104.261 VO WS 2022/23 Analysis für Informatik

Jakob Kellner
Draft! Work in progress!
Version: 18. Januar 2023

Kontaktmöglichkeiten

Ich will mich beschweren!

Ich habe Fragen bzw. Kommentare.

- Organisatorische Fragen: In die entsprechende tuwel Gruppe.
- Wenn vertraulich/sehr individuell/sehr dringend: email (oder tuwel Direktnachricht) an mich.
- Alle emails aussschließlich von Ihrem TU StudentInnen-Account senden! (Spamfilter, Zuordenbarkeit, “Datenschutz”)
- Fragen zu den UE: Falls vom Übungsleiter nicht anders verlautbart: UE-Leiter kontaktieren. (tuwel Direktnachricht oder email).
- Anonym:
  - “Stimmungszettel” via TISS.
  - Nach Ende: LVA-Bewertung via TISS. Bei Kommentaren zur Übung: Bitte Übungsgruppe oder Leiter (G1 . . . G8, Kellner oder dergl.) dazuschreiben.
  - Alternative: Fachschaft Informatik FSINF.

Organisatorisches zur VO

- Mi 9:15-10:45 (Termine in TISS)
- Prüfungstermine und -anmeldung im TISS.
- Andere Informationen über moodle=tuwel (nicht TISS).
- VO Prüfung: Multiple Choice Fragen die zufällig aus Fragepool ausgewählt werden. Sie können davor beliebig oft unbenotete Prüfungs-Simulationen online (moodle) durchführen.
- Keine Anwesenheitspflicht.
- Lecturetube Aufzeichnung (keine Garantie).
- Unterlagen auf moodle.
- python mit numpy, sympy, pyplot; auf jupyter
- Sprechstunde nach Voranmeldung, die nächste am 2022-10-13. (Weitere Termine moodle)

Literatur

- Sie benötigen zusätzlich zu den Unterlagen keine weitere Literatur.
- Wenn Sie sich für mehr Details interessieren (insbesondere Beweise), dann finden Sie diese in jedem beliebigen Einführungsbuch in Analysis (oder in Analyis für . . .).
- Bisher habe ich zur Vorbereitung vor allem folgendes angesehen:
  - Drmota et al, Mathematik für Informatik, Heldermann
  - Oberguggenberger und Ostermann, Analysis für Informatiker, eXamen.press
  - Peter Philip, Calculus I for COmputer Science, Lecture Notes 2022

Organisatorisches zu den UE

- Informationen über UE tuwel (nicht TISS) UND über VO tuwel.
- Anwesenheitspflicht.
- 12 Einheiten
- Übungstests in 4., 8. und 12. Einheit. (Teilweise multiple choice mit ähnlichen Fragen wie VO Prüfung, teils Aufgaben wie UE).
- Online Ankreuzen. Mindestens 60%. Gewichtung: Jeder Test 20%, Anzahl Kreuze 20%, Mitarbeit 20%.
- Kreuzen Sie Beispiele an wenn Sie sich bemüht haben, erfolgreiches Rechnen nicht nötig.

Computereinsatz

- Wir verwenden für Vorlesung und Übung open source software: jupyter, mit python3 und den python Paketen numpy, sympy, matplotlib, eventuell mehr wie ipywidgets etc.
- Installieren Sie das auf Ihrem laptop/PC. Falls Sie scheitern, kein großes Problem.
- Einige wenige UE Beispiele (NICHT die Übungstests!) verwenden Computer. Sie werden diese Beispiele nicht am eigenen Laptop via beamer vortragen, sondern nur in der UE-Stunde diskutieren. Alle diese Beispiele sind Bonusaufgaben.

Analysis: Ein Beispiel 1/4

Sinusfunktion $\sin(x)$, etwas allgemeiner:

$$a \sin(bx + c)$$

(a ist die Amplitude, b entspricht der Frequenz, c Phase.)
Allgegenwärtig in:

- Akkustik (schwingende Saite), Optik
- Elektronik, Signalverarbeitung
- Quantenphysik (komplexe Version): freies Teilchen

Frage

Warum?

Antwort

Lösung einer fundamentalen Differentialgleichung: $f''(x) = -f(x)$.

(Immer erste Näherung für Bewegung um Gleichgewichtspunkt.)

Analysis: Ein Beispiel 2/4

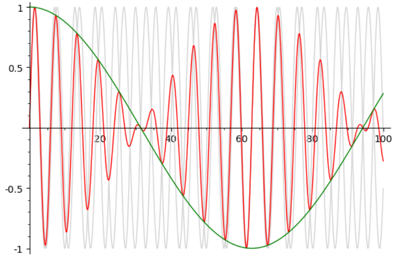
Summe (Überlagerung) von Sinusfunktionen.
Einfachster Fall: Gleiche Amplitude: $f(x) = \sin(x) + \sin(bx + c)$.
Spezialfälle:

- Selbe Frequenz $b = 1$, Phasenverschiebung $c \neq 0$: konstruktive / destruktive Interferenz.

$$\sin(x) + \sin(x + c) = 2\cos\left(\frac{c}{2}\right)\sin\left(x + \frac{c}{2}\right)$$

- Frequenzverschiebung $b \neq 1$ (und $c = 0$): Schwebung.

$\sin(x) + \sin(bx) =$
$= 2\cos\left(\frac{1-b}{2}x\right)\sin\left(\frac{1+b}{2}x\right)$



Analysis: Ein Beispiel 3/4

Schön zu beobachten in:

- Optische Effekte (Schillernde Farben auf Ölfilm, . . .)
- Doppelspalt-Effekte (Optik, oder QM: Elektronen)
- Akkustik: Schwebung
- . . .

Grundlage für viele technische Methoden (Interferometer. . .)

Analysis: Ein Beispiel 4/4

“Umgekehrte” Frage: Gegeben eine Welle die bereits eine Überlagerung (Summe) verschiedener Sinuswellen ist (mit verschiedenen Amplituden und Frequenzen).

Frage

Frage: Wie können wir herausfinden, aus welchen Sinuswellen die Welle besteht? (“Frequenzanalyse”)

Antwort

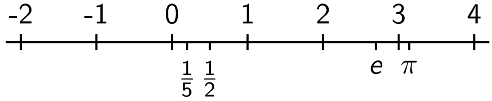
Fourier-Analyse

Es stellt sich heraus: (“Fast”) jede Welle (periodische Funktion) lässt sich als Summe von Sinusfunktionen darstellen, und die Amplitude zur jeweiligen Frequenz läßt sich durch Integration berechnen.

Zahlen

Reelle und rationale Zahlen

Die reelle Zahlen $\mathbb{R}$ sind "alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl":



Das ist keine ordentliche Definition.

Einfacher zu verstehende Teilmengen von $\mathbb{R}$:

- Natürliche Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ bzw. $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$.
  (Manchmal auch: $\mathbb{N} := \{0, 1, \dots\}$.)
- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- Rationale Zahlen (Bruchzahlen) $\mathbb{Q}$ sind die Zahlen die sich als $\frac{n}{m}$ schreiben lassen, mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$.

("$\mathbb{Q}$ ist die Menge der Brüche" ist nicht ganz korrekt, $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ sind verschiedene Brüche aber dieselbe Zahl.)

Brüche kann man "kürzen". Bsp: $\frac{2}{3}$ ist die gekürzte Darstellung von $\frac{10}{15}$.

Nicht-rationale reelle Zahlen

Nicht alle "nützlichen" Zahlen sind in $\mathbb{Q}$. Beispiele: π, oder $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$, die (Quadrat)wurzel von 2, d.h., die (einzige) positive Zahl x die $x^2 = 2$ erfüllt.

Theorem

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Der Beweis ist ca 2500 Jahre alt, der erste bekannte indirekte Beweis: Angenommen $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ ist ein gekürzter Bruch. Quadrieren: $2m^2 = n^2$. Daher muss n^2 gerade sein, daher auch n, und n^2 muss sogar durch 4 teilbar sein, damit muss auch m durch 2 teilbar sein, Widerspruch.

Reelle Zahlen

"Arbeitsdefinition"

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind die Dezimalzahlen, d.h. Zahlen der Form $d = \pm r_n r_{n-1} \dots r_0 , r_{-1} r_{-2} \dots$ mit $n \in \mathbb{N}$ und jedes $r_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Bsp: $\pi = 3.1415\dots$. Hier: $n = 0$, $r_0 = 3$, $r_{-1} = 1$, etc.

Zwei "Dezimalentwicklungen" können dieselbe reelle Zahl ergeben, z.B. $12,37000\dots = 12,36999\dots$ (nämlich $12,37$).
(Auch $-0 = +0$ oder $01,000\dots = 1,000\dots$.)

Bemerkung: Mathematisch keine gute Definition, mehr dazu später.

Dezimaldarstellung von Brüchen

Beispiele:

- $-\frac{5}{2} = -2,5 = -2,500\overline{0} = -2,499\overline{9}\ldots\ldots$
- $\frac{1}{3} = 0,33\overline{3}\ldots$
- $\frac{67}{110} = 0,60909\overline{09}\ldots$

Alles diese Dezimaldarstellungen sind "periodisch" (Periode mit Strich gekennzeichnet).

Es gilt allgemein:

Theorem

$r \in \mathbb{Q}$ genau dann wenn die Dezimaldarstellung von r periodisch ist.

Mathematische Sprache 1

“$r \in \mathbb{Q}$ genau dann wenn die Dezimaldarstellung von r periodisch ist.”

“Genau dann wenn” (Abk.: gdw), Englisch: “if and only if” abk. “iff”, mit Symbol $\leftrightarrow$ ist eine wichtige Phrase in der Mathematik:
$A \leftrightarrow B$ (oder: “A gdw B”), heißt:

- “Wenn A gilt dann gilt auch B, UND wenn B gilt dann gilt auch A.”
- Äquivalent dazu: “Wenn A gilt dann gilt auch B, UND wenn A nicht gilt dann gilt auch B nicht.”
- Äquivalent (und etwas “informatischer”): A und B haben denselben Wahrheitswert (`True` oder `False`), d.h.: `bool(A) == bool(B)`

Beweis 1/2: In $\mathbb{Q} \to$ periodisch

Ein Beispiel: $\frac{67}{110}$. Erinnern Sie sich an den Schul-Divisions-Algorithmus:

$$
\begin{array}{l}
67 \ : \ 110 = 0,6\color{red}{0}9\color{red}{0}9\ldots \\
670 \\
\quad \color{red}{100} \\
\quad 1000 \\
\qquad \color{red}{100} \\
\qquad 1000 \\
\qquad\quad \ldots
\end{array}
$$

Allgemein: Bei der Division $p : q$ zweier ganzer Zahlen gibt es in jedem Schritt i für den Rest r_i nur endlich viele Möglichkeiten $0 \leq r_i < q$. Daher muss sich nach endlich vielen Schritten das Ergebnis wiederholen.

Beweis 2/2: Periodisch $\to$ in $\mathbb{Q}$

(Selbes) Beispiel: $x = \ 0,6\overline{09}\dots$ (Periodenlänge 2).

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0,6\overline{09}09\dots \\ 100 \cdot x & = & 60,9\overline{09}09\dots \\ \hline 99 \cdot x & = & 60,3 \end{array}$$

Daher: $990x = 603$ bzw. $x = \frac{603}{990} = \frac{67}{110}$

Allgemein: x habe einen periodischen Block P der länge ℓ:

$$\begin{array}{rcl} x = & r_n \dots \ r_0 \ , \ r_{-1} \dots \ r_{-(m-\ell)} \dots r_{-m} & P\,P\,P \dots \\ 10^\ell \cdot x = & r_n \ \dots \ r_{-\ell}, r_{-\ell-1} \dots \qquad P & P\,P\,P \dots \\ \hline (10^\ell - 1) \cdot x = & ?? \quad , \qquad ?? & 0000\dots \end{array}$$

Also hat $(10^\ell - 1)x$ endliche viele Nachkommastellen und ist daher in $\mathbb{Q}$, und daher auch $x \in \mathbb{Q}$.

Damit haben wir die Äquivalenz "in $\mathbb{Q}$ $\leftrightarrow$ periodisch" gezeigt (rechts impliziert links UND links impliziert rechts).

