Entsprechend ergibt sich unter Vernachlässigung der Geschwindigkeitsänderung in dem Zeitintervall der neue Ort in dem Zeitintervall der neue Ort

$$x_1 = x_o + v_{_0}\Delta t$$

Aus diesen Werten v_1 und x_1 ergibt sich über das zweite Newton'sche Axiom die neue Beschleunigung a_1 . Im folgenden Schritt kann man dementsprechend aus v_1, x_1 und a_1 die Werte v_2 und x_2 , bzw. im weiteren v_i und x_i ,berechnen:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + a_{_n}\Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + v_n\Delta t \end{aligned} \tag{9}$$

Um also die Geschwindigkeit und den Ort zu einem Zeitpunkt $t$zu ermitteln, unterteilt man das Zeitintervall $t - t_o$ in eine große Anzahl kleinerer Intervalle Δt und wendet auf sie, beginnend bei t_o, iterativ die Gleichungen 9 an. Das bedeutet eine große Anzahl einfacher, sich stets wiederholender Rechenschritte, die man am besten einem Computer überlässt. Das beschriebene Verfahren, das Zeitintervall in kleine Schritte zu zerlegen und die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und den Ort injedem Schritt aus den Ergebnissen des vorangegangenen Schritts zu berechnen, wird numerische Integration bzw. numerisches Lösen der Differentialgleichung genannt.

Verbesserte Verfahren Der Euler Algorithmus 9 ist nur die einfachste Form eines numerischen Integrationsverfahren und oft nicht sehr stabil. Die naheliegendste Verbesserung, die meist zu erstaunlichen Verbesserungen führt, besteht darin, wie in 10 gezeigt, die Formeln zu modifizieren, d.h. bei der Berechnung vom neuen x-Wert den eben berechneten $v_{n+1}-$Wert zu verwenden (Euler Backward Algorithmus)

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + a_{_n}\Delta t \\ x_{n+1} &= x_n + v_{n+1}\Delta t \end{aligned} \tag{10}$$

Fast alle heutige Mathematikprogramme (Mathematica, Mathlab etc.) haben sehr komfortable und genaue Integratoren integriert, die es ermöglichen sehr einfach numerische Lösungen von Differentialgleichungen zu erhalten.

3 Die Gravitationskraft

Isaac Newton gelang um 1666 der gewaltige Schritt, die Planetenbewegung auf eine bestimmte, durch die Sonne ausgeübte Kraft zurückzuführen. Newton konnte mathematisch zeigen, dass eine Kraft, die umgekehrt proportional mit dem Abstand zwischen dem Planeten und der Sonne abnimmt, zu einer elliptischen Umlaufbahn führt, wie Kepler sie nachgewiesen hatte (*Die Kepler'schen Gesetze waren ein wichtiger Schritt auf dem Weg zum Verständnis der Planeten bewegung waren. Sie waren sie doch nur einfache empirische Regeln, die Kepler* *aus Brahes astronomischen Beobachtungen abgeleitet hatte.*). Darauf behauptete Newton kühn, eine solche Kraft würde zwischen zwei beliebigen Körpern im Universum wirken (z. B. auch zwischen dem fallenden Apfel und der Erde). Vor Newton war es nicht allgemein akzeptiert, dass die Gesetze der Physik, wie man sie auf der Erde beobachten konnte, auch für die Himmelskörper gälten. Das Newton'sche Gravitationsgesetz besagt, dass es eine anziehende Kraft zwischen je zwei punktförmigen Körpern gibt, die proportional zum Produkt ihrer Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstands ist.

Bezeichnen wir die Massen der beiden punktförmigen Teilchen mit m_1 und m_2 und ihre Orte mit $\vec{r}_1$und $\vec{r}_2$ so ist $\vec{r}_{12}$ der Vektor, der von Teilchen 1 zu Teilchen 2 geht. Dann übt das Teilchen 1 auf das Teilchen 2 eine Kraft $\vec{F}_2^{(1)}$ aus, für die gilt:

$$\vec{F}_2^{(1)} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \widehat{r}_{12} = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} \tag{11}$$

Γ ist die Gravitationskonstante mit dem Wert $\Gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$.

Die Kraft $\vec{F}_1^{(2)}$, die von Teilchen 2 auf Teilchen 1 ausgeübt wird, ist gemäß dem dritten Newton'schen Axiom das Negative von $\vec{F}_2^{(1)}$. Die Gravitationskraft, die eine Punktmasse m_1 auf eine im Abstand r befindliche andere Punktmasse m_2 ausübt, besitzt daher den Wert

