Analysis I Übung - Blatt 4, für den 8. 11. 2016

25. Weisen Sie folgende Rechenregeln für $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $r, s \in \mathbb{Q}$ nach:

    (a) $a^r a^s = a^{r+s}$

    (b) $(a^r)^s = a^{rs}$

    Verwendete Rechenregeln in $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ müssen angegeben werden, der Beweis aber nicht ausgeführt werden.

26. Beweisen Sie folgende Rechenregeln für Ungleichungen:

    (a) $\forall\, a, b > 0, \forall\, r > 0, r \in \mathbb{Q}: \; a < b \Leftrightarrow a^r < b^r$

    (b) $\forall\, a, 0 < a < 1, \forall\, r, s \in \mathbb{Q}, r < s: \; a^r > a^s$

    Gleichungen aus Bem 2.28 dürfen verwendet werden.

27. Beweisen Sie:

    (a) $\forall\, n \in \mathbb{N}: \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

    (b) $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2: \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3$

    Hinweis: Binomischer Lehrsatz, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}_0 : n < m \Rightarrow \frac{1}{n^i}\binom{n}{i} \leq \frac{1}{m^i}\binom{m}{i}$ (und sogar $<$ statt $\leq$ für $i \geq 2$).

28. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass dann

$$d(x, y) := \begin{cases} \|x - y\| & \text{falls } \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ : x = \lambda y, \\ \|x\| + \|y\| & \text{sonst} \end{cases}$$

    eine Metrik ist.

29. Es seien $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ Normen auf dem Vektorraum V. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\|v\| := \max\{\|v\|_A, \|v\|_B\}$$

    eine Norm ist.

30. Man zeige die Dreiecksungleichung für die Euklidsche Norm: $\forall\, x, y, \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

    Hinweis: Die Cauchy-Schwarz Ungleichung wurde unabhängig davon bewiesen und darf verwendet werden.

31. Ist $\|(x_1, x_2)\| := |x_1| + |2x_1 + x_2|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$? Falls so, skizzieren Sie die Einheitskugel

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$$

32. Für irgendeine Menge A seien $f, g : A \to \mathbb{R}$. Man zeige:

    (a) $\sup\{f(x) + g(x) : x \in A\} \leq \sup\{f(x) : x \in A\} + \sup\{g(x) : x \in A\}$

    (b) $\big[\forall\, x \in A : f(x) \leq g(x)\big] \Rightarrow \sup\{f(x) : x \in A\} \leq \sup\{g(x) : x \in A\}$