Maschinenzahlen

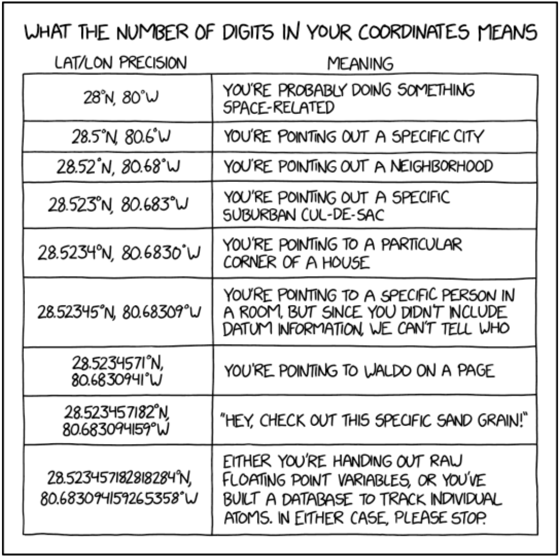
- Computer können nicht mit unendlichen vielen Nachkommastellen operieren.
- Eine Möglichkeit: Nach fixer Zahl von Nachkommastellen aufzuhören.
- Besser: Reelle Zahlen werden i.A. als (Varianten von) "floats" approximiert. Hier eine Dezimal-Variante ("wissenschaftliche Notation"):

Wiss. Notation / floats

Eine Zahl (ungleich 0) wird dargestellt als: $\pm r_0, r_{-1} r_{-2} \cdots \cdot 10^e$ mit $e \in \mathbb{Z}$, $r_i \in 0, \dots, 9$ und $1 \leq r_0 \leq 9$.

Bsp: Elektronenmasse $9.1093837 \cdot 10^{-31}$ kg

Bei Maschinenzahlen (als Bsp: double) gibt es feste Grenzen
für e (ca. $-1000 < e < 1000$), und
für die Anzahl der Nachkommastellen (bei "double" ca. 15.)



WHAT THE NUMBER OF DIGITS IN YOUR COORDINATES MEANS

LAT/LON PRECISION	MEANING
28°N, 80°W	YOU'RE PROBABLY DOING SOMETHING SPACE-RELATED
28.5°N, 80.6°W	YOU'RE POINTING OUT A SPECIFIC CITY
28.52°N, 80.68°W	YOU'RE POINTING OUT A NEIGHBORHOOD
28.523°N, 80.683°W	YOU'RE POINTING OUT A SPECIFIC SUBURBAN CUL-DE-SAC
28.5234°N, 80.6830°W	YOU'RE POINTING TO A PARTICULAR CORNER OF A HOUSE
28.52345°N, 80.68309°W	YOU'RE POINTING TO A SPECIFIC PERSON IN A ROOM, BUT SINCE YOU DIDN'T INCLUDE DATUM INFORMATION, WE CAN'T TELL WHO
28.5234571°N, 80.6830941°W	YOU'RE POINTING TO WALDO ON A PAGE
28.523457182°N, 80.683094159°W	"HEY, CHECK OUT THIS SPECIFIC SAND GRAIN!"
28.523457182818284°N, 80.683094159265358°W	EITHER YOU'RE HANDING OUT RAW FLOATING POINT VARIABLES, OR YOU'VE BUILT A DATABASE TO TRACK INDIVIDUAL ATOMS. IN EITHER CASE, PLEASE STOP.

https://xkcd.com/2170/

Maschinenzahlen (3/3)

- Floats bieten für die meisten Fälle phantastische Genauigkeit.
- Rundungs"fehler" sind aber unvermeidlich und "unvorhersehbar". Die Spezifikationen des Verhaltens der floating point Arithmetik ist kompliziert und uneinheitlich; regelmäßig Verwirrungen, zB `https://stackoverflow.com/questions/56820/`.

```
> n = 5.59
> round(n, 1) # rounds to 1 dezimal place
5.5999999999999996
```

- Moral:
    - Anzahl der Stellen != Genauigkeit
    - (Erst) bei der Ausgabe floats auf sinnvolle Zahl der (relevanten) Stellen runden.
    - Floats nie auf Gleichheit testen.
    - In der Informatik üblicherweise egal ob eine reele Zahl in $\mathbb{Q}$ ist oder nicht.

Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$

Wichtige Eigenschaft von $\mathbb{R}$ (ohne Beweis)

$\mathbb{R}$ is ordnungsvollständig, das heißt:
Jedes nach oben beschränkte (nichtleere) $A \subseteq \mathbb{R}$ hat ein Supremum.

- $A \subseteq B$ heißt: A ist Teilmenge von $\mathbb{R}$ (Jedes Element von A ist auch in $\mathbb{R}$.)
- $x \in \mathbb{R}$ ist eine obere Schranke von A heißt: $y \leq x$ für alle $y \in A$.
- A ist nach oben beschränkt, wenn es eine obere Schranke gibt.
- x ist Supremum von A, wenn es die kleinste obere Schranke ist. D.h. x ist obere Schranke, und kein $y < x$ ist obere Schranke.

Dasselbe gilt natürlich "nach unten", die größte untere Schranke heißt Infimum.

Ordnungsvollständigkeit (oder nicht) von $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Auch $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind (trivialerweise) ordnungsvollständig.
Hier hat jede nach oben beschränkte Teilmenge A sogar ein Maximum x.
x heißt Maximum, wenn $x \in A$ und $x \geq y$ für alle $y \in A$ (dh. Supremum das zusätzlich in A ist).

$\mathbb{Q}$ ist nicht ordnungsvollständig:

Gegenbeispiel: Sei x nicht in $\mathbb{Q}$ (z.B. $x = \sqrt{2}$).
Setze $A := \{r \in \mathbb{Q} : \ r < x\}$.
Dann hat A kein Supremum (in $\mathbb{Q}$): Wann immer $q \in \mathbb{Q}$ über allen Punkten von A liegt, dann ist ja (in $\mathbb{R}$ betrachtet) $x < q$, und es gibt ein $q' \in \mathbb{Q}$ dazwischen, d.h. $x < q' < q$. Dieses q' ist ebenfalls obere Schranke, daher ist q nicht kleinste obere Schranke.

Mathematische Sprache

- Eine Menge ist ein "ungeordnete Kollektion" von Objekten. Wir haben bereits $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ verwendet, oder die endliche Menge $\{0, 1, \dots, 9\}$.
- Auf $\mathbb{N}$ können wir natürlich eine (kanonische) Ordnung definieren und verwenden (und man bezeichnet die Struktur mit Ordnung und Operationen ebenfalls mit $\mathbb{N}$), aber als Menge ist es eine ungeordnete Ansammlung von Zahlen:
  $\{0, 1, 2, \dots\} \quad = \{1, 0, 3, 2, 5, 4, \dots\}$ Reihenfolge unerheblich.
  $(0, 1, 2, \dots) \quad = (1, 0, 3, 2, 5, 4, \dots)$ bei Folgen!
- $A := \{r \in \mathbb{R} : r < x\}$ definiert nun eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, nämlich die Menge derjenigen Zahlen r für die gilt $r < x$.
- (Endliche) Mengen in Python: `{3,5,8}=={8,3,5}`, $\{x \in a : x > 3\}$ entspricht `{x for x in a if x>3}`

Eine Warnung

"Ordnungsvollständig" hat nichts mit "vollständiger Induktion" zu tun.

Wir wissen dass in $\mathbb{N}$ "vollständige Induktion" gilt: Wenn $\varphi(0)$ gilt, und für alle $n \in \mathbb{N}$ $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$ gilt, dann gilt $\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Dasselbe formaler:

$$\Big(\varphi(0) \ \wedge \ (\forall n \in \mathbb{N}) \left(\varphi(n) \to \varphi(n+1)\right)\Big) \ \to \ (\forall n \in \mathbb{N})\varphi(n)$$

Das gilt nicht in $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$! (Gegenbeispiel? Ü.)

Bemerkung: Bessere Definitionen von $\mathbb{R}$

(Ohne Details, nicht Prüfungsstoff.)

Unsere Definition von $\mathbb{R}$ ist aus mathematischer Sicht schlecht:

- Künstliche Abhängigkeit von Basis 10,
- Suggeriert "Operationalität" die in Wirklichkeit nicht klar ist. (Wie addiert man? Das sollte man ja "von hinten"? Etc.)
- ...

Mathematisch besser:

- Als Ordnungs-Vervollständigung von $\mathbb{Q}$: Eine reelle Zahl r ist eine Teilmenge A von $\mathbb{Q}$ mit folgender Eigenschaft: A ist nach oben beschränkt, und $q_2 \in A$, $q_1 < q_2$ impliziert $q_1 \in A$. (Post mortem: $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$.)
- (Alternative: Cauchy-konvergente Folgen in $\mathbb{Q}$.)

Folgen

Folgen

Unendliche Abfolge ("links" mit Beginn, "rechts" ohne Ende) reeller Zahlen:

$$\bar{a} = (a_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_\ell, \dots)$$

Äquivalent: Eine Folge ist eine eine Funktion f von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{R}$, in Symbolen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$. (Äquivalz via: $f(n) = a_n$.)

(Eine Funktion $f : A \to B$ ordnet jedem "input" aus dem Definitionsbereich A einen eindeutigen "output", im Wertebereich B zu.)

Manchmal beginnt man mit 1 zu indizieren:

$$\bar{a} = (a_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_\ell, \dots)$$

Oder äquivalent: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Folgen: Beispiel

Beispiel einer Folge: $\bar{a} = (3, 3.1, 3.14, 3.145, \dots)$ (Approximation an π)

$a_0 = 3$, $a_1 = 3.1$, $a_2 = 3.14$, etc.

- Das i von a_i heißt “Index”, und $\mathbb{N}_0$ ist die “Indexmenge”.
- Das a_i selbst heißt “Folgeglied” oder einfach “Element der Folge”.
- Das Folgeglied mit Index 2 ist hier also 3.14.

Bemerkung: Endliche Folgen kennen Sie aus der Informatik
Python: `x=[3,2,6]` (type `list`), Folgenglied mit index 1: `x[1] == 2`

Folgen: mehr Beispiele, Wachstumsraten

- Konstante Folgen, Bsp.: $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots)$
- $(-1)^n$, d.h. $(1, -1, 1, -1, \dots)$
- Arithmetische Folgen: a_0 beliebig, $a_n = a_0 + n \cdot \ell$.
  Bsp.: $a_0 = 100$, $\ell = 5$ ergibt $(100, 105, 110, \dots)$
- Geometrische Folgen: a_0 beliebig, $a_\ell = k^\ell \cdot a_0$. Bsp.: $a_0 = 4$, $k = 2$ ergibt $(4, 8, 16, 32, \dots)$.
- Geometrische Folge wächst exponentiell. Wenn $k > 1$, dann wächst sie (viel) schneller als jede arithmetische Folge.
- Rekursiv definierte Folge, z.B. Fibbonacci-Folge:
  $a_0 = a_1 = 1$, $a_n := a_{n-2} + a_{n-1} \quad (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$.

Folgen: Grenzwerte (Limiten)

Sei $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, $b \in \mathbb{R}$.

- b ist der Limes (oder: Grenzwert) von $\bar{a}$ wenn "a_n beliebig nahe zu b kommt für große n".
- Genauer: (Für alle reellen $\varepsilon > 0$)(gibt es ein n_0 in $\mathbb{N}$) (sodaß für alle $n > n_0$ gilt:) Der Unterschied zwischen b und a_n ist kleiner als ε.
- Dasselbe (semi)formal:

Definition (Grenzwert)

$b = \lim(\bar{a})$ gdw $(\forall\varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n > n_0)|b - a_n| < \varepsilon$

Es muss keinen Grenzwert geben, aber wenn es eines gibt dann ist es eindeutig (Beweis? Übung.), daher "der" Grenzwert.

- Wenn eine Folge $\bar{a}$ einen Grenzwert hat, heißt sie konvergent, sonst divergent.

Mathematische Sprache

Zur mathematischen Notation/Sprache: Wir haben definiert:

$$b = \lim(\bar{a}) \text{ gdw } (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n > n_0)|b - a_n| < \varepsilon$$

"gdw" Abkürzung "für genau dann wenn". Bei Definitionen sagt man oft auch einfach "wenn" bzw "if" und meint genau dasselbe.
(Bei Sätzen wichtiger Unterschied zwischen "wenn" und "gdw"!
Bsp: "$x > 4$ wenn $x = 10$" ist wahr, "$x > 4$ gdw $x = 10$" nicht.)

