105–106) Man zeige mit Hilfe der Stirlingschen Approximationsformel $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$:

105)

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,(2n-n)!} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

Einsetzen in die Stirlingsche Approximationsformel:

$$\frac{(2n)!}{n!\,n!} \sim \frac{2n^n e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}}{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})} \; dann\ vereinfachen:$$

$$\frac{2n^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi 2n}}{n^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi n}^{\,2}} = \frac{2^{2n}\cancel{n^{2n}}\cancel{e^{-2n}}\sqrt{4\pi n}}{\cancel{n^{2n}}\cancel{e^{-2n}}\sqrt{2\pi n}^{\,2}} = \frac{4^n\cancel{\sqrt{4\pi n}}}{\sqrt{4\pi^{\cancel{2}} n^{\cancel{2}}}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$