$$F = -\Gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \tag{12}$$

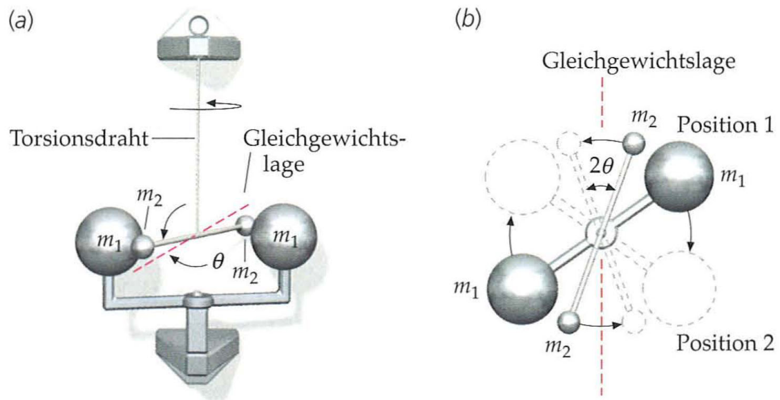

Abbildung 3: Bestimmung der Gravitationskonstante nach Cavendish

Bemerkung 6 *a) Schema der Drehwaage, die Cavendish zur Messung der Gravitationskonstanten* Γ *benutzte. Sie besteht aus zwei an einem leichten Stab befestigten kleinen Kugeln, jeweils mit der Masse* m_2 *die an einem dünnen Torsionsdraht hängen. Durch sorgfältige Messung kann man das Drehmoment bestimmen, mit dem sich der Draht um einen bestimmten Winkel verdrillen lässt. Dann werden zwei große Kugeln, jeweils mit der Masse* m_1 *in die Nähe der* *kleinen Kugeln gebracht. Wegen der Gravitationsanziehung der kleinen durch die großen Kugeln dreht sich der Draht um einen sehr kleinen Winkel ϑ aus der Gleichgewichtslage (der Winkel ist hier stark überzeichnet). b) Dieselbe Drehwaage von oben betrachtet. Nachdem die Anordnung ihre Gleichgewichtslage eingenommen hat (das kann wegen der extrem geringen Kräfte unter Umständen mehrere Stunden dauern), werden im zweiten Teil des Experiments die beiden großen Kugeln so gedreht, dass ihr Abstand von der Gleichgewichtslage der Waage der gleiche ist wie auf der anderen Seite (gestrichelte Linien). Wenn dann die Waage wieder ihre Gleichgewichtslage eingenommen hat, hat sich der Draht um den Winkel 2ϑ verdrillt, entsprechend der Umkehrung des Drehmoments. Ist die Torsionskonstante des Drahts bekannt, kann man die Kraft zwischen den Massen m_1, und m_2 aus der Messung des Torsionswinkels bestimmen. Mit den Werten der Massen und der Abstände zwischen ihnen lässt sich daraus die Gravitationskonstante Γ berechnen. Cavendish erhielt einen Wert für Γ, der nur um etwa 1 % vom heute akzeptierten, $\Gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$ Wert abwich.*

Bemerkung 7 • *1665 -1666 Isaac Newton*

Bemerkung 8 • *Die Kraft, die den Apfel vom Baum fallen lässt, ist die gleiche, die den Mond um die Erde und die Erde um die Sonne zwingt, d.h.: Beide Fälle sind Spezialfälle eines allgemeinen Kraftgesetzes, nach dem alle Massen einander anziehen.*

Bemerkung 9 • *Folgende Beobachtungen legen die Form des Gesetzes näher fest:*

Bemerkung 10 • *Auf der Erdoberfläche fallen alle Körper gleich schnell, abgesehen von denen, die so leicht sind, dass der Luftwiderstand eine wesentliche Rolle spielt. Die Fallbeschleunigung ist also unabhängig von der Masse m_2 des fallenden Körpers.*

3.1 Kepler´sche Gesetze

Mehr als ein halbes Jahrhundert, bevor Newton seine drei Axiome der Bewegung und sein Gravitationsgesetz formulierte, hatte der deutsche Astronom Johannes Kepler (1571-1630) eine Reihe astronomischer Arbeiten verfasst, in denen eine detaillierte Beschreibung der Bewegung der Planeten um die Sonne zu finden ist. Keplers Arbeit entstand teilweise aus den jahrelangen Untersuchungen von Daten, die Tycho Brahe (1546-1601) über die Positionen der Planeten in ihrer Bewegung am Himmel gesammelt hatte. Zu Keplers Werken gehören drei empirische Entdeckungen, die wir heute als die Kepler'schen Gesetze der Planetenbewegung bezeichnen. Sie werden wie folgt zusammengefasst (siehe auch Abbildung)

1. **Erstes Kepler'sches Gesetz:** Alle Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. **Zweites Kepler'sches Gesetz**: Jeder Planet bewegt sich so, dass die imaginäre Verbindungslinie zwischen der Sonne und dem Planeten (Leitstrahl) in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht.

3. **Drittes Kepler'sches Gesetz:** Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten, die sich um die Sonne drehen, verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen . (Die große Halbachse ist die Hälfte der langen Achse der Umlaufbahn, wie in Abbildung 6.15 veranschaulicht, und stellt den mittleren Abstand des Planeten von der Sonne dar. Z)