Weitere Symbole:

$\forall x$	"für alle x"	$\exists x$	"es gibt ein x"
$\forall y \in \mathbb{R}$	"für alle y in $\mathbb{R}$"		
$\forall n > 3$	"für alle $n > 3$" (aus dem Kontext ob n aus $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, ...)		

$\forall$ und $\exists$ nennt man "Quantoren". Quantorenreihenfolge wichtig!.

Bsp: $(\forall x)(\exists y)x = y + 1$ gilt in $\mathbb{N}$, aber $(\exists y)(\forall x)x = y + 1$ nicht.

Gleiche Quantoren können natürlich schon getauscht werden:
$(\forall x)\,(\forall y)\,\ldots$ äquivalent zu $(\forall y)\,(\forall x)\,\ldots$, auch $(\forall x, y)\,\ldots$ geschrieben.

Folgen: Grenzwerte (Limiten)

Beispiele:

- $(3, 3.1, 3.14, \dots)$ konvergiert gegen π
- $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ konvergiert gegen 0
- $(1, -1, 1, -1, \dots)$ konvergiert nicht.
- $(1, 2, 3, \dots)$, allgemeiner alle (nichtkonstanten) arithmetischen Folgen, oder die Fibonacci-Folge, etc, konvergiert nicht.

Die Folgen des letzten Punkts "gehen gegen unendlich":

Definition

$$\lim(\bar{a}) = \begin{Bmatrix} \infty \\ -\infty \end{Bmatrix} \text{ gdw } (\forall M \in \mathbb{R})\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n > n_0) \begin{cases} a_n > M \\ a_n < M \end{cases}$$

Wir sagen $\bar{a}$ "geht gegen (plus/minus) unendlich"; $\lim \bar{a} = \infty$ ist nur eine Schreibweise, so ein $\bar{a}$ konvergiert nicht und hat keinen Grenzwert.

Nachträge von Stunde 1

Quantorenreihenfolge wichtig!.
Bsp: $(\forall x)(\exists y) x = y + 1$ gilt in $\mathbb{N}$, aber $(\exists y)(\forall x) x = y + 1$ nicht.
Links darf y von x abhängen ("$y(x)$"), rechts nicht.

Gleiche Quantoren können natürlich schon getauscht werden:
$(\forall x)\,(\forall y)\,\dots$ äquivalent zu $(\forall y)\,(\forall x)\,\dots$, auch $(\forall x, y)\,\dots$ geschrieben.

Exakte Definitionen (fast notwendig: in (semi)formaler Sprache) unerlässliche Grundlage jeder mathematischen Argumentation. (Prüfungsbsp.) (exakt != formal)

Indirekter Beweis (Bsp: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$) vs. direkter (Bsp: r period.$\rightarrow$ $r \in \mathbb{Q}$): Vorteile direkter Beweis: Jeder Schritt ist "wahr", dh kann Information liefern (im Bsp: Konstruktion des Bruchs) und lässt sich auf Plausibilität überprüfen.

Nachträge von Stunde 1 (Forts.)

Notation Folgen:

"Richtig" wäre $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, oft auch geschrieben "$\langle\frac{1}{n}\rangle_{n\in\mathbb{N}}$" oder "$\langle\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\rangle$". Schlampig einfach "die Folge $\frac{1}{n}$".

Den Limes einer Folge $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schreibt man entweder als $\lim(\bar{a})$, als $\lim_{n\to\infty} a_n$ oder schlampig als $\lim a_n$.

Z.B $\lim((\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}})$, oder $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$, oder einfach $\lim\frac{1}{n}$.

(Wenn $a_n = \frac{c}{n}$, dann sieht man $\lim\frac{c}{n}$ formal nicht an ob n oder c gegen unendlich geht; man sieht das wie so oft aus dem Kontext.)

(exakt != formal)

Wachstumsraten, O-Notation

Seien $\bar{a}$, $\bar{b}$ Folgen. Wir schreiben

Definition

$\bar{a} \ll \bar{b}$, oder "$\bar{a}$ ist $o(\bar{b})$" ("klein o von $\bar{b}$") wenn gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

Äquivalent (warum?): $(\forall k \in \mathbb{N})\,(\exists M \in \mathbb{N})\,(\forall n > M)\; k \cdot |a_n| < |b_n|$.
Intuitiv: $|b_n|$ wächst "viel schneller" als $|a_n|$.

Es gilt (ohne die (recht einfachen) Beweise): Sei $1 < \ell < 2$ und $2 < k$.

$$\log n \ll \sqrt[k]{n} \ll \sqrt{n} \ll \sqrt[\ell]{n} \ll n \ll n \log n \ll n^\ell \ll n^2 \ll n^k \ll 2^n$$

In der Informatik oft verwendet:

Definition

"$\bar{a}$ ist $O(\bar{b})$" ("groß O von $\bar{b}$") wenn gilt: $(\exists C > 0)\,(\forall n \in \mathbb{N})\,|\frac{a_n}{b_n}| < C$

Intuitiv: "a_n wächst nicht wesentlich stärker als b_n" (aber in anderern Sinn als zuvor!)
Es gilt: a_n ist $o(b_n) \to a_n$ ist $O(b_n)$.

Arithmetik mit Limiten

Wenn $\lim(a_n) = a$ und $\lim(b_n) = b$ (beide endlich), dann

- $\lim(a_n \pm b_n) = a \pm b$.
  Bsp: $\lim(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = 0$.
- $\lim(a_n b_n) = ab$.
  Bsp: $\lim(\frac{1}{\ln n}\frac{1}{\sqrt{n}}) = 0$.
- Falls alle b_n und b ungleich 0 sind: $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$.
- Analog für viele andere Operationen. (Bemerkung: Genau für die "stetigen".)

Beweise: Einfach, (Ü)

Achtung: "Limes unendlich" gibt für $-$ und $\div$ keine Information ("$\infty - \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$ sind nicht definiert"):
Beispiele: Sei $a_n = n^2$ und $b_n = n$ und $c_n = n^2 + n$, also $\lim(\bar{a}) = \lim(\bar{b}) = \lim(\bar{c}) = \infty$.
Dann ist $\lim(a_n - b_n) = \infty$, und $\lim(b_n - a_n) = -\infty$;
und $\lim(\frac{a_n}{b_n}) = \infty$, $\lim(\frac{b_n}{a_n}) = 0$, $\lim(\frac{a_n}{c_n}) = 1$.

Limiten ausrechnen, ein Beispiel

- Sei $a_n = \frac{n^2+4}{2n^2+7n}$.
- $\frac{\infty}{\infty}$ bringt nichts.
- Umformen: $a_n = \frac{1+\frac{4}{n^2}}{2+\frac{7}{n}}$
- Das ergibt $\frac{1}{2}$.
- In solchen Fällen (Bruch von Polynome) sind immer nur die Summanden mit dem höchsten Exponenten relevant.

Ein Beweisbeispiel

Es gilt: Angenommen $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Dann $\lim(a_n b_n) = ab$.
D.h.: $(\forall \varepsilon')\,(\exists N)\,(\forall n > N), |a_n b_n - ab| < \varepsilon'$

Beweis: Fixiere vorläufig $\varepsilon > 0$.
Es gibt N_a mit: $(n > N_a) \to |a_n - a| < \varepsilon$. Analog für b.
Dann gilt für $n > \max(N_a, N_b)$: $|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n - (b - b_n)a| \leq |a_n - a| \cdot |b_n| + |b - b_n| \cdot |a| \leq \varepsilon(|b| + \varepsilon) + \varepsilon|a| \leq \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon)$.

(Das hilft nicht für $\cdots < \varepsilon$.)

Benennen ε in ε' um. Fixiere ε'. D.h. wir wollen zeigen
$(\exists N)\,(\forall n > N)\,|a_n b_n - ab| < \varepsilon'$.

Setze $\varepsilon := \min(1, \frac{\varepsilon'}{|a|+|b|+1})$. Wenn wie oben $n > \max(N_a, N_b)$, dann
$|a_n b_n - ab| \leq \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon) \leq \varepsilon(|a| + |b| + 1) \leq \varepsilon'$. $\square$
(Das $\square$ ist ein übliches Q.E.D. = Beweis-fertig Symbol.)

Der “Buch-Beweis” beginnt mit $\varepsilon := \min(1, \frac{\varepsilon'}{|a|+|b|+1})$, das gibt einfachere Struktur aber ist etwas mysteriöser.

Monotonie

Sei $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

- $\bar{a}$ heißt monoton steigend (oder: monoton wachsend), wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n.
  Bsp: Konstante Folge.
- $\bar{a}$ heißt streng monoton steigend (oder: monoton wachsend), wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle n.
  Bsp: $a_n = n$
- Analog: monoton fallend wenn $a_{n+1} \leq a_n$, streng monoton fallend wenn $a_{n+1} < a_n$.
  Bsp: $a_n = \frac{1}{n}$
- $\bar{a}$ heißt monoton, wenn entweder monoton wachsend oder monoton fallend.
- $\bar{a}$ ist nach oben beschränkt, wenn es $\{a_n : n \in \mathbb{R}\}$ ist, d.h.: $(\exists M \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N})\, a_n < M$. Analog für "nach unten".
- "Beschränkt" heißt: nach oben und unten beschränkt.

Monotonie und Konvergenz

Der folgende Satz ist eine Variante der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$:

Theorem

Sei $\bar{a}$ monoton. $\bar{a}$ konvergiert gdw. $\bar{a}$ ist beschränkt.

Beweis: Ü. Hinweis: konvergiert $\rightarrow$ beschränkt ist einfach. Andere Richtung: Der Limes ist (im Fall "steigend") das Supremum von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (das existiert, weil $\mathbb{R}$ ordnungsvollständig ist).

Häufungspunkt

Sei $\bar{a}$ eine Folge und $b \in \mathbb{R}$.

Definition (Häufungspunkt)

b ist Häufungspunkt von $\bar{a}$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\forall n_0 \in \mathbb{N})\,(\exists n > n_0)\ |a_n - b| < \varepsilon$$

Die Folge muss also nicht "ab irgendwann" beliebig nahe kommen, sondern "immer wieder".

Bsp: $(-1)^n$ und $(-1^n) + \frac{1}{n}$ haben beide die H.P. 1 und -1.

Der Ordnungsvollständigkeit entspricht nun:

Theorem

Jede beschränkte Folge hat einen Häufungspunkt.

Häufungspunkt: Keine Arithmetik

Bemerkung: Über Häufungspunkt von Summenfolgen (oder Produktfolgen etc) können wir nichts Allgemeines sagen.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl}
\bar{a} & = & (\ 1,\ 0,\ 3,\ 0,\ 5,\ 0,\ \ldots) \quad \text{hat Häufungspunkt } 0 \\
\bar{b} & = & (\ 0,\ 2,\ 0,\ 4,\ 0,\ 6,\ \ldots) \quad \text{hat Häufungspunkt } 0 \\
(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} & = & (\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots) \quad \text{hat keinen Häufungspunkt}
\end{array}$$

Teilfolgen

Sei $\bar{a}$ eine Folge. Eine unendliche Teilmenge I der Indexmenge definiert eine Teilfolge $\bar{b}$, in der die n-ten Elemente von $\bar{a}$, aber nur für $n \in I$, der Reihe nach aufgezählt werden.
Bsp: $\bar{a} = (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 124, 256, 512, 1024, \dots)$, dh $a_n = 2^n$;
$I = \{3, 4, 6, 9, \dots\}$, dann beginnt $\bar{b}$ mit $(8, 16, 64, 512, \dots)$.
Es gilt:

- Wenn b Häufungspunkt von $\bar{a}$ ist, dann gibt es Teilfolge $\bar{b}$ von $\bar{a}$ so dass b Limes von $\bar{b}$ ist.
- Wenn $b = \lim(\bar{a})$ und $\bar{b}$ Teilfolge von $\bar{a}$, dann $b = \lim(\bar{b})$.
- Insbesondere: Wenn $b = \lim(\bar{a})$, dann ist b einziger Häufungspunkt.
- Wenn $\bar{a}$ monoton ist, dann ist $\bar{a}$ beschränkt gdw. $\bar{a}$ konvergiert gdw. $\bar{a}$ einen Häufungspunkt hat.

Cauchyfolgen

Definition

$\bar{a}$ ist eine Cauchyfolge, wenn
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n, m > N)\,|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Ähnlich wie "konvergent", nur brauchen wir keinen Kandidaten für den Limes.

