Übungsrunde 8, Gruppe 2

LVA 107.369, Übungsrunde 8, Gruppe 2, 05.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 12/2006

1 3.55

1.1 Angabe

Bei einer Serviceeinrichtung wird man mit Wahrscheinlichkeit 1/4 sofort bedient (d.h. keine Wartezeit), oder man hat eine nach Ex_{12} verteilte Wartezeit (Einheit: Minuten). Bestimmen Sie:
(a) die Verteilungsfunktion der Wartezeit (+ Zeichnung);
(b) die modifizierte Dichte f*;
(c) einen Ausdruck für das p-Quantil, speziell für den Median;
(d) die Wahrscheinlichkeit noch mindestens weitere 10 Minuten zu warten, wenn man bereits 10 Minuten gewartet hat.

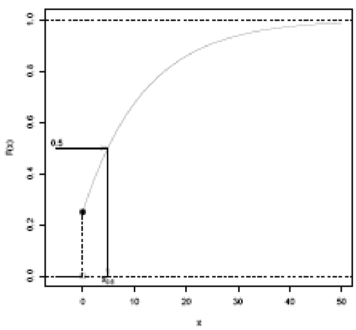
1.2 Lösung des Beispiels

1.2.1 a

Die Wartezeit hat eine gemischte Verteilung. Die Verteilungsfunktion lautet:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - \frac{3}{4}e^{-\frac{x}{12}} & x > 0 \end{cases}$$

Wahrscheinlichkeit für $x = 0$ ist $\frac{1}{4}$, also muss man die Kurve um $\frac{1}{4}$ nach oben 'verschieben' und damit das Maximum nicht über 1 geht wird die Kurve abgeflacht (die Fläche oberhalb der Kurve ist der Erwartungswert):



1.2.2 b

Die modifizierte Dichte ist die Ableitung der Verteilungsfunktion:

$$f^*(x|x<0) = 0$$
$$f^*(x|x>0) = F'(x) = \frac{1}{16}e^{-\frac{x}{12}}\, I_{0,\infty}$$

1.2.3 c

Berechnung des Medians $\tilde{x}$:

$$F(x_{0.5}) = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x_{0.5} = -12\ln\frac{2}{3} = 4.87 \text{ Min.}$$

1.2.4 d

$$W\{X>20|X>10\} = \frac{W\{X>20\}}{W\{X>10\}} = \frac{e^{-\frac{20}{12}}}{e^{-\frac{10}{12}}} = \frac{3}{4}e^{-\frac{5}{6}} = 0.435$$

2 3.58

2.1 Angabe

Bestimmen Sie den Erwartungswert einer binomialverteilten $sG\ X\,\tilde{}B_{n,p}$.

2.2 Lösung des Beispiels

2.3 Erste Lösungsmöglichkeit (in der UE gezeigt)

$$\mathbb{E} = \sum_x xp(x) = \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{k}p^x(1-p)^{n-x} = \sum_{\mathbf{x=1}}^{n} x\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x} =$$
$$\sum_{x=0}^{n}\frac{n!}{(\mathbf{x-1})!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{\mathbf{n-1}}\frac{n!}{\mathbf{x}!(n-(\mathbf{x+1}))}p^{\mathbf{x+1}}(1-p)^{n-(\mathbf{x+1})} =$$
$$np\underbrace{\sum_{x=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{x!(n-x-1)!}p^x(1-p)^{n-x-1}}_{=\mathcal{B}_{n-1,p},\binom{n-1}{p}\Rightarrow\mathbf{1}} = \mathbf{np}$$

2.4 Zweite Lösungsmöglichkeit (in der UE gezeigt)

Über Alternativverteilungen.

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad X_i \rightsquigarrow A_p$$

$$\mathbb{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

$$\mathbb{E}(X_i) \underbrace{=}_{\text{SvuStat}} 0(1-p) + 1p = p$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = np$$

In der UE wurde noch die Varianz gestreift. Stochastische Unabhängigkeit vorausgesetzt gilt:

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = np(1-p)$$

Weil gilt

$$\mathbb{E}(X_i^2) \underbrace{=}_{\text{SvuStat}} 0^2(1-p) + 1^2 p = p$$

gilt für die Varianz:

$$\mathrm{Var}(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

2.5 Lösung über Erzeugende Funktionen (mein Lösungsweg)

Sei X eine $B_{N,p}$-verteilte Zufallsvariable, d.h. ein N-fach mit Wahrscheinlichkeit p wiederholtes Bernoulli-Experiment:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{N} p(X = k) \cdot k =$$

$$\sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{(N-k)} \cdot k =$$

$$(1-p)^N \cdot \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \cdot (\frac{p}{1-p})^{k-1} \cdot k =$$

$$p \cdot (1-p)^{N-1} \cdot \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \cdot (\frac{p}{1-p})^{k} \cdot k =$$

$$p \cdot (1-p)^{N-1} \cdot \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \frac{d}{dx} \cdot x^k \cdot = \qquad x = \frac{p}{1-p}, \square$$

$$p \cdot (1-p)^{N-1} \cdot \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \cdot x^k \cdot =$$

$$p \cdot (1-p)^{N-1} \cdot \frac{d}{dx} (1+x)^N =$$

$$p \cdot (1-p)^{N-1} \cdot N \cdot (1+x)^{N-1} =$$

$$p \cdot (1-p)^{N-1} \cdot N \cdot (1 + \frac{p}{1-p})^{N-1} =$$

$$p \cdot (1-p)^{N-1} \cdot N \cdot (\frac{1}{1-p})^{N-1} =$$

$$p \cdot N$$

$\square$ Ableitung nach Regeln für Erzeugende Funktionen:

$$f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} f_k \cdot x^k$$

Das Modell liefert also gerade das, was es soll, nämlich die Einzelwahrscheinlichkeit multipliziert mit der Zahl der Einzelexperimente.