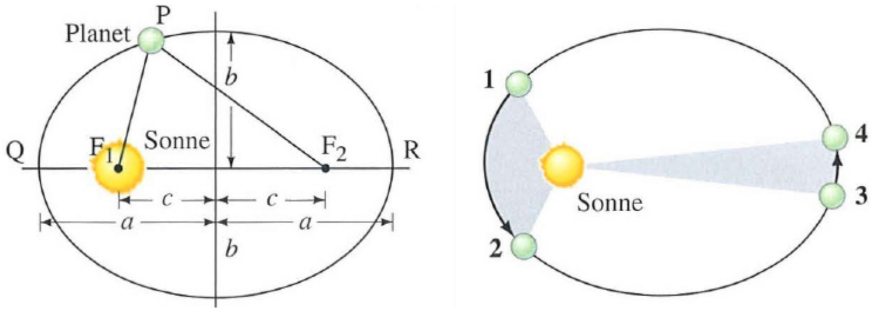

Abbildung 4: Zu den Kepler´schen Gesetzen

4 Drehbewegung: Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

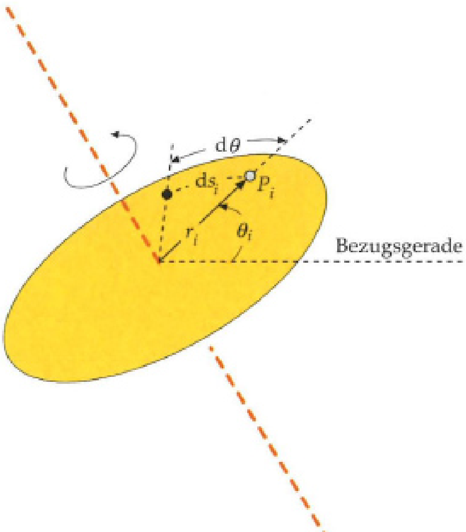

Abbildung 5: Größen bei der Drehbewegung

Jeder Punkt in einem Körper, der um eine feste Achse gleichförmig rotiert, bewegt sich auf einer Kreisbahn, deren Mittelpunkt auf der Drehachse liegt und deren Radius durch die Entfernung des Punkts von der Drehachse gegeben ist. Eine Linie, die man von der Achse zu einem beliebigen Punkt zieht, überstreicht in gleichen Zeiten stets gleiche Winkel (Abbildung 5). Betrachten wir eine Kreisscheibe, die sich um eine senkrecht zu ihr stehende feste Achse durch ihren Mittelpunkt dreht. r_i bezeichnet den Abstand vom Mittelpunkt der Scheibe zu ihrem i-ten Massenpunkt P_i, und θ_i ist der gegen den Uhrzeigersinn gemessene Winkel zwischen einer im Raum festgelegten Bezugsgerade und einer Linie vom Drehpunkt zum i-ten Massenpunkt. Wenn sich die Scheibe um den Winkel $d\theta$ dreht, bewegt sich dieser Massenpunkt auf einem Kreisbogen der Länge ds, so dass gilt:

$$ds = r_i \cdot d\theta \tag{13}$$

Dabei wird der Winkel $d\theta$ im Bogenmaß in der Hilfseinheit Radiant (Einheitenzeichen rad) angegeben. Die Entfernungen ds_i und r_i hängen vom jeweils betrachteten Punkt ab, **aber ihr Verhältnis, der so genannte Drehwinkel, ist für alle Massenpunkte der Kreisscheibe gleich**. Bei einer kompletten Umdrehung gilt für die Bogenlänge $\Delta s_i = 2\pi r_i$; der Drehwinkel $\Delta\theta$ beträgt dann $\Delta\theta = \frac{2\pi r_i}{r_i} = 2\pi\,\mathrm{rad} = 360° = 1U$ (Das U steht hier für Umdrehung.) Die Geschwindigkeit $d\theta/dt$, mit der sich der Winkel ändert, ist für alle Punktmassen der Scheibe gleich. Man nennt sie die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe und bezeichnet sie mit dem kleinen griechischen Buchstaben ω

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{14}$$

Im allgemeinen Fall, insbesondere wenn die Drehachse nicht im Raum fixiert ist, muss man die Winkelgeschwindigkeit als eine vektorielle Größe behandeln; Bei Drehungen um eine raumfeste Achse - und ausschließlich diesen Fall betrachten wir in diesem Kapitel - hat die Winkelgeschwindigkeit nur zwei mögliche Richtungen, die von der Drehrichtung abhängen. Bei einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn nimmt θ zu, ω ist also positiv; bei einer Drehung im Uhrzeigersinn nimmt θ ab, ω ist also negativ. (Dies ist analog zu der linearen Bewegung in einer Dimension, wo man die Geschwindigkeit nicht als Vektor betrachten muss; sie kann sowohl negative als auch positive Werte annehmen.) Die Dimension der Winkelgeschwindigkeit ist die einer reziproken Zeit (T^{-1}). Die Einheit der Winkelgeschwindigkeit ω ist s^{-1}; wenn mit den Hilfseinheiten Radiant oder Umdrehung gearbeitet wird, ist die Einheit Radiant pro Sekunde ($\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$) bzw. Umdrehungen pro Sekunde, $U \cdot \mathrm{s}^{-1}$

Die zeitliche Änderung der Winkelgeschwindigkeit wird Winkelbeschleunigung α genannt:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{15}$$