Der folgende zentrale Satz ist schon wieder eine Variante von "ordnungsvollständig" (und eine Möglichkeit $\mathbb{R}$ zu definieren/konstruieren):

Theorem

$\bar{a}$ ist Cauchyfolge $\leftrightarrow$ $\bar{a}$ konvergiert.

Unendlichkeiten

Abzählbarkeit

Gegeben eine Folge $\bar{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots)$, oder äquivalent: Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (äquivalent mit $f(n) = a_n$).
Wir betrachten nun die Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ aller Folgenelemente:

$$A := \{a_n : \ n \in \mathbb{N}\} = \{f(n) : \ n \in \mathbb{N}\} =: f''\mathbb{N}$$

Wir sagen: "Die Folge $\bar{a}$ zählt A auf." Solche A heißen abzählbar:

Definition

$A \subseteq \mathbb{R}$ heißt abzählbar, wenn $A = f''\mathbb{N}$ für ein $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, oder wenn $A = \emptyset$.

$\emptyset$ ist die leere Menge. (Warum muss man den Fall extra anführen?)

Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$

Theorem (Cantor)

$\mathbb{Q}$ *ist abzählbar.*

Der übliche Beweis:

$$\begin{tikzcd}
\frac{4}{1} \arrow[r] & \frac{4}{2} \arrow[dr] & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\frac{3}{1} \arrow[dr] & \frac{3}{2} \arrow[ul] & \frac{3}{3} \arrow[dr] & \frac{3}{4} & \cdots \\
\frac{2}{1} \arrow[u] & \frac{2}{2} \arrow[dr] & \frac{2}{3} \arrow[ul] & \frac{2}{4} \arrow[dr] & \cdots \\
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{1}{2} \arrow[ul] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{1}{4} \arrow[ul] & \cdots
\end{tikzcd}$$

D.h., $(1, \frac{1}{2}, 2, 3, \cancel{\frac{2}{2}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, 3, \cancel{\frac{4}{2}}, \cancel{\frac{3}{3}}, \cancel{\frac{2}{4}}, \dots)$ zählt $\mathbb{Q}^+$ ab (ohne Widerholungen).

Wie sehen uns das nun etwas abstrakter an.

Einfache Eigenschaften der Abzählbarkeit 1

Theorem

Wenn A^n abzählbar für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Vereinigung $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ abzählbar.

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
A^4 = \{ & a^4_1 \arrow[r] & a^4_2 \arrow[dr] & a^4_3 & a^4_4 & \cdots\} \\
A^3 = \{ & a^3_1 \arrow[dr] & a^3_2 \arrow[ul] & a^3_3 \arrow[dr] & a^3_4 & \cdots\} \\
A^2 = \{ & a^2_1 \arrow[u] & a^2_2 \arrow[dr] & a^2_3 \arrow[ul] & a^2_4 \arrow[dr] & \cdots\} \\
A^1 = \{ & a^1_1 \arrow[r] & a^1_2 \arrow[ul] & a^1_3 \arrow[r] & a^1_4 \arrow[ul] & \cdots\}
\end{tikzcd}$$

D.h., $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n = \{a^1_1, a^1_2, a^2_1, \dots\}$

Theorem

Wenn A abzählbar ist, dann gibt es eine Folge die A aufzählt so dass jedes Element von A unendlich oft vorkommt.

Derselbe Beweis (verwende dasselbe $A^n = A$ für jedes n).

Einfache Eigenschaften der Abzählbarkeit 2

Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ heißt injektiv, wenn $f(n) \neq f(m)$ für alle $n \neq m$. Bei der äquivalenten Folge heißt das: Keine Folgenglied tritt mehrmals auf.

$f : \mathbb{N} \to A$ heißt bijektiv, wenn f injektiv ist und $f''\mathbb{N} = A$.

Theorem

Wenn A abzählbar und unendlich (kurz: abzählbar unendlich) ist, dann gibt es ein $f : \mathbb{N} \to A$ bijektiv.

D.h. es gibt eine Folge die A aufzählt und jedes Element von A genau einmal enthält.

Der Beweis ist sehr einfach. (Übung)

Theorem

Wenn A abzählbar ist und $B \subseteq A$, dann ist B abzählbar.

Ebenfalls einfach. (Ebenfalls Übung.)

Unendlichkeiten

Wir sagen A und B haben dieselbe Kardinalität ("sind gleich gross") wenn es ein $f : A \to B$ bijektiv gibt.

(Was entspricht das im Endlichen?)

Wir haben nun also unendliche Mengen kennengelernt, die alle gleich groß sind (anzählbar unendlich): $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Es gibt aber Mengen die noch größer sind, d.h. es gibt verschiedene Unendlichkeiten:

Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Theorem (Cantor)

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar ($\mathbb{R}$ ist "überabzählbar").

Beweis: Angenommen $\mathbb{R} \cap [0,1]$ wäre abzählbar als $\{r^1, r^2, \dots\}$.

$$
\begin{array}{cclcccccccl}
r^1 & = & 0. & 1 & 7 & 6 & & \cdots & & & 1 \mapsto 3 \\
r^2 & = & 0. & 5 & {\color{red}0} & 0 & & \cdots & & & {\color{red}0 \mapsto 2} \\
r^3 & = & 0. & 1 & 9 & 9 & & \cdots & & & 9 \mapsto 1 \\
 & \vdots & & & & & \ddots & & & & \\
r^\ell & = & 0. & r^\ell_1 & r^\ell_2 & r^\ell_2 & \cdots & r^\ell_\ell & \cdots & & n \mapsto n+2 \mod 10 \\
d & = & 0. & 3 & {\color{red}2} & 1 & & \cdots & & &
\end{array}
$$

Dann ist d ("wirklich") ungleich jedem r^ℓ, Widerspruch.
(Frage: Warum $+2$ und nicht $+1$?)

Unlösbarkeit des Halteproblems (kein Prüfungsstoff) 1

Diese Beweismethode heißt "Diagonalisierung". Sie hat alle möglichen Anwendungen, ein Beispiel aus der Informatik:

Theorem

Das Halteproblem ist unlösbar.

Formulieren wir es für Python (Computermodell aber egal):

- Halteproblem: Gegeben ein Python Programm s und einen Input n, hält s auf Input n (oder "hängt" das Programm).
- Wir können strings als natürliche Zahl interpretieren, d.h. $s \in \mathbb{N}$.
- Der Einfachheit halber: Identifiziere jede natürliche Zahl mit einem Sourcecode. D.h.: $1, 2, 3, \dots$ sind alle möglichen Python Programme.
- Halteproblem ist also Funktion, die dem Input (s, n) (natürl. Zahlen) den Output `True` oder `False` zuordnet.
- Satz: Diese Funktion ist nicht (in Python) programmierbar.

Unlösbarkeit des Halteproblems (kein Prüfungsstoff) 2

- Sei U ein Python-Interpreter (in Python):
  Der Input: Python-Sourcecode $s \in \mathbb{N}$, und $n \in \mathbb{N}$.
  Der Output: Was s auf Input n ausgeben würde: "$U(s, n) = s(n)$".
- Wir können nun diagonalisieren: $f(n) := U(n, n) + 1$.
  Diese Funktion läßt sich in Python programmieren:
  Wir simulieren $U(n, n)$, addierern 1 zum Ergebnis, und geben das aus.
- f hat also einen sourceode m, und es gilt: $m(m) = U(m, m) + 1$.
- Aber $U(m, m) = m(m)$. Widerspuch??
- Nein! Programm terminiert i.A. nicht für jeden Input. Es gilt also einfach $U(m, m) = m(m) = \text{undefiniert} = U(m, m) + 1$.
- Das zeigt: Python-Halteproblem in Python unlösbar. Ansonsten wäre
  $$g(n) := \begin{cases} U(n, n) + 1 & \text{wenn } U(n, n) \text{ terminiert} \\ 27 & \text{sonst} \end{cases}$$
  (in Python) programmierbar, nun wirklich Widerspruch!

Reihen

Reihen

Gegeben eine Folge a_n. Wir definieren die unendliche Summen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

Definition

- $S_n := a_0 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ heißen "Partialsummen von a_n", die Folge S_n heißt (unendliche) Reihe.
- Wenn S_n konvergiert, mit limes S, schreiben wir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n := S$.

Zu jeder Folge s_n gibt es eine Folge a_n so daß s_n die Partialsummen von a_n sind: $a_0 := s_0$, $a_{n+1} := s_{n+1} - s_n$.
Dann $a_0 + \ldots a_n = s_0 + (s_1 - s_0) + (s_2 - s_1) + \cdots + (s_n - s_{n-1})$.

Ein Beispiel: $a_n = n$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht.

Besseres Beispiel: $a_n = \frac{1}{2^n}$. Dann:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n &= \quad 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\ldots \\ 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= 2+1+\tfrac{1}{2} \quad \ldots \end{aligned}$$

Daher (kein ordentlicher Beweis): $1\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 2$

Warum kein ordentlicher Beweis?

$a_n = 2^n$. Dann: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \ 1 \ +2+4+\dots$

$$2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \qquad 2+4+\dots$$

$$\text{“Daher:”} \ 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty} a_n = -1$$

Was ist das Problem? Wir setzten die Konvergenz implizit voraus.
Ordentlicherer Beweis später.

Einfache Eigenschaften

Theorem

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konvergiert* $\to \lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *("$a_n$ ist Nullfolge")*

Beweis: Sei S die unendliche Summe. Laut Definition:
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M)\,(\forall n > M)\,|S_n - S| < \varepsilon$. Insbesondere: $|S_n - S| < \varepsilon$ und
$|S_{n+1} - S| < \varepsilon$, d.h.
$|a_{n+1}| = |S_{n+1} - S_n| = |(S_{n+1} - S) - (S_n - S)| < 2\varepsilon$. $\square$

Umkehrung ("a_n Nullfolge $\to \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert") gilt nicht!

Beispiel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht!

Bew.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots >$$
$$> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\cdots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$ $\square$

Ein genauerer Blick auf die geometrische Reihe

Theorem

Sei $q > 1$. Dann $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{q}{q-1}$. Bzw: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} = \frac{1}{q-1}$

Beweis: Per Def., $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{q^n} = 1 + \frac{1}{q} + \cdots + \frac{1}{q^N}$.

Daher: $qS_n = q + S_n - \frac{1}{q^N}$, d.h. $S_n = \frac{q - \frac{1}{q^N}}{q-1}$, und der Limes ist $\frac{q}{q-1}$.

Mehr Beispiele

- Wissen bereits: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht!

  (Mit Integration: Summe bis N "ungefähr" $\int_1^N \frac{1}{x} dx = \ln(N) - 1$.)
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergiert für jedes $k > 1$.

  (Mit Integration: Summe bis N "ungefähr" $\int_1^N \frac{1}{x^k} dx = k - k \frac{1}{N^{k+1}}$.)
- $\frac{1}{n}$ ist "Trennlinie": Die "üblichen" Reihen die schneller fallen (z.B. $\frac{1}{n^q}$ und erst recht $\frac{1}{q^n}$, mit $q > 1$) konvergieren;
  $\frac{1}{n}$ und alles was weniger schnell fällt konvergiert nicht.
- Bsp: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (Kein Prüfungsstoff.)

Monotonie und Konvergenz

Bis jetzt hatten wir immer $a_n \geq 0$. Für solche Reihen gilt:
S_n ist monoton wachsend, und daher: S_n beschränkt gdw. S_n konvergent.

Theorem (Ohne Beweis)

Wenn a_n alternierend ist, d.h. abwechselnd positiv und negativ, und $|a_n|$ (die Absolutbeträge) eine monoton fallende Nullfolge sind, dann konvergiert die Reihe.

Bsp: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$. Die Absolutbeträge, d.h. $\frac{1}{n}$, sind eine fallende Nullfolgen, daher ist die Reihe konvergiert (und ist $-\ln(2)$, kein Prüfungsstoff).

Wir wissen bereits: Voraussetzung "Nullfolge" ist nötig:
Gegenbeispiel: $(-1)^n$ hat Partialsummen $(1, 0, 1, 0, \dots)$ und konvergiert nicht.

Ü: Warum muss man auch monoton fallend voraussetzen?

Absolute Konvergenz

Definition

Wenn die Reihe der absoluten Folgenglieder $|a_n|$, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$, konvergiert, heißt die Reihe a_n “absolut konvergent”.