3 3.62

3.1 Angabe

Bestimmen Sie den Erwartungswert einer exponentialverteilten $sG\ X\ \tilde{}E_{x_\tau}$.

3.2 Lösung des Beispiels

Wir betrachten eine bestimmte kontinuierliche Verteilungsfunktionen, die Exponentialverteilung. Eine exponentialverteilte Zufallsvariable X mit dem Parameter $\lambda > 0$ hat die folgende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$f_x(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Wir berechnen den Erwartungswert $E[X]$:

$$\begin{aligned} E[X] = \int_0^\infty x f_x(x)\ dx = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\ dx \underbrace{=}_{\square} \\ -e^{-\lambda x}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} = \\ 0 + (-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x})|_0^\infty = \frac{\mathbf{1}}{\lambda} \end{aligned}$$

Man beachte, dass statt λ auch $\frac{1}{\tau}$ verwendet wird.[1]
Im Rechenschritt $\square$ wurde die partielle Integration (Produktintegration)

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\ dx = |u(x) \cdot v(x)|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\ dx$$

angewandt. Dabei waren $u'(x) = \tau e^{-\tau x}$, $v(x) = x$, $a = 0$ und $b = \infty$.

4 3.66

4.1 Angabe

Bestimmen Sie den Erwartungswert der Wartezeit bei der Serviceeinrichtung von Beispiel 55.

[1]Prof. Viertl verwendet in seinen VO-Folien $\frac{}{\tau}$, ebenso auf S. 50 in 'Einführung in die Stochastik'. Bosch verwendet in 'Elementare Einf.i.d.Wahrscheinlichkeitsrechnung' auf S. 138 α, und in weiterer Literatur und in Websites wird oft λ verwendet.

4.2 Lösung des Beispiels

Die modifizierte Dichte aus Beispiel 3.55 ist: $f(x) = \frac{1}{16} \cdot e^{-\frac{x}{12}}$.
Der Erwartungswert wird nun mit $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)^* \; dx$ berechnet.
Mit der partiellen Integration ergibt sich $\mathbb{E}[X] = 0 \cdot \underbrace{0.25}_{p(0)} + \int_0^\infty \frac{x}{16} e^{-\frac{x}{12}} \, dx$, und das ergibt 9 Minuten.
(Zu dem Integral)

$$\frac{12}{16} \int_0^\infty x \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}\, x = \frac{12^2}{16} = 9$$

5 3.71

5.1 Angabe

Bestimmen Sie die Varianz/Streuung der Wartezeit bei der Serviceeinrichtung von Beispiel 55.

5.2 Lösung des Beispiels

Für eine exponentialverteilte sG X ˜Ex_τ gilt:

$$E(X) = \tau, \qquad E(X^2) = 2\tau^2, \qquad Var(X) = \tau^2$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot p(0) + \int_0^\infty \frac{1}{16} e^{-\frac{x^2}{12}} \, dx = \frac{3}{4} \int_0^\infty \frac{x^2}{16} e^{-\frac{x}{12}} \, dx = 216$$
$$\text{Varianz}(X) = E(X^2) - \tau^2 = 216 - 81 = 135 \, [Min^2]$$
$$\text{Streuung} = \sqrt{\text{Varianz}(X)} = \sqrt{135} \, [Min]$$

6 3.73

6.1 Angabe

Bestimmen Sie für X ˜$N(0, 1)$ den Erwartungswert von $Y = |X|$.

6.2 Theoretische Grundlagen: Satz vom unbewussten Statistiker (SvuStat)

1. Ist X diskret verteilt $X \rightsquigarrow p(x)$,$\psi \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und $\exists \, \mathbb{E}[\psi(X)]$, so gilt:

$$\mathbb{E}[\psi(X)] = \sum_{x:p(x)>0} \psi(x) \cdot p(x)$$

2. Ist X kontinuierlich verteilt $X \rightsquigarrow p(x)$,$\psi \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und $\exists\, \mathbb{E}[\psi(X)]$, so gilt:

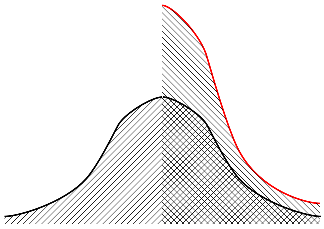
$$\mathbb{E}[\psi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot f(x) \, \mathrm{d}\, x$$

3. Allgemein:

$$\mathbb{E}[\psi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \cdot f(x) \, \mathrm{d}\, x$$

6.3 Lösung des Beispiels

Betrachten zunächst geometrisch den Sachverhalt:



$$\mathbb{E}(|X|) \overbrace{=}^{\text{SvuStat}} = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}\, x = \text{ Beachte Symmetrie! } =$$
$$2 \int_{0}^{\infty} |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}\, x = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} |_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\pi}}$$