5 Zentripetal und Zentrifugalbeschleunigung

Die lineare Geschwindigkeit υ_t eines Massenpunkts der Scheibe ist tangential zur Kreisbahn des Punkts gerichtet und hat den Betrag ds_t/dt. Mit den vorhin eingeführten Größen können wir die Tangentialgeschwindigkeit"des i-ten Massenpunkts gemäß

$$\upsilon_{t,i} = \frac{r_i d\theta}{dt} \tag{16}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit der Scheibe verknüpfen, so dass gilt:

$$\upsilon_{t,i} = r_i \omega$$

In ähnlicher Weise ergibt sich die tangentiale Beschleunigung eines Massenpunkts der Scheibe

$$a_{t,i} = \frac{d\upsilon_{t,i}}{dt} = r_i \frac{d\omega}{dt} = r\alpha \tag{17}$$

Gleichung 17 ist jedoch unvollständig, wenn man die eigentliche (und nicht nur die tangentiale Komponente) Beschleunigung betrachtet:

$$a_i = \frac{d\vec{\upsilon}_i}{dt} = \vec{r}_i \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{d\vec{r}_i}{dt} \tag{18}$$

Beschränken wir uns auf den einfachsten Fall, dass sich die Massenpunkte mit konstanter Winkelgeschwindigkeit drehen, dann ist der erste Term in 18 null und damit bleibt in der Beschleunigung nur der zweite Term über. Bei den Drehungen, die wir hier betrachten, ist zwar der Radius $\vec{r}_i$ dem Betrag nach konstant, ändert aber die Richtung, so dass gilt (siehe dazu auch Abbildung 6):

$$a_i = \omega \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\upsilon_{t,i}}{r_i} \cdot \upsilon_{t,i} = \frac{\upsilon_{t,i}^2}{r_i} = r_i \omega^2 \tag{19}$$

Jeder Massenpunkt auf der Scheibe erfährt alsoeine radiale Beschleunigung, die so genannte Zentripetalbeschleunigung. Die Normalbeschleunigung ist immer nach innen zur Drehachse hin gerichtet.

5.0.1 Scheinkräfte

Der Übergang von einem Inertialsystem auf ein beschleunigtes System (z.B. die Scheibe in Abbildung 5) führt immer zum Auftreten von sogenannten Scheinkräften.

Damit z.B ein Auto durch eine Kurve fährt, muss auf dieses Auto eine radial nach innen gerichtete Zentripetalbeschleunigung a_{zp} wirken (Das in der Kurve fahrende Auto sei also unser beschleunigtes System). Sitzen wir in diesem Auto,

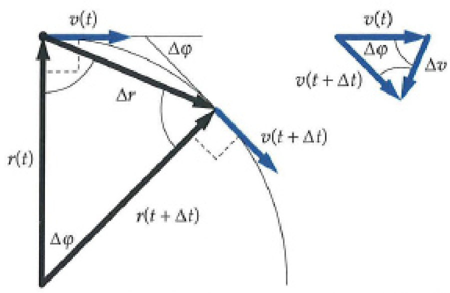

Abbildung 6: Radiusänderung bei Drehbewegung

spüren wir allerdings eine ganz andere Beschleunigung, nämlich eine Beschleunigung a_{zf}, die uns radial nach außen treibt. Die Beschleunigung a_{zp} heißt Zentrifugalbeschleunigung, die auf uns wirkende Kraft $F_{zf} = m \cdot a_{zp}$ heißt Zentrifugalkraft. Diese Kraft zählt zu den Trägheits- oder Scheinkräften, die immer dann auftreten, wenn wir uns in einem beschleunigten Bezugssystem - wie dem durch eine Kurve fahrenden Auto - befinden. Ein System ohne Scheinkräfte, das entsprechend dem Trägheitssatz seine (geradlinig gleichförmige) Bewegung beibehält, nennt man ein Inertialsystem.

Scheinkräfte entstehen bei der Transformation der Bewegungsgleichungen von einem Inertialsystem I in ein beschleunigtes System B.

6 Arbeit und kinetische Energie

6.1 Allgemeine Bemerkungen zum Begriff Ënergie"

Ein gehobener Körper kann über eine feste Rolle selbst wieder einen anderen Körper anheben. Eine gespannte Feder kann ein Werkstück verschieben. Ein Hammer, auf die Geschwindigkeit v gebracht, kann einen Nagel eintreiben. Der Arbeitsaufwand für das Heben, Spannen, Bewegen des Körpers hat demnach eine Arbeitsfähigkeit des Körpers hervorgerufen. Man sagt dazu: Der Körper besitzt Energie.

Definition 11 *Energie E ist die Arbeitsfähigkeit eines Körpers, sein Vermögen, Arbeit zu verrichten. Energie ist „gespeicherte Arbeit“. Arbeit und Energie sind Skalare. Da Energie E das Vermögen des Körpers ist, die Arbeit W zu verrichten, müssen Energie und Arbeitseinheiten gleich sein.*

6.1.1 Energieerhaltung

Lemma 12

1. *Es gibt ein Faktum, anders ausgedrückt, ein Gesetz, das alle Naturphänomene beherrscht, welche bis heute bekannt sind.*
2. *Es gibt keine bekannte Ausnahme zu diesem Gesetz, soweit wir wissen, ist es exakt.*
3. *Dieses die Gesetz wird Energieerhaltung genannt.*

4. *Es sagt, dass es eine gewisse Größe gibt, welche wir Energie nennen, die sich bei den vielfachen Änderungen, die in der Natur vor sich gehen, nicht ändert.*