Theorem

Absolut konvergent impliziert konvergent.

(Umkehrung gilt nicht, wieder dasselbe Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$.)

Beweis: Seien S_n Partialsummen von a_n, S_n^* (monoton steigend) von $|a_n|$.
S_n konvergiert gdw. S_n Cauchyfolge, d.h. per Def.:
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N)\,(\forall m > n > N)\,|S_m - S_n| < \varepsilon$.
Aber $|S_m - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots a_m| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_m| = S_m^* - S_n^* = |S_m^* - S_n^*|$. $\square$

Dreiecksungleichung

Alle (fast alle?) analytischen Beweise bisher haben die Dreiecksungleichung benutzt:

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R})\, |a - c| \leq |a - b| + |b - c|,$$

manchmal in der Form

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})\, |a - b| \leq |a| + |b|$$

oder

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})\, |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Oder für mehr als zwei:

$$(\forall a_1, \dots a_n \in \mathbb{R})\, |a_1 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + \dots |a_n|$$

Ü: Beweise die Dreiecksungleichung.

Arithmetik

Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = T$, und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $S + T$.
  Warum? Für die n-ten Partialsummen gilt:
  $S_n^{a+b} := (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) =$
  $= (a_1 + \cdots + a_n) \ + \ (b_1 + \cdots + b_n) = S_n^a + S_n^b$,
  und $\lim(S_n^a + S_n^b) = \lim(S_n^a) + \lim(S_n^b)$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda \cdot a_n$ konvergiert gegen $\lambda \cdot S$.
  Warum? Für die n-ten Partialsummen gilt:
  $S_n^{\lambda a} := \lambda a_1 + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + \dots a_n) = \lambda S_n^a$,
  und $\lim(\lambda \cdot S_n^a) = \lambda \cdot \lim(S_n^a)$.
- Für das Produkt zweier Reihen gilt das i.A. natürlich nicht!
  I.A. ist ja $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \neq a_1 b_1 + a_2 b_2$
  Bsp: $\bar{a} = (1, 1, 0, 0, 0, \dots)$. Dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 2$, und
  $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot a_n) = 2 \neq 2 \cdot 2 = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} a_n)$.

Cauchy Produkte (kein Prüfungsstoff)

Das Produkt von Reihen lässt sich informell so beschreiben/umordnen:
$(a_0 + \dots + a_N + \dots) \cdot (b_0 + \dots + b_N + \dots) =$
$= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots + (a_0 b_N + \dots a_N b_0) + \dots$.
Es gilt:

Theorem (Ohne Beweis)

Wenn die Reihen a_n und b_n absolut konvergieren, dann gilt:
$(\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$, *mit* $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Die Folge (bzw. Reihe) c_n nennt man das Cauchyprodukt, manchmal auch Faltung der Folgen/Reihen a_n und b_n.

Teilmengen von $\mathbb{R}$

Mengenschreibweisen

Notation: Seien A und B Mengen.

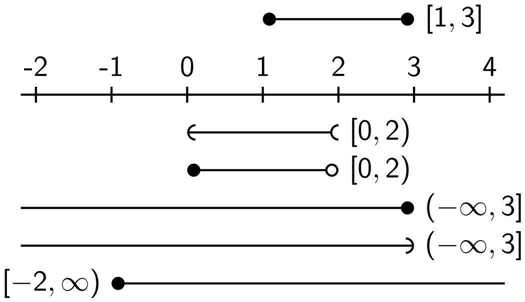
- $\{a_0, \dots, a_n\}$ ist die Menge, die (nur) $a_0, \dots a_n$ als Elemente enthält. Insbesondere: $\{a\}$ enthält genau a.
- $A \cup B$ ist die Menge aller Elemente die in A oder B (oder beiden) sind.
- $A \cap B$ ist die Menge aller Elemente die in A und in B sind. Könnte man auch als $\{x \in A : x \in B\}$ schreiben.
- $A \setminus B$ ist die Menge aller Elemente die in A aber nicht in B sind. Könnte man auch als $\{x \in A : x \notin B\}$ schreiben.
- $A \setminus \{a\}$ ist also $\{x \in A : x \neq a\}$.
- $A \times B$ ist die Menge der (geordneten) Paare (endliche Folge der Länge 2) (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.
  $A^2 := A \times A$.
  Bsp: $\mathbb{R}^2$ ist die (reelle) Ebene (kartesische Koordinaten)
- Analog $A_1 \times \cdots \times A_n$. Z.B. $\mathbb{R}^3$ ist der 3dimensionale Raum.

Reelle Intervalle

In $\mathbb{R}$ (oder allgemeiner: einer linear geordneten Menge): Sei $a, b \in \mathbb{R}$.

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ heißt "das abgeschlossene Intervall a b".
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ heißt "das offene Intervall a b".
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$, analog $[a, b)$ ("halboffen")
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$, analog für $(-\infty, b)$, $[a, \infty)$ und (a, ∞).
- Manchmal: $]a, b]$ statt $(a, b]$; $]a, b[$ statt (a, b) etc.

Darstellungen:



Metrische Räume

Für $x, y \in \mathbb{R}$, setzte $d(x,y) := |x-y|$. d ist ein "Abstand" oder "Metrik":

Definition

$d : X \times X \to \mathbb{R}$ ist eine Metrik auf X, wenn gilt: $d(x,y) = d(y,x)$; $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0$ gdw. $x = y$; und $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Dreiecksungleichung).

Andere Beispiele für Abstände:

- In $\mathbb{R}^2$ die "Euklidische Metrik" $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$.
- Analog für $\mathbb{R}^3$: $d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) := \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$.
- (Bem.: Auch in $\mathbb{R}$ gilt: $|x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2}$.)
- Allgemeiner: V normierter Vektorraum. Dann ist $d(\vec{x},\vec{y}) := ||\vec{y} - \vec{x}||$ ein Abstand.

Eine "Grundmenge" X zusammen mit einem Abstand $d : X \times X \to \mathbb{R}$ nennt man "metrischen Raum".

Offene Mengen 1

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition

Für $x \in X$ und $\varepsilon > 0$, setze
$B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ (genannt "Ball").

In $\mathbb{R}$ ist $B_\varepsilon(x)$ das Intervall $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.
In $\mathbb{R}^2$ ist $B_\varepsilon(\vec{x})$ die randlose Kreisscheibe mit Mittelpunkt $\vec{x}$ und Radius ε.
Analog: In $\mathbb{R}^3$ Kugel.

Definition

$A \subseteq X$ heißt offen, wenn $(\forall x \in A)\,(\exists \varepsilon > 0)\, B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

(Insbesondere: $\emptyset$ ist offen.)

Intuitiv: Eine Menge ist offen wenn sie "keinen Rand" hat.

Offene Mengen 2

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Theorem

1. *Jedes $B_\varepsilon(x)$ ist offen.*
2. *A offen $\leftrightarrow$ A ist Vereinigung von Bällen.*

Beweis: Ü. Für (1) benötigt man Dreiecksungleichung.)

Theorem (Topologie. Bew.:Ü)

- A. *$\emptyset$ ist offen, X ist offen.*
- B. *Der Schnitt zweier (oder: endlich vieler) offener Mengen ist offen.*
- C. *Die ("beliebige") Vereinigung offenener Mengen ist offen.*

Bemerkung: Wenn man zu einer Grundmenge X (i.A. ohne Metrik) einige Teilmengen als "offen" deklariert, s.d. (A–C) erfüllt sind, nennt man das einen "topologischen Raum". Jeder metrische Raum ist topologisch.

Abgeschlossene Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition

$A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Intuitiv: Der Rand ist bei der Menge A dabei.

$\{x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen. (Wieder Dreiecksungleichung.)

Durch Komplementbildung zu offenen Mengen sieht man sofort:

Theorem

- $\emptyset$ *und* X *sind also abgeschlossen (und auch offen).*
- *Die endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
- *Der beliebige Schnitt abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Offen/abgeschlossen und Folgen

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Definition

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus X.
Wir sagen "a_n konvergiert mit Limes a", oder: "$\lim_{n \to \infty} a_n = a$", wenn gilt:
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists M \in \mathbb{N})\,(\forall n > m)\, d(a_n, a) < \varepsilon$.

(Überzeugen Sie sich dass das für $X = \mathbb{R}$ die alte Definition ergibt!)

Theorem

1. *$O \subseteq X$ ist offen, gdw gilt: Für jede konvergierende Folge a_n gilt*
   $\lim_{n \to \infty} a_n \in O \;\rightarrow\; (\exists M)\,(\forall n > M)\, a_n \in O$
2. *A ist abgeschlossen, gdw gilt: Für jede konvergierende Folge a_n gilt*
   $$\Big(\lim_{n \to \infty} a_n = a \;\&\; (\forall n \in \mathbb{N})\, a_n \in A\Big) \rightarrow a \in A$$
   D.h. eine konvergente Folge mit Elementen aus A hat Limes in A.

Ein Beweis

(X, d) metrischer Raum, $O \subseteq X$.

Zu zeigen:

O offen $\Leftrightarrow \Bigg($ Für jede konvergierende Folge a_n gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n \in O \ \rightarrow \ (\exists M)\,(\forall n > M)\, a_n \in O \Bigg)$$

($\Leftrightarrow$ heißt genau dasselbe wie $\leftrightarrow$, nämlich gdw.)

Beweis: $\Rightarrow$: O ist also offen, und $a := \lim a_n$ ist in O. Nach Def. offen gibt es $\varepsilon > 0$ s.d. $B_\varepsilon(a) \subseteq O$. Nach Def. Limes $(\exists M)\,(\forall n > M)\, d(a_n, a) < \varepsilon$.

"$\Leftarrow$": Wir zeigen: Wenn O nicht offen, dann gibt es eine Folge a_n die ein Gegenbeispiel ist.
O nicht offen, also (nach Def.) $(\exists a \in O)\,(\forall \varepsilon > 0)\, B_\varepsilon(a) \not\subseteq O$; d.h. $(\exists a \in O)\,(\forall \varepsilon > 0)\, \exists b_\varepsilon \in B_\varepsilon(a) \setminus O$. Setze $a_n := b_{\frac{1}{n}}$. Dann konvergiert a_n gegen $a \in O$, weil $d(a_n, a) = d(b_{\frac{1}{n}}, a) < \frac{1}{n}$, aber kein a_n ist in O.

Offen und abgeschlossen in $\mathbb{R}$

In $\mathbb{R}$ gilt:

- Offenene Intervalle (a, b) sowie $(-\infty, a)$ und (a, ∞) sind offen.
- Abgeschlossenes Intervalle $[a, b]$ sowie $(-\infty, a]$ und $[a, \infty)$ sind abgeschlossen.
- Halboffene Intervalle $[a, b)$ und $(a, b]$ sind weder offen noch abgeschlossen.
- Bälle sind genau die offenen Intervalle: $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ und $(a, b) = B_{\frac{b-a}{2}}(\frac{a+b}{2})$.
- $A \subseteq \mathbb{R}$ offen $\leftrightarrow$ A ist Vereinigung offener Intervalle.

Theorem ($\mathbb{R}^n$ "zusammenhängend". Ohne Beweis)

Für $n = 1, 2, \ldots$ gilt: $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ sind die einzigen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ die sowohl offen als auch abgeschlossen sind. [Das inkludiert $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.]

(Bemerkung: Das gilt nicht in jedem metr. Raum. Bsp: Jede TM von metr. Raum ist wieder metr. Raum; Insbes $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ mit $d(x, y) := |y - x|$ ist metr. Raum, $[0, 1]$ ist offen und abgeschlossen.)

