Mathematik 1 Prüfung (Drmota) **5. 10. 2007** **Ulrich Buchgraber**

Bsp 1

Beweisen Sie durch Induktion:

$$\cos(x)\cdot\cos(2x)\,..\,\cos\left(2^{n-1}x\right) = \frac{\sin\left(2^{n}\cdot x\right)}{2^{n}\cdot\sin(x)}$$

Hinweis: $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Lösung Bsp 1

Induktionsanfang:

$$n = 1 \qquad \cos(x) = \frac{\sin\left(2^{1}x\right)}{2^{1}\sin(x)} = \frac{2\sin(x)\cdot\cos(x)}{2\sin(x)} = \cos(x)$$

$$n = 2 \qquad \cos(x)\cdot\cos(2x) = \frac{\sin\left(2^{2}x\right)}{2^{2}\sin(x)} = \frac{2\sin(2x)\cdot\cos(2x)}{4\sin(x)} = \frac{2\cdot2\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\cos(2x)}{4\sin(x)} = \cos(x)\cdot\cos(2x)$$

Induktionsbehauptung:

$$\cos(x)\cdot\cos(2x)\,..\,\cos\left(2^{n-1}x\right)\cdot\cos\left(2^{n}x\right) = \frac{\sin\left(2^{n+1}\cdot x\right)}{2^{n+1}\cdot\sin(x)}$$

$\Rightarrow$ Multiplikation auf beiden Seiten mit $\cos\left(2^{n}x\right)$.

Linke Seite:

$$\cos(x)\cdot\cos(2x)\,..\,\cos\left(2^{n-1}x\right)\cdot\cos\left(2^{n}x\right)$$

Rechte Seite:

$$\frac{\sin\left(2^{n}\cdot x\right)}{2^{n}\cdot\sin(x)}\cdot\cos\left(2^{n}x\right) = \frac{2\cdot\sin\left(\frac{2\cdot2^{n}}{2}\cdot x\right)\cos\left(\frac{2\cdot2^{n}}{2}\cdot x\right)}{2\cdot2^{n}\cdot\sin(x)} = \frac{\sin\left(2\cdot2^{n}\cdot x\right)}{2\cdot2^{n}\cdot\sin(x)} = \frac{\sin\left(2^{n+1}\cdot x\right)}{2^{n+1}\cdot\sin(x)}$$

entspricht Induktionsbeh.
QED

Bsp 2

Gegeben ist eine 4x4 Matrix A.

Gesucht ist die inverse Matrix A^{-1} nach dem erweiterten Gauß-Verfahren.

Bsp 3

Beweisen sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\cdot x^n\right] \quad \text{für } |x| < \frac{1}{4}$$

konvergiert.

Bsp 3 Lösung

Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1 \qquad \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\cdot(2n-n)!}$$

$$\left|\frac{\frac{1}{n+2}\left[\binom{2(n+1)}{n+1}\right]\cdot x^{n+1}}{\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\cdot x^n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n+2}\,\frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!\cdot[2(n+1)-(n+1)]!}\cdot x^{n+1}}{\frac{1}{n+1}\,\frac{(2n)!}{n!\cdot(2n-n)!}\cdot x^n}\right| = \ldots$$

$$\ldots = \left|\frac{\frac{1}{n+2}\,\frac{[2(n+1)]!}{(n+1)!\cdot(n+1)!}\cdot x^{n+1}}{\frac{1}{n+1}\,\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\cdot x^n}\right| = \left|\frac{(n+1)\cdot x^{n+1}\cdot[2(n+1)]!\cdot n!\cdot n!}{(n+2)\cdot x^n\cdot(2n)!\cdot(n+1)!\cdot(n+1)!}\right| = \ldots$$

NR: $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$

$$\frac{[2(n+1)]!}{(2n)!} = (2n+2)\cdot(2n+1) = 2\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$$

$$\ldots = \left|\frac{x\cdot(n+1)\cdot 2\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{(n+2)\cdot(n+1)\cdot(n+1)}\right| = \left|x\cdot\frac{2\cdot(2n+1)}{(n+2)}\right| = \left|x\cdot\frac{2\cdot 2\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(n+2)}\right| = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(n+2)}\cdot|4x| < 1$$

$$\Rightarrow \quad |x| < \frac{1}{4}$$

Bsp 4 (Theorie)

Permutationen einer Menge? Wie berechnet man die Anzahl?

Permutationen einer Multimenge? Wie berechnet man die Anzahl?

Bsp 5 (Theorie)

Konvergenz von Folgen?

Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$?