6.2 Eindimensionale Bewegung mit konstanten Kräften

Die Arbeit einer konstanten Kraft $\vec{F}$, deren Angriffspunkt sich entlang einer Verschiebung $\Delta x \cdot \hat{x}$ bewegt, ist gleich

$$w = F_x \cdot \Delta x = |F| \cos\theta \cdot \Delta x \tag{20}$$

Die Arbeit ist eine skalare Größe, die positiv ist, wenn,Δx und F_x, die gleichen Vorzeichen besitzen, und negativ, wenn die Vorzeichen verschieden sind. Die Maßeinheit der Arbeit ist das Produkt aus der Maßeinheit der Kraft und der des Wegs. Die SI-Einheit von Arbeit und Energie ist das Joule (J) , das Produkt aus Newton und Meter:

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$$

Abweichend davon wird in der Atom- und Kernphysik häufig das Elektronenvolt (eV) verwendet:

$$1\,\mathrm{eV} = 1,6.10^{-19}\,\mathrm{J}\,.$$

6.2.1 Der Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und kinetischer Energie

Zwischen der an einem Körper verrichteten Gesamtarbeit und seiner Anfangs- und Endgeschwindigkeit besteht ein wichtiger Zusammenhang. Wenn F, die Gesamtkraft ist, die auf ein Teilchen wirkt, besagt das zweite Newton'sche Axiom: $F_x = ma_x$. Bei einer konstanten Kraft ist auch die Beschleunigung konstant. Damit lässt sich die Verschiebung über die Gleichung für die konstante Beschleunigung $\upsilon_{E,x}^2 = \upsilon_{A,x}^2 + 2a_x\Delta x$ durch die Anfangsgeschwindigkeit υ_A und durch die Endgeschwindigkeit υ_E ausdrücken. Nach einigen Umformungen erhält man daraus:

$$F_x\Delta x = \frac{1}{2}m\upsilon_{E,x}^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_{A,x}^2 = W \tag{21}$$

$\frac{1}{2}m\upsilon_x^2$ ist eine skalare Größe, die kinetische Energie E_{kin}eines Teilchens genannt wird:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 \tag{22}$$

Beispiel 13

Die Kraft auf ein Elektron

In der Bildröhre eines Fernsehgeräts wird ein Elektron aus der Ruhe heraus beschleunigt. Die Kraft, die das Elektron beschleunigt, ist eine elektrische Kraft, die von dem elektrischen Feld in der Bildröhre herrührt. Nach einem Weg von 80 cm besitzt das Elektron eine kinetische Energie von 2,5 keV. Berechnen Sie die Kraft auf das Elektron unter der Annahme, dass sie konstant ist und in Bewegungsrichtung wirkt.

Problembeschreibung: Da sich das Elektron aus der Ruhe heraus zu bewegen beginnt, ist die verrichtete Arbeit gleich der kinetischen Energie.

Lösung:

Setzen Sie die verrichtete Arbeit gleich der Änderung der kinetischen Energie und stellen Sie die Gleichung nach der Kraft um. Die kinetische Energie am Anfang und am Ende ist jeweils gegeben:

$$W = \Delta E_{\mathrm{kin}}$$

$$F_x \, \Delta x = E_{\mathrm{kin,E}} - E_{\mathrm{kin,A}}$$

$$F_x = \frac{E_{\mathrm{kin,E}} - E_{\mathrm{kin,A}}}{\Delta x}$$

$$= \left(\frac{2\,500\ \mathrm{eV} - 0\ \mathrm{eV}}{0{,}8\ \mathrm{m}}\right) \cdot \left(\frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}{1\ \mathrm{eV}}\right)$$

$$= \boxed{5{,}0 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{N}}$$

Kommentar: Wenn wir später die Elektrizität behandeln, werden Sie feststellen, dass die Arbeit pro Ladungseinheit die Potenzialdifferenz ist und in Volt gemessen wird. Somit ist 1 eV die Energie, die ein Teilchen der Ladung e (ein Elektron oder Proton beispielsweise) gewinnt oder verliert, wenn sich seine Potenzialdifferenz um 1 V ändert.

6.2.2 Die von einer ortsabghängigen Kraft verrichtetet Arbeit

Viele Kräfte sind selbst ortsabhängig. So übt beispielsweise eine gedehnte Feder eine Kraft aus, die proportional zur Länge ihrer Dehnung ist. Die Gravitationskraft der Erde auf ein Raumschiff ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands zwischen Erde und Raumschiff. Allerdings kann man eine ortsabhängige Kraft durch eine Folge konstanter Kräfte annähern . Die Arbeit einer ortsabhängigen Kraft ist dann

$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F_x(x_i) \cdot \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x) dx \tag{23}$$

6.2.3 Arbeit und Energie in drei Dimensionen

Im allgemeinen. dreidimensionalen Fall entspricht die Arbeit folgender Gleichung:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \bullet d\vec{s} = E_{kin,2} - E_{kin},_1 \tag{24}$$

wobei über den Weg $d\vec{s}$ integriert werden muss und das Inprodukt aus Kraft und Weg gebildet werden muss.