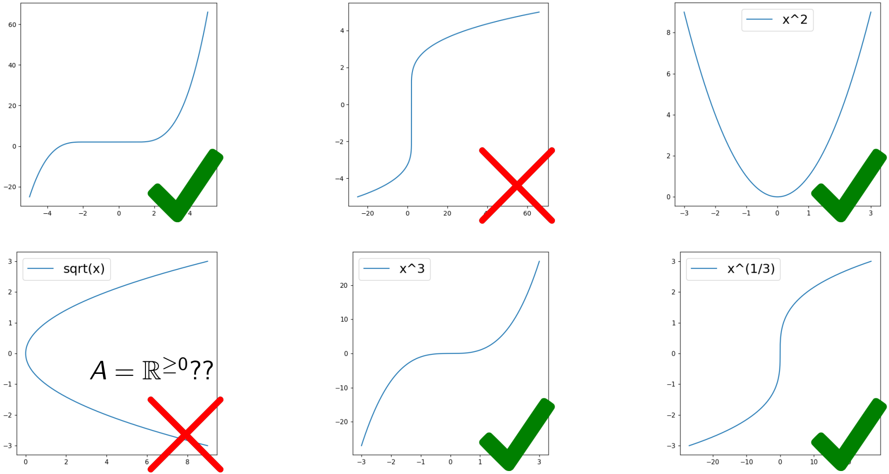
Funktionen

Funktionen: Notation

- Eine Funktion $f : A \to B$ ordnet jedem "input" aus der Menge A (Definitionsbereich) genau einen "output" aus B (Wertebereich) zu.
- Bsp: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Das entspricht einer Folge $(f(0), f(1), \dots)$.
- Notation zur Definition/Beschreibung von Funktionen:
  Bsp für Quadrat-Funktion:
  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:, "$x \mapsto x^2$"; oder: "so daß $f(x) = x^2$" oder: "definiert durch" oder: "mit". Schlampig auch "Funktion $\frac{1}{x}$" oder "$f = \frac{1}{x}$".
- Definitionsbereiche oft implizit (=nicht explizit ausgesprochen): Wenn wir von der (reellen) Funktion $\frac{1}{x}$ sprechen, meinen wir implizit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$.
- "Zwei inputs": $f(x, y)$ äquivalent zu einem Input "geordnetes Paar (x, y)"; d.h. $f : X \times Y \to Z$.
  Analog $f : X_1 \times \dots \times X_n \to Z$ für $f(x_1, \dots, x_n)$.
  Bsp: $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto x + y$ ist die Addition.

Graphen

Identifiziere $f : A \to \mathbb{R}$ mit Funktionsgraphen $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times \mathbb{R}$.
Nicht jede Kurve im $\mathbb{R}^2$ ist ein Graph!



Graphen

Identifiziere $f : A \to \mathbb{R}$ mit Funktionsgraphen $\{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times \mathbb{R}$.
Nicht jede Kurve im $\mathbb{R}^2$ ist ein Graph!

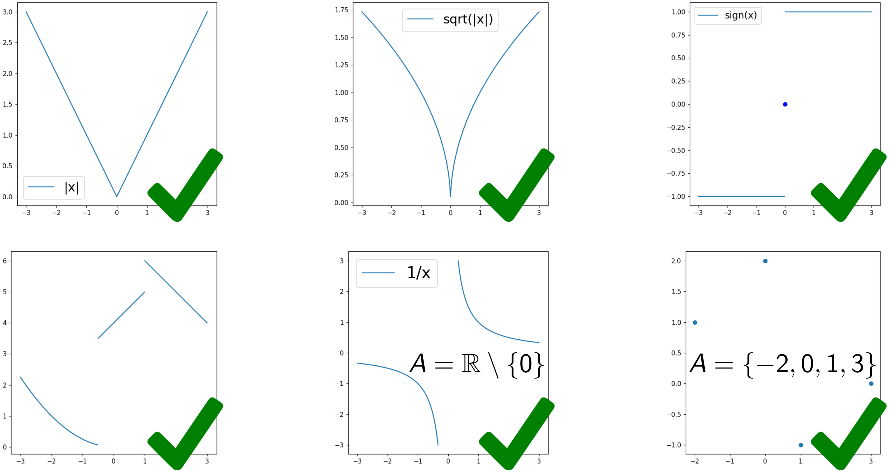


Bild und Urbild

Sei $f : A \to B$. Wir definieren:
$\mathbb{R}^{>0} := (0, \infty)$ (positive reelle Zahlen), $\mathbb{R}^{\geq 0} := [0, \infty)$ (nicht-negative).

- Für $X \subseteq A$ ist $f''X := \{f(x) : x \in X\}$. ("Bild", "image")
  (Manchmal auch $f[X]$ geschrieben.)
  Bsp: Für $f(x) = \frac{1}{x}$ ist $f''\mathbb{R}^{>0} = \mathbb{R}^{>0}$. Bsp: $\ln'' \mathbb{R}^{>0} = \mathbb{R}$.
- Für $Y \subseteq B$ ist $f^{-1}Y := \{a \in A : f(a) \in Y\}$. ("Urbild", "inverse image")
  Für $b \in B$ schreibe auch $f^{-1}(b)$ statt $f^{-1}\{b\}$,
  d.h. $f^{-1}(b) = \{a \in A : f(a) = b\}$.
  Bsp: $\sin^{-1}(0) = \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\}$.
- Urbilder vertragen sich gut mit Mengenoperationen:
  $f^{-1}(X_1 \cup X_2) = (f^{-1}X_1) \cup (f^{-1}X_2)$
  und dasselbe gilt für $\cap$ und $\setminus$, (insbesondere Komplement $A \setminus X$).
- Bei Bildern gilt nur für $\cup$: $f''(X_1 \cup X_2) = (f''X_1) \cup (f''X_2)$; aber nicht für $\cap$ oder Komplement. Nur: $f''(X_1 \cap X_2) \subseteq (f''X_1) \cup (f''X_2)$!

Ein Beweis-Beispiel

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Zeige:
$A := \{x \in X : d(x,x_0) \leq \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.

- Nach Def. A abg. gdw $O := X \setminus A$ offen. Es gilt: $O = \{x \in X : d(x,x_0) > \varepsilon\}$.
- Sei also $x' \in O$ beliebig. Zu zeigen: $(\exists \varepsilon' > 0)\, B_{\varepsilon'}(x') \subseteq O$. (Damit wäre gezeigt: O offen, und wir sind fertig.)
- Wissen: $x' \in O$, d.h. $d(x_0,x') > \varepsilon$. Dann gilt (!!): Es gibt ein $\varepsilon' > 0$ s.d. $d(x_0,x') > \varepsilon + \varepsilon'$. (Z.B. $\varepsilon' := \frac{d(x_0,x')-\varepsilon}{2}$.)
- Sei $y \in B_{\varepsilon'}(x')$. Wir wollen zeigen: $y \in O$. (Dann sind wir fertig.) Wir setzen also voraus: $d(y,x') < \varepsilon'$ und müssen zeigen: $d(y,x_0) > \varepsilon$.
- Dreiecksungleichung: $d(x_0,x') \leq d(x_0,y) + d(y,x')$. Auf beiden Seiten minus $d(y,x')$: $d(x_0,y) \geq d(x_0,x') - d(y,x') > \varepsilon + \varepsilon' - d(y,x') > \varepsilon + \varepsilon' - \varepsilon' = \varepsilon$ $\square$

Injektiv

Wir haben letzte Stunde definiert was $f''X$ (oder: $f[X]$) und was $f^{-1}Y$ heißt. Weitere Definitionen zu allgemeinen Funktionen:

- $f : A \to B$ heißt injektiv, wenn $a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)$.
- Beispiele für injektive Funktionen:
  x, x^3, $\frac{1}{x}$ (Definitionsmenge: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$),
  e^x, $\ln(x)$ (Definitionsmenge: $\mathbb{R}^{>0}$).
- Beispiele für nicht injektive Funktionen:
  Konstante Funktionen, x^2, x^4, $\sin(x)$, $\frac{1}{x^2}$ (Definitionsmenge: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).
- Noch einmal Mengen-Notation: Für Mengen A bezeichnet $|A|$ (üblicherweise) die Kardinalität (=Anzahl der Elemente) von A.
  (Für Zahlen x dagegen ist $|x|$ der Absolutbetrag.)
  Mit dieser Schreibweise: f injektiv gdw $(\forall b \in B)\,|f^{-1}(b)| \leq 1$.

Verknüpfung, Einschränkung

- Wenn $f : A \to B$ und $C \subseteq A$, dann ist $f \restriction C : C \to B$ die Einschränkung auf die kleinere Definitionsmenge (dh. $(f \restriction C)(x) = f(x)$ für alle $c \in C$.)
- Wenn $C \neq A$, dann ist $f \restriction C$ eine andere Funktion als f.
  Bsp: $f = x$ und $g = x^2$ und $h = e^x - 1$, alle mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$.
  Dann ist $f \restriction \{0\}$ und $g \restriction \{0\}$ und $h \restriction \{0\}$ dieselbe Funktion $i : \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $0 \mapsto 0$.
- Wenn $f : A \to B$ und $g : B \to C$, dann ist die "Verknüpfung" $g \circ f : A \to C$ definiert durch $x \mapsto g(f(x))$.
  Gesprochen: "f vor g", "g nach f", "g Kringel f".
  Bsp: $f = \ln(x)$, $g = x^2$.
  Dann $g \circ f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R} : \ x \mapsto (\ln(x))^2$,
  und $f \circ (g \restriction \mathbb{R} \setminus \{0\}) : \ \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : \ x \mapsto \ln(x^2)$.

Surjektiv und bijektiv

- $f : A \to B$ heißt surjektiv, wenn $f''A = B$.
  (Äquivalent: wenn $(\forall b \in B)\, |f^{-1}(b)| \geq 1$, oder:
  $(\forall b \in B)\, (\exists a \in A)\, f(a) = b$.)
- Achtung: Surjektivität hängt von "Schreibweise" ab: Sei $f(x) = \frac{1}{x}$.
  Dann ist $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ nicht surjektiv; aber $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ schon.
  Zur Erinnerung: Der Definitionsbereich ist Bestandteil einer Funktion:
  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ x \mapsto e^x$ ist eine andere Funktion als $f \restriction [0, 1]$.
  Aber man kann dasselbe f entweder als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auffassen oder als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$.
- Insbesondere: $f : A \to f''A$ ist immer surjektiv.
- Bijektiv heißt: Injektiv und surjektiv.
- Für $f : A \to B$ gilt also: f injektiv gdw. $f : A \to f''B$ bijektiv.

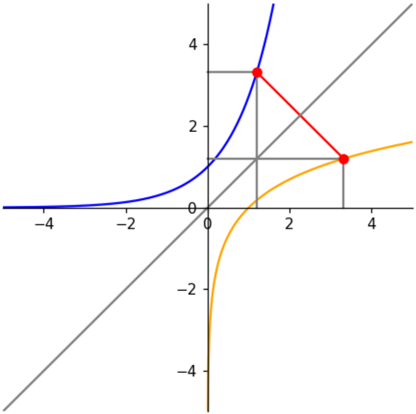
In $\mathbb{R}$: Monoton

- $f : A \to \mathbb{R}$ für $A \subseteq \mathbb{R}$ heißt streng monoton wachsend, wenn $x < y \to f(x) < f(y)$ für alle x, y in A; und streng monoton fallend, wenn $x < y \to f(x) > f(y)$.
- Streng monoton wachsend (oder fallend) impliziert injektiv. (Bew.: Wenn $x \neq y$, dann entweder $x < y$ oder $y < x$; daher entweder $f(x) < f(y)$ oder $f(y) < f(x)$, in jedem Fall $f(x) \neq f(y)$.)
- Streng monoton wachsend impliziert: $x < y$ gdw $f(x) < f(y)$.
  (Analog für fallend.)
  (Im wesentlichen selber Beweis.)

Umkehrfunktion

- Wenn $f : A \to B$ injektiv, dann definiere die "Umkehrfunktion", auch: "Inverse", $f^{-1} : f''B \to A$ durch $f^{-1}(b) = a$ gdw. $f(a) = b$.
  So ein $f^{-1} : f''B \to A$ ist immer bijektiv.
- Inkonsistent mit zuvor definiertem f^{-1}: Falls f injektiv und $b \in f''A$, dann $f^{-1}(b) = \{f^{-1}(b)\}$.
  Wie immer: Kontext gibt an was gemeint ist.
- Bsp: $f = x^2$ nicht injektiv auf $\mathbb{R}$, und für $x > 0$ ist $f^{-1}(x) = \{+\sqrt{x}, -\sqrt{x}\}$.
  Aber $g = f \restriction \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ ist injektiv, mit Umkehrfunktion $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
- Bsp: Sei $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Exponentalfunktion $x \mapsto e^x$.
  Beachte dass exp injektiv ist und $\exp'' \mathbb{R} = \mathbb{R}^{>0}$.
  Die Umkehrfunktion ist der Logarithmus: $\ln : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$.
- Wenn $f : A \to \mathbb{R}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, dann auch f^{-1}. (Und dasselbe für fallend.)

