathbf{f}$ setzen, dann gilt $I(F_1) = I(F_3) = \mathbf{t}$. Um auch F_2 in I wahr zu machen, genügt es $I(D) = \mathbf{t}$ zu setzen. $I(E)$ kann beliebig gesetzt werden.

Zusammengefasst lautet ein konkretes Gegenbeispiel daher wie folgt:
$I(A) = \mathbf{f}$: Morgen regnet es nicht.
$I(B) = \mathbf{f}$: Morgen schneit es nicht.
$I(C) = \mathbf{f}$: Lara wird morgen nicht kommen.
$I(D) = \mathbf{t}$: Lara wird morgen verärgert sein.
$I(E) = \mathbf{t}$: Tanja lädt Chris ein.
$I(F) = \mathbf{t}$: Gernot lädt Chris ein.

Aufgabe 3.5 Beweisen Sie Folgendes für die Theorie der Totalordnungen (Folie 417):
Das Axiom der Antisymmetrie ist unabhängig von der Menge der anderen drei Axiome (Transitivität, Reflexivität, Totalität).

Lösung
Es ist klar, dass es Totalordnungen gibt, also Modellstrukturen in denen Transitvität (Tr), Reflexivität (R), Totalität (To) und Antisymmetrie (As) gilt. Daher gilt $Tr, R, To \not\models \neg As$. Man nehme z.B. die übliche "kleiner-gleich"-Relation über den ganzen Zahlen. Also $\mathcal{I} = \langle Z, \Phi, \xi \rangle$ über der Signatur $\Sigma_O = \langle \{\preceq\}, \{\}, \{\} \rangle$, wobei $\Phi(\preceq)$="$\leq$" (ξ beliebig).
Um zu zeigen, dass auch $Tr, R, To \not\models As$ gilt, müssen wir nun noch Interpretation über Σ_O angeben, die eine transitive, reflexive und totale (relationale) Struktur bestimmt, die nicht antisymmetrisch ist. Das geht mit einem Gegenstandsbereich mit nur zwei Elementen wie folgt: $\mathcal{I}' = \langle \{a, b\}, \Phi, \xi \rangle$, wobei $\Phi(\preceq)(a, a) = \Phi(\preceq)(a, b) = \Phi(\preceq)(b, a) = \Phi(\preceq)(b, b) = \mathbf{t}$. Offensichtlich gilt $\mathsf{val}_{\mathcal{I}'}(Tr) = \mathbf{t}$, $\mathsf{val}_{\mathcal{I}'}(R) = \mathbf{t}$, $\mathsf{val}_{\mathcal{I}'}(To) = \mathbf{t}$, aber $\mathsf{val}_{\mathcal{I}'}(As) = \mathbf{f}$, und daher $Tr, R, To \not\models As$.