7 Arbeit und potentielle Energie

Die Arbeit an einem Teilchen ist gleich der Änderung seiner kinetischen Energie. Es kann vorkommen, dass die Arbeit, die durch äußere Kräfte an einem System verrichtet wird, die kinetische Energie des Systems überhaupt nicht erhöht. In diesem Fall wird die Arbeit als potenzielle Energie gespeichert - also als Energie, die mit der Lage des Systems in Zusammenhang steht.

Stellen Sie sich einen Gewichtheber vor, der ein Gewicht mit einer Masse m auf eine Höhe h hebt. Die Kraft, die die Arme des Gewichthebers auf das Gewicht ausüben, ist $-mg$, denn sie müssen die Gravitationskraft der Erde auf das Gewicht kompensieren. Stellen Sie sich nun die Erde und das Gewicht als ein System zweier Teilchen vor (zu dem der Gewichtheber nicht mit dazugehört!). Die äußeren Kräfte, die auf das System aus der Erde und aus dem Gewicht wirken, sind zum einen die Kraft, die die Arme auf das Gewicht ausüben, und zum anderen die Kraft $-mg$, die die Füße des Gewichthebers auf die Erde ausüben. (Abbildung 6.20). (Die Anziehungskraft, die der Gewichtheber auf das Gewicht ausübt, kann sicher vernachlässigt werden.) Beim Anheben bewegt sich das Gewicht um die Strecke h nach oben, während die Bewegung der Erde vernachlässigt werden kann. Somit verrichtet nur die Kraft, mit der die Hände an dem Gewicht angreifen, wirklich Arbeit am System. Da das Gewicht vor und nach dem Heben die Geschwindigkeit $v = 0$ hat, also auch seine kinetische Energie am Anfang und am Ende gleich null ist und daher $\Delta E_{kin} = 0$ gilt, ist die Arbeit, die alle äußeren Kräfte an dem System aus der Erde und aus dem Gewicht verrichten,mgh. Diese Arbeit wird in Form von potenzieller Energie gespeichert, also Energie, die von der Lage des Gewichts relativ zur Erde oder, mit anderen Worten, von der Lage des Systems aus Erde und Gewicht abhängt. Man bezeichnet diese Energie als potenzielle Energie der Schwerkraft.

Ein anderes System, das Energie durch seine Lage speichert, ist eine Feder. Wenn man eine Feder dehnt oder zusammendrückt, wird Energie, die von der Federlänge abhängt, als potenzielle Energie gespeichert. Betrachten Sie beispielsweise die Feder in Abbildung 6.21 als das System. Diese Feder soll nun durch die gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zusammengedrückt werden . Diese beiden Kräfte ergeben zusammen null - die Gesamtkraft auf die Feder ist also null, so dass die kinetische Energie der Feder ebenfalls null bleibt. Die Arbeit, die man beim Zusammendrücken der Feder am System verrichtet, wird also nicht in Form kinetischer Energie, sondern als potenzielle Energie der Feder gespeichert. Dabei wird die Lage des Systems geändert, was sich in der Längenänderung der Feder zeigt. Da sowohl F_1 als auch F_2 positive Arbeit verrichten, ist die an der Feder verrichtete Gesamtarbeit positiv. (Die vonF_1 verrichtete Arbeit ist positiv, da die Kraft $\vec{F}_1$ und die Verschiebung $\Delta\vec{s}_1$ihres Angriffspunkts in die gleiche Richtung zeigen. Gleiches gilt auch für $\vec{F}_2$ und $\Delta\vec{s}_2$

7.0.4 Konservative Kräfte

Wenn ein Skiläufer mit einem Skilift auf einen Hügel mit der Höhe h fährt, beträgt die Arbeit, die der Skilift an dem Skiläufer verrichtet, $-mgh$, denn die Schwerkraft muss überwunden werden. Dagegen ist die Arbeit, die die Schwerkraft beim Abfahren an ihm verrichtet, immer $+mgh$. Somit ist die Gesamtarbeit, die die Schwerkraft an dem Skiläufer während einer vollen Runde hinauf und hinab verrichtet, unabhängig vom Weg null. Die Schwerkraft, die die Erde auf den Skiläufer ausübt, ist eine so genannte konservative Kraft. Eine Kraft ist konservativ, wenn die Gesamtarbeit, die sie an einem Teilchen verrichtet, das sich auf einer beliebigen geschlossen Bahn bewegt, null ist.

Definition 14 *Eine Kraft ist konservativ, wenn die Gesamtarbeit, die sie an*

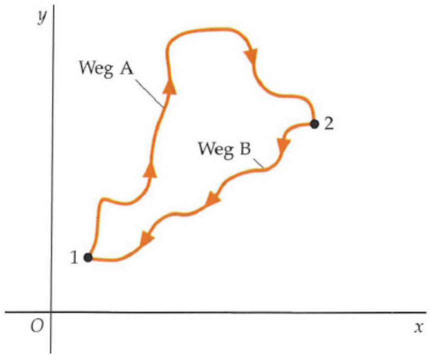

Abbildung 7: Zwei Wege im Raum verbinden die Punkte 1 und 2. Die Arbeit einer konservativen Kraft zwischen Punkt 1 und 2 auf dem Weg A sei W Da die Arbeit bei einem vollen Umlauf null ist, muss die Arbeit für den Rückweg entlang des Wegs B gleich - W sein. Wird der Weg B in entgegengesetzter Richtung, also von Punkt 1 zu Punkt 2, ist die Kraft an jedem Punkt genauso groß wie bei der Bewegung von 2 nach 1, während die Verschiebung entgegengesetzt ist. Damit ist die Arbeit von Punkt 1 zu Punkt 2 entlang des Wegs Bebenfalls W Allgemein gilt also, dass die Arbeit auf jedem Weg, der die beiden Punkte 1 und 2 verbindet, gleich ist.

einem Teilchen verrichtet, das sich auf einer beliebigen geschlossen Bahn bewegt, null ist.