Umkehrfunktion als Graph



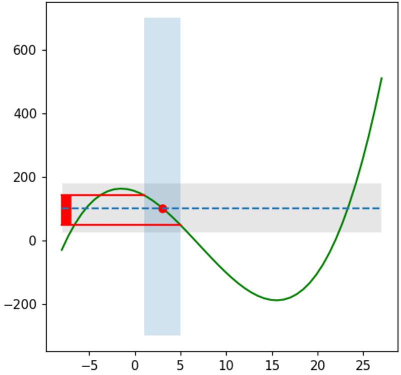
- e^x
- $e^{1.2} = 3.32\dots$
- Daher: $\ln(3.32\dots) = 1.2$
- Entspricht Spiegelung an Diagonale
- $\ln(x)$

Stetigkeit

Stetigkeit

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$.

- f heißt stetig bei x_0 (für ein $x_0 \in A$), wenn $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,|x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.
- Äquivalent: wenn $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,x \in B_\delta(a) \to f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$.
- f heißt stetig, wenn f stetig bei x_0 für alle $x_0 \in A$.



- Eine Funktion f, (hier $\frac{1}{7}x^3 - 3x^2 - 10x + 155$)
- Wählen ein Argument x_0 (hier: 3)
- mit Funktionswert $f(x_0)$ (hier: $101.857\ldots$)
- kleine ε-Umgebung von $f(x_0)$
- Pointe: Es gibt kleine δ-Umgebung von x_0, s.d.
- $f''B_\delta(x_0) \subseteq B_\varepsilon(f(x_0))$

Stetigkeit

Unsere offizielle Definition (funktioniert für alle metrische Räumen, zB $\mathbb{R}^n$):
Seien (X, d^X), (Y, d^Y) metrisch, $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$.

Definition

f ist stetig bei a (für ein $a \in A$), wenn
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\, x \in B^X_\delta(a) \cap A \to f(x) \in B^Y_\varepsilon(f(a))$.

(Dabei ist $B^X_\delta(a) = \{x \in X :\ d^X(x, a) < \varepsilon\}$ etc.)

Äquivalente Formulierungen:

- $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\, f''B^X_\delta(a) \subseteq B^Y_\varepsilon(f(a))$, bzw
- $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\, f^{-1}B^Y_\varepsilon(f(a)) \supseteq B^X_\delta(a)$

Definition

$f : A \to Y$ heißt stetig, wenn f stetig ist bei a für alle $a \in A$.

Topologische Definition

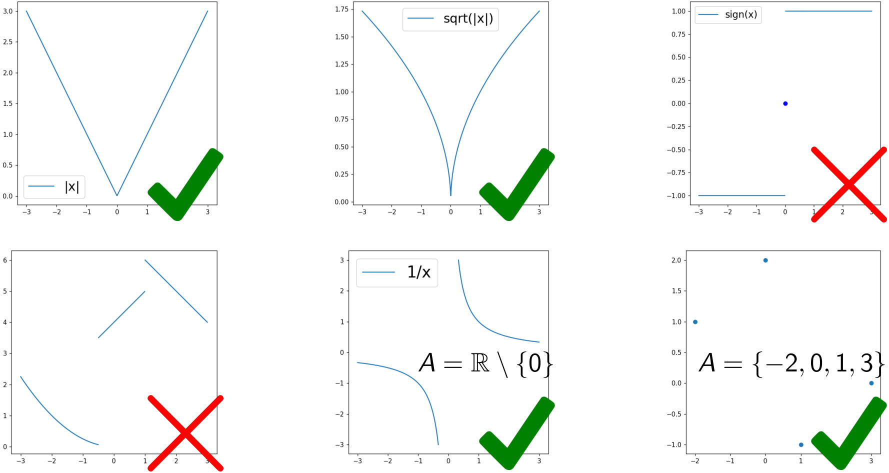
Bemerkung: Es gilt: $f : X \to Y$ ist stetig gdw. das Urbild von offen offen ist, d.h.:

$$(\forall O \subseteq Y) \quad O \text{ offen } \to f^{-1}O \text{ offen.}$$

Das ist "wahre" Definition die in allen topologischen Räumen funktioniert.

Beispiele

Intuition $\sim$ Graph kann "ohne Unterbrechung durchgezogen werden".
Beispiele: $f : A \to \mathbb{R}$ (mit "natürlichem" A.) Ist f stetig?



Polynome

- Die Konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ x \mapsto a$ ist stetig.
  (Nicht injektiv. Nicht surjektiv.)
- Affine (schlampig: "lineare") Funktionen sind Funktionen der Form $f(x) = ax + b$.
  Solche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig, und bijektiv wenn $a \neq 0$.
  ("Linear" sind eigentlich nur Funktionen $x \mapsto ax$, d.h. mit $b = 0$.)
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ x \mapsto x^n$ ist stetig.
  Für n ungerade ist f bijektiv.
  Für n gerade ist $x^n = (-x)^n$, und $f''\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\geq 0}$.
- Polynome (mit Grad n) sind Funktionen der Form
  $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, wobei alle $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$.
- Polynome sind stetig.
- "Aus der Ferne" ist nur der höchste Koeffizient relevant: $f(x) \sim a_n x^n$.

Potenzen

- Kennen schon x^n für $n \in \mathbb{N}$. $x^0 := 1$. (Auch $0^0 = 1$.)
- $x^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{x}$, d.h. "das" y mit $y^n = x$.
  - Fall n gerade: Das geht nur für $x \geq 0$, es gibt zwei solche y, wir nehmen das nicht-negative.
    $x^{\frac{1}{n}} : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$ ist stetig (und injektiv); $(x^{\frac{1}{n}})''\mathbb{R}^{\geq 0} = \mathbb{R}^{\geq 0}$.
  - n ungerade: Es gibt immer ein eindeutiges y.
    $x^{\frac{1}{n}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und bijektiv.
- $x^{-r} := \frac{1}{x^r}$.
- $x^r \cdot x^s = x^{r+s}$; $(x^r)^s = x^{r \cdot s}$ (Achtung: $\neq x^{(r^s)}$)
- Damit kann man x^r definieren für alle $r \in \mathbb{R}$ und $x \geq 0$.
  Bsp: $2^\pi \sim 2^{3.14} = \sqrt[100]{2^{314}}$; implizite Behauptung: Wenn man immer mehr Nachkommastellen verwendet, konvergiert die entsprechende Folge. 2^π ist dann definiert als der Grenzwert.

Exponentialfunktion

- Insbesonder ist e^x definiert für alle $x \in \mathbb{R}$.
- e, die Eulersche Zahl ist ~ 2.7; exakt:
  $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.
  Dabei ist $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$, gesprochen "n Faktorielle".
  Wir werden später sehen warum e nützlich ist; auch $n!$ werden wir noch brauchen.
- $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig (und injektiv), $(e^x)''\mathbb{R} = \mathbb{R}^{>0}$.
  Dasselbe gilt für a^x ($a > 0$), weil $a^x = e^{x \ln a}$.

Logarithmus

- $\ln(x) = y$ ist definiert durch $x = e^y$. Das geht nur für $x > 0$.
  $f : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ ist stetig (und bijektiv).
- Insbes: $e^{\ln(a)} = a$, und $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln(a)}$.
- $\ln(1) = 0$; $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; $\ln(x^r) = r \ln x$.
- Insbes: $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$;
- Analg ist $\ln_a$ definiert ($a > 0$): $\ln_a(x) = y$ gdw. $x = a^y$.
  Weil $a^y = e^{y \ln(a)}$, ist $\ln(x) = y \ln(a)$, d.h. $\ln_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
  Bsp: $\ln_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln 2} = 1.44 \ldots \cdot \ln(x)$.

Winkelfunktionen

- Wir haben noch keine komplexen Zahlen verwendet; es reicht zu wissen dass $i^2 = -1$. Dann: $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ac + bd)$
- Es gilt: $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$.
- Aus $e^{i(\phi+\psi)} = e^{i\phi}e^{i\psi}$ bekommen wir dann die Additionstheoreme: $\sin(\phi + \psi) = \sin(\phi)\cos(\psi) + \cos(\phi)\sin(\psi)$, $\cos(\phi + \psi) = \cos(\phi)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\psi)$.
- $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. Nicht injektiv, sondern periodisch mit Periode 2π.

Stetigkeit und Folgen

Seien (X, d^X), (Y, d^Y) metrisch, $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$ und $a \in A$.

Theorem

f ist stetig bei a ist äquivalent zu Folgendem:
Sie x_n eine Folge in A. Dann $\lim(x_n) = a \ \to \ \lim(f(x_n)) = f(a)$.

Beweis: Angenommen f stetig, $\lim(x_n) = a$, $\varepsilon > 0$.
Wir brauchen: M s.d. $(\forall n > M)\, d^Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$.
Weil f stetig gibt es δ s.d. $d^X(x_n, a) < \delta \to d^Y(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$.
Weil $\lim(x_n) = a$ gibt es M s.d. $(\forall n > M)\, d^X(x_n, a) < \delta$, d.h. M ist wie verlangt.

Angenommen f nicht stetig, d.h.,
$(\exists \varepsilon > 0)\, (\forall \delta > 0)\, (\exists x_\delta \in A)\, (d^X(x_\delta, a) < \delta \wedge d^Y(f(x_\delta), f(a)) \geq \varepsilon)$.
Die Folge $x_{\frac{1}{n}}$ ist das gesuchte Gegenbeispiel:
$d^X(x_{\frac{1}{n}}, a) < \frac{1}{n}$, d.h. $\lim(x_{\frac{1}{n}}) = a$, aber
$d^Y(f(x_{\frac{1}{n}}), f(a)) \geq \varepsilon$, d.h. $\lim(f(x_{\frac{1}{n}}))$ kann nicht a sein.

Verknüpfung stetiger reellen Funktionen

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ stetig und $g : B \to \mathbb{R}$ stetig.

Theorem

- $f + g : A \cap B \to \mathbb{R}$ *ist stetig; genauso* $f - g$ *und* $f \cdot g$.
- $\frac{f}{g} : \{x \in A \cap B : \ g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ *ist steig.*
- *Wenn* $f''A \subseteq B$, *dann ist* $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ *stetig.*

Bemerkung: Das sind alles Instanzen des allgemeineren Satzes (der in allen metrischen Räumen gilt): Die Verknüpfung stetiger Funktionen ist stetig; zusammen mit der Tatsache dass die Addition $+ : \mathbb{R}^2\mathbb{R}$ stetig ist, genauso die Multiplikation und die Division (auf $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Eigenschaften stetiger reellen Funktionen

Sei $a \leq b$ in $\mathbb{R}$.

Theorem (ohne Beweis)

Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist $f''[a, b] = [c, d]$ für ein $c \leq d$.

Daraus folgt unter anderem:

- Jeder Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wird mindestens einmal angenommen (weil ja $c \leq f(a), f(b) \leq d$).
- Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, dann hat f eine Nullstelle.
- $f''[a, b]$ hat ein Maximum (d) und ein Minimum (c); insbesondere kann es nicht unbeschränkt sein.

Häufungspunkte von Mengen

Sei (X, d^X) metrisch, $A \subseteq X$.

Definition

$x_0 \in X$ ist Häufungspunkt von A, wenn es eine Folge mit Elementen aus $A \setminus \{x_0\}$ gibt, die nach x_0 konvergiert.

Ein Punkt $x_0 \in A$ der kein Häufungspunkt ist heißt isoliert.
Beispiele für $X = \mathbb{R}$:

- Für $A = (1, 2)$ sind genau die Elemente von $[1, 2]$ Häufungspunkte, es gibt keine isolierten Punkte von A.
- $A = \{0\}$ hat keine Häufungspunkte, und 0 ist isoliert.
  (Die Folge $(0, 0, 0, \dots)$ hat Limes und Häufungspunkt 0, aber wir bräuchten ja eine Folge aus $A \setminus \{0\} = \emptyset$.)
- $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ hat Häufungspunkt 0 (wie die entsprechende Folge), alle Punkte von A sind isoliert.

Grenzwerte

Sei (X, d^X) und (Y, d^Y) metrisch, $A \subseteq X$, und $f : A \to Y$; und sei $x_0 \in X$ Häufungspunkt von A.

Definition

Wir schreiben $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$, wenn gilt: Wann immer a_n eine Folge in $A \setminus \{x_0\}$ ist, mit $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, dann $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = c$.

