Runde 7, Beispiel 48

LVA 118.181, Übungsrunde 7, 01.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 07.12.2006

1 Angabe

Man bestimme die Green-Funktion des Randwertproblems

$$y'' = b(x) \qquad y(0) + y(l) = 0; y'(0) + y'(l) = 0$$

2 Theoretische Grundlagen: Green-Funktion

Green-Funktion für RWP mit homogener Randbedingung: Ist $X(t)$ eine Fundamentalmatrix von $\dot{x} = A(t)x$ und det $D \neq 0$ mit $D = RX(a) + SX(b)$, so besitzt das RWP

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad Rx(a) + Sx(b) = 0$$

die eindeutige Lösung

$$x(t) = \int_a^b G(t, \tau)b(\tau)\partial\tau$$

mit der Matrix-Funktion $G : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ der Gestalt:

$$G(t, \tau) = \begin{cases} X(t)[E - D^{-1}SX(b)]X(\tau)^{-1} & a \leq \tau \leq t \\ X(t)[-D^{-1}SX(b)]X(\tau)^{-1} & t < \tau \leq b \end{cases}$$

G ist die Green-Funktion des RWP.
Wenn ein halbhomogenes RWP eine Green-Funktion besitzt, kann durch Superposition einfach die Lösung des zugehörigen inhomogenen RWP errechnet werden. Ist $x(t)$ eine Lösung des RWP und $y(t)$ eine beliebige, leicht zu bestimmende Funktion, welche nur die Randbedingungen $Ry(a) + Sy(b) = r$ erfüllt, so genügt $z(t) := x(t) - y(t)$ dem halbhomogenen RWP

$$\dot{z} = Az + b(t) - (\dot{y}(t) - A(t)y(t)), \qquad Rz(a) + Sz(b) = 0$$

Lösung des inhomogenen RWP mit der Green-Funktion:

1. Suche ein $y(t)$, das nur den inhomogenen Randbedingungen $Ry(a) + Sy(b) = r$ genügt.

2. Berechnung der Green-Funktion G des zugehörigen halbhomogenen RWP

$$z(t) = \int_a^b G(t, \tau)(b(\tau) - \dot{y}(\tau) + A(\tau)y(\tau))\partial\tau$$

3. $x(t) = y(t) + z(t)$ ist die Lösung des RWP.

3 Lösung des Beispiels

Es gilt:

$$L[y] = b(x),\ Ry(a) + Sy(b) = 0$$

Wir erhalten:

$$g(x,\omega) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + \frac{\omega}{2} - \frac{1}{4}, & 0 \leq x < \omega \\ \frac{x}{2} - \frac{\omega}{2} - \frac{1}{4}, & \omega < x \leq 1 \end{cases}$$

Lösungsbasis: $y(x) = c_1 \cdot x + c_2$ erhält man aus

$$y(x) = \int_a^b g(x,\omega) b(\omega)\, d\omega$$