7.0.5 Arbeit und Potential in $1/r^2-$Feldern

Besonder oft benötigt man die Arbeit und das Potential eines $1/r^2$-Feldes, wie dem Gravitations- oder elektrischem Feld. Dazu ist zuerst eine allgemein gültige Feststellung das Potential betreffend zu machen:

Lemma 15 *In einem Potentialfeld kann der 0-Punkt beliebig gewählt werden.*

Für den Fall der $1/r^2$ Felder wählt man oft den 0-Punkt des Potentials im Unendlichen, weil dort die Kraft verschwindet.

Die Arbeit, die beim Bewegen einer Punktmasse Masse m im Gravitationsfeld einer anderen Punktmasse m_E bzw. einer Punktladung q im elektrischen Feld einer anderen Punktladung q_E aus dem Unendlichen bis in einen Abstand r verrichtet wird ergibt sich zu:

$$W = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\infty}^{r} \frac{q_E \cdot q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_E}{r} q \\ -G\int\limits_{\infty}^{r} \frac{m_E \cdot m}{r^2} dr = G\frac{m_E}{r} m \end{cases} \tag{25}$$

wobei man $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_E}{r}$ bzw. $G\frac{m_E}{r}$ als das Potential $\Phi(r)$ der Punktladung q_E bzw. Punktmasse m_E bezeichnet.

$-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{q_E}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}q_E\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$ wird als die Spannungsdifferenz oder Spannung U im elektrischen Feld der Ladung q_E bezeichnet.

7.0.6 Erdbeschleunigung

Berechnen wir nun die Arbeit (bzw. Potentialdifferenz), wenn wir eine Masse m auf der Erdoberfläche um einen zum Erdradius h_1 kleinen Betrag $h - h_1$ auf die Höhe h anheben:

$$W = \int\limits_{h_1}^{h} -Gm_E\frac{m}{r^2}dr = Gm_E\frac{m}{r}\Big|_{h_1}^{h} = Gm_Em\left(\frac{1}{h}-\frac{1}{h_1}\right) \tag{26}$$

Da $h - h_1 \leqslant h_1$ ist, könne wir die folgende Näherung durch Reihenentwicklung durchführen:

$$\begin{aligned}&W = Gm_Em\tfrac{h_1-h}{h\cdot h_1} \approx \\ &= -Gm_E\tfrac{m}{h_1^2}(h-h_1)^1 + Gm_E\tfrac{m}{h_1^3}(h-h_1)^2 - Gm_E\tfrac{m}{h_1^4}(h-h_1)^3 + ...\end{aligned} \tag{27}$$

Man sieht sofort, dass man so die bekannte konstante Erdbeschleunigung bzw. Potentielle Energie im Schwerefeld erhält, wenn man in Gl. 27 nur das erste Glied $-Gm_E\frac{m}{h_1^2}(h-h_1)$ berücksichtigt.

$$W \approx (h-h_1)\cdot const \tag{28}$$

8 Energie und Impulserhaltung

8.1 Impulserhaltung

Mitte des siebzehnten Jahrhunderts, kurz vor Newtons Zeit, war beobachtet worden, dass die Vektorsumme der Impulse zweier Körper, die aneinander stoßen, konstant bleibt. Betrachten wir z. B. den zentralen Stoß zwischen zwei Billardkugeln, der in .Abbildung 8 dargestellt ist. Wir nehmen an, dass die auf dieses aus zwei Kugeln bestehende System wirkende äußere Nettokraft null ist - d. h. die einzigen wesentlichen Kräfte sind die, die jede Kugel während des Stoßes auf die andere ausübt. Obwohl sich der Impuls jeder der beiden Kugeln als Folge des Stoßes ändert, ist die Summe ihrer Impulse vor und nach dem Stoß dieselbe. Wenn $m_1\vec{v}_1$ der Impuls von Kugel 1 und $m_2\vec{v}_2$ der Impuls von Kugel 2 ist, jeweils vor dem Stoß gemessen , dann beträgt der Gesamtimpuls der beiden Kugeln vor dem Stoß $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Nach dem Stoß hat jede Kugel eine

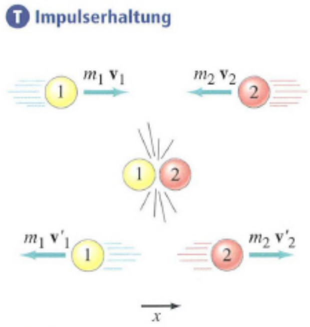

Abbildung 8: Impulserhaltung

andere Geschwindigkeit und einen anderen Impuls. Diese Tatsache stellen wir durch einen SStrichän der Geschwindigkeitsvariablen dar:$m_1\vec{v}_1'$und $m_2\vec{v}_2'$, Der Gesamtimpuls nach dem Stoß beträgt $m_1\vec{v}_1'$+ $m_2\vec{v}_2'$, Unabhängig davon, welche Geschwindigkeiten und Massen beteiligt sind, ist der Gesamtimpuls vor dem Stoß derselbe wie nach dem Stoß, solange keine äußere Nettokraft wirkt. Dabei spielt es keine Rolle, ob es sich um einen zentralen Stoß handelt oder nicht.

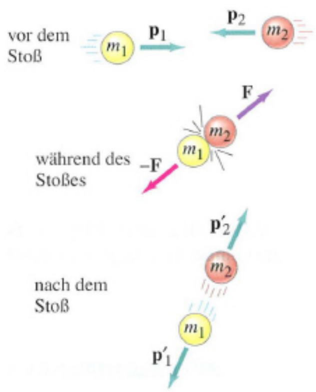

Abbildung 9: Zur Impulserhaltung

$$\text{Impuls vorher} = \text{Impuls nachher}$$

oder

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \tag{29}$$

Das bedeutet, dass der Vektor des Gesamtimpulses des Systems der beiden Kugeln erhalten bleibt: Er bleibt konstant. Obwohl der Impulserhaltungssatz sich durch Versuche ergeben hat, ist er eng mit den Newton'schen Axiomen der Bewegung verbunden. Es kann bewiesen werden, dass sie äquivalent sind. Diesen Beweis werden wir jetzt erbringen. Betrachten wir zwei Körper mit der Masse

m_1 bzw. m_2, die vor ihrem Zusammenstoß einen Impuls von $\vec{p}_1$ bzw. $\vec{p}_2$ und nach dem Zusammenstoß einen Impuls von $\vec{p}_1'$ bzw. $\vec{p}_2'$ haben, wie in Abbildung 9 dargestellt. Nehmen wir an, dass die von Körper 1 während des Stoßes auf Körper 2 ausgeübte Kraft zu jedem Zeitpunkt $\vec{F}$ ist. Dann beträgt nach dem dritten Newton'schen Axiom die von Körper 2 auf Körper 1 ausgeübte Kraft $-\vec{F}$. Wir nehmen an, dass während der kurzen Stoßzeit keine anderen (äußeren) Kräfte wirken (oder dass $\vec{F}$ wesentlich größer ist als alle anderen wirkenden äußeren Kräfte). Wir können dann folgende Überlegung anstellen:

$$\int_{t_a}^{t_b} d\vec{p} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} dt \tag{30}$$

$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2' - \vec{p}_2 = \int_{t_a}^{t_b} \vec{F} dt$$

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -\int_{t_a}^{t_b} \vec{F} dt$$

$$\rightarrow \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -(\vec{p}_2' - \vec{p}_2)$$

$$\rightarrow \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

Dies ist der Impulserhaltungssatz. Wir haben diese Ableitung in Zusammenhang mit einem Stoß gesetzt. Solange keine äußeren Kräfte wirken, sind die Gleichungen 9.4 in jedem beliebigen Zeit-intervall gültig, und die Impulserhaltung ist immer gültig, solange keine äußeren Kräfte wirken. In der Realität wirken allerdings äußere Kräfte: Reibung wirkt auf Billardkugeln, die Gravitation wirkt auf einen Baseball etc. So könnte man denken, dass die Impulserhaltung nicht angewendet werden kann. Oder kann man sie doch anwenden? Bei einem Stoß wirkt die Kraft, die jeder Körper auf den anderen ausübt, nur während eines sehr kurzen Zeitintervalls und sie ist sehr stark. Während des kurzen Intervalls ist $\vec{F}$ in den Gleichungen 30 wesentlich größer als die anderen wirkenden Kräfte (Gravitation, Reibung). Wenn wir die Impulse direkt vor und direkt nach dem Stoß messen, bleibt der Impuls nahezu erhalten.

Der Gesamtimpuls eines abgeschlossenen Systems von Körpern bleibt konstant. Ein abgeschlossenes System ist ein System, auf das keine äußeren Kräfte wirken. Die einzigen wirkenden Kräfte sind die Kräfte, die zwischen Körpern des Systems wirken.

Wenn eine äußere Nettokraft auf ein System wirkt, gilt der Impulserhaltungssatz nicht. Wenn aber das SSystemneu definiert werden kann, so dass die anderen Körper, die diese Kräfte ausüben, dann mit in das System einbezogen werden, gilt der Impulserhaltungssatz. Bei einem frei fallenden Stein z. B., den wir als unser System annehmen, bleibt der Impuls nicht erhalten, da eine äußere Kraft, die von der Erde ausgeübte Gravitationskraft, auf den Stein wirkt und sein Impuls sich ändert. Wenn wir allerdings die Erde in das System mit einbeziehen, bleibt der Gesamtimpuls des Steins und der Erde erhalten. (Das bedeutet natürlich, dass sich die Erde nach oben bewegt, um den Stein zu berühren. Da die Masse der Erde so groß ist, ist ihre nach oben gerichtete Geschwindigkeit sehr klein.) Wie bei der Energie liegt die Bedeutung des Impulsbegriffes darin, dass