Es gilt:

- Der Limes ist eindeutig (wenn er existiert).
  Beweis: Weil x_0 Häufungspunkt ist gibt es irgendeine Folge a_n in $A \setminus \{x_0\}$ mit $\lim(a_n) = x_0$. Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert, gilt nach Definition $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.
- Wenn x_0 zusätzlich in A ist, dann ist f stetig bei x_0 gdw $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
  Beweis: Übung.

Uneigentliche Limiten für reelle Funktionen

Für $f : A \to \mathbb{R}$ mit $A \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir auch die folgenden "uneigentlichen Limiten":

Definition

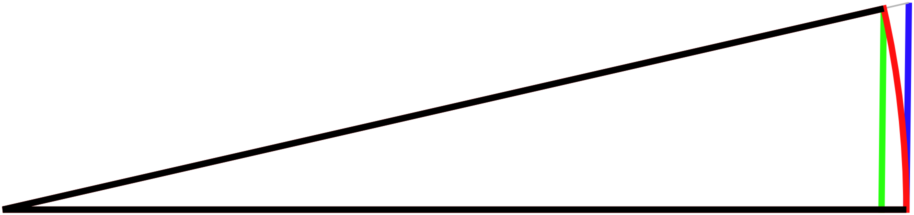
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)) = c$ für $c = \pm\infty$ heißt:
  Wenn $\lim_{n\to\infty}(a_n) = x_0$ mit $a_n \in A$, dann $\lim_{n\to\infty}(f(a_n)) = c$.
- Angenommen A ist nicht nach oben beschränkt. Dann schreiben wir (für $c \in \mathbb{R}$ oder $c = \pm\infty$) $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$, wenn gilt:
  Wenn $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$ mit $a_n \in A$, dann $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = c$.
- Analog für $\lim_{x\to-\infty}$, falls A nicht nach unten beschränkt ist.

Beispiele:

- $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$, $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.
- Es gibt keinen (nicht einmal einen uneigentlichen) Limes $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.
- Aber für $g = \frac{1}{x} \restriction \mathbb{R}^{>0}$ ist $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ ("rechtsseitiger Limes"), analog $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} \restriction \mathbb{R}^{<0}) = -\infty$ ("linksseitiger").

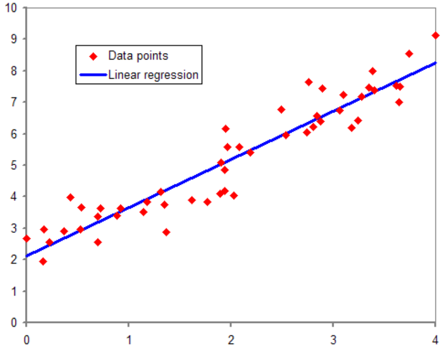
Ein klassisches Beispiel

- Sei $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Der natürliche Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Man kann zeigen: $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. (Beweis später.) Gut zu wissen: Für kleine x gilt $\sin(x) \sim x$ (und, weniger wichtig, $\sim \tan(x)$).



- Wenn man also die Definition erweitert auf $f(0) := 1$, dann erhält man ein stetiges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Messdaten



Ist diese Funktion “stetig”?

- Messdaten sind diskret (endlich viele Punkte).
  Sinnlos nach Stetigkeit zu fragen.
- Wir interpretieren die Daten in einem Modell.
  Hier: lineare Regression
  Viele (nicht alle) dieser Modelle operieren mit stetigen Funktionen.

- Die meisten Funktionen denen Sie je begegnen werden sind “stückweise stetig”: $f : A \to \mathbb{R}$ mit
  A eine Vereinigung $I_1 \cup \cdots \cup I_n$ von Intervallen,
  so dass $f \restriction I_n$ stetig ist für jedes I_n.
  Bsp: Vorzeichenfunktion, Sägezahn- und Rechteckschwingung, ...

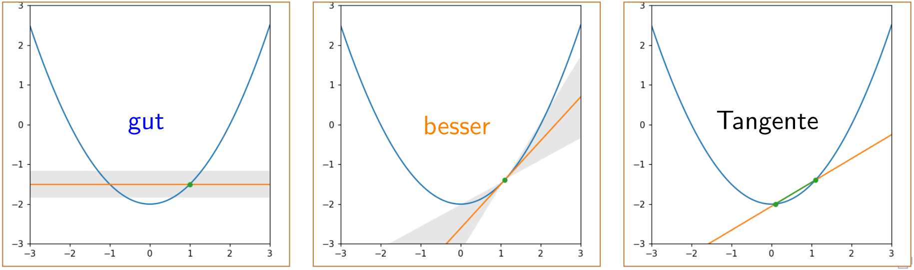
Differenzialrechnung

Ableitung als affine Approximation

- Stetig heißt: $f(x)$ ist nahe x_0 gut durch eine konstante Funktion $g(x) = b$ approximierbar. (Dann muss $b = f(x_0)$ sein.) Schlampig: $f(x) \sim f(x_0)$.
- Gut heißt: $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x)\, d(x, x_0) < \delta \to d(f(x), g(x)) < \varepsilon$.
- Differenzierbar: $f(x)$ ist nahe bei x_0 "noch besser" durch eine affine Funktion $g(x) = a(x - x_0) + b$ approximierbar.

  (Dabei wird a $f'(x_0)$ genannt, und b muss wieder $f(x_0)$ sein).

  Schlampig: $\boxed{f(x_0 + \Delta) \sim f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta}$.
- Besser: $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x)\, d(x, x_0) < \delta \to d(f(x), g(x)) \leq \varepsilon \cdot d(x, x_0)$.



Definition der Ableitung für reelle Funktionen

Äquivalent zur vorigen Definition ist die "Steigung der Tangente" (d.h.: Limes der Steigungen der Sekanten):
Um notationelle Unschönheiten zu vermeiden, sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall das nicht nur aus einem Punkt besteht, oder eine Vereinigung solcher Intervalle.

Definition

- $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. Dann ist f in x_0 differenzierbar, wenn $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. Den Limes nennt man $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$.
- Dadurch wird eine neue Funktion $f' : A \to \mathbb{R}$ definiert, wobei $A \subseteq I$ die Menge der Punkte ist an denen f differenzierbar ist.
- $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, wenn f für alle $x_0 \in I$ differenzierbar ist. In dem Fall ist $f' : I \to \mathbb{R}$.

Äquivalenz

Differenzierbar ist äquivalent zu "besser affin approximierbar":

Theorem

1. *Angenommen $f'(x_0)$ existiert. Setze $g(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$. Dann gilt:*
   $(*)$ $\quad (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in I)\, |x - x_0| < \delta \rightarrow$
   $$|g(x) - f(x)| \leq |x - x_0| \cdot \varepsilon.$$
2. *Wenn es ein affines $g = a \cdot x + b$ gibt das $(*)$ erfüllt, dann existiert $f'(x_0)$ und ist gleich a.*

Beweis: (1)
$\lim_{y \to x_0} \frac{g(y)-f(y)}{y-x_0} = \lim_{y \to x_0} \frac{f(x_0)-f(y)}{y-x_0} + f'(x_0) = -f'(x_0) + f'(x_0) = 0$
D.h., wenn $\lim_{n \to \infty} y_n = x_0$, dann $\lim_{n \to \infty} \frac{g(y_n)-f(y_n)}{y_n-x_0} = 0$.
Angenommen $(*)$ gilt nicht. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ so dass es für alle $\delta > 0$ ein Gegenbeispiel x_δ gibt. Sei $y_n = x_{\frac{1}{n}}$.
D.h. $|y_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|g(y_n) - f(y_n)| > |y_n - x_0| \cdot \varepsilon$. Widerspruch. $\square$

Beweis (Forts.)

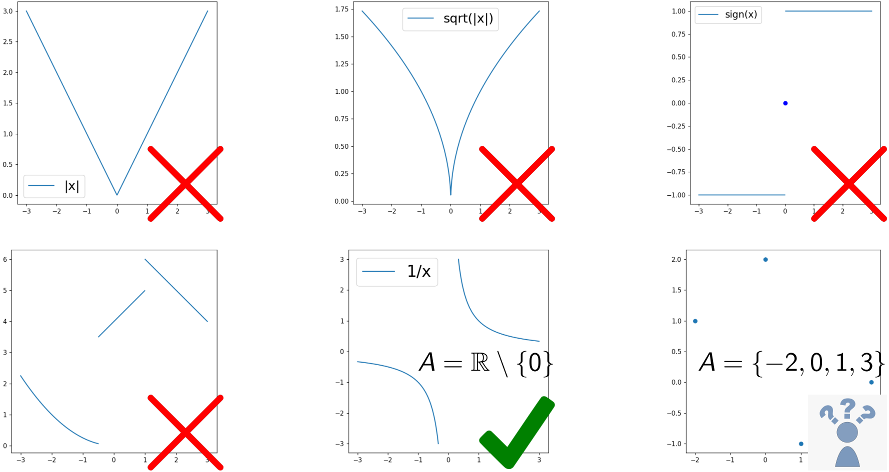
(2) Wir setzen voraus: Es gibt ein affines $g = a \cdot x + b$ so dass
$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in I)\,|x - x_0| < \delta \to |g(x) - f(x)| \leq |x - x_0| \cdot \varepsilon$,
und wollen zeigen dass $f'(x_0) = a$.

Es gilt dann: $|g(x_0) - f(x_0)| = 0$, d.h. $g(x_0) = ax_0 + b = f(x_0)$, d.h.
$b = f(x_0) - ax_0$, d.h. $g(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$.

Und es gilt
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x) + a(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} + a = a.$

Beispiele

Beispiele: $f : A \to \mathbb{R}$ (mit "natürlichem" A.) Ist f (auf ganz A) differenzierbar?



Ableitungsregeln

Differenzieren ist einfach!

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$; und $(a \cdot f)'(x) = a \cdot f'(x)$ für $a \in \mathbb{R}$.
- Produktregel: $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
  Warum?
  $(f \cdot g)(x+\delta) = f(x+\delta) \cdot g(x+\delta) \sim (f(x) + \delta f'(x)) \cdot (g(x) + \delta g'(x)) =$
  $f(x)g(x) + \delta(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) + \delta^2 f'(x)g'(x)$,
  und wir können $\delta^2 \ll \delta$ vernachlässigen.
- Kettenregel: $(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)$.
  Warum? $(g \circ f)(x+\delta) = g(f(x+\delta)) \sim g(f(x) + \delta f'(x)) \sim$
  $g(f(x)) + \delta f'(x) g'(f(x))$.
- Quotientenregel: $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$.
  Warum?
  $(f\frac{1}{g})'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)(\frac{1}{g})'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)(-1)\frac{1}{g^2(x)}g'(x)$.
- Wenn g Inverse von f ist, dann $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$; bzw $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$.
  Warum? $x = g(f(x))$, d.h. $x' = 1 = (g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)$.

Ableitung von x^r

- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2 + \dots + y^n$.
  Dabei ist $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, genannt Binomialkoeffizient.
- Damit sieht man: $(x+\delta)^n = x^n + nx^{n-1}\delta + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\delta^2 + \dots$,
  wobei wir δ^n vernachlässigen können für $n \geq 2$.
  D.h., $(x+\delta)^n \sim x^n + nx^{n-1} \cdot \delta$, d.h. $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$
- Man zeit weiters (für n, m in $\mathbb{N}$) (Übung):
  $\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$. Damit: $\frac{dx^{\frac{n}{m}}}{dx} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$.
  Und: Wenn $\frac{dx^r}{dx} = rx^{r-1}$ dann $\frac{dx^{-r}}{dx} = -rx^{-r-1}$.
  D.h. $\frac{dx^r}{dx} = rx^{r-1}$ für alle $r \in \mathbb{Q}$.
- Beachte die Definitionsbereiche. Bsp:
  $x^{\frac{1}{3}}$ überall definiert, Ableitung ist $x^{-\frac{2}{3}}$, nur auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert.
- Für allgemeine $r \in \mathbb{R}$ ist x^r durch rationale Approximationen definiert, damit zeigt man:
  $\frac{dx^r}{dx} = rx^{r-1}$ für $r \in \mathbb{R}$ und $x > 0$.

Mehr elementare Funktionen

- Für ein Polynom $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ ist $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} \cdots + a_1$ (für alle $x \in \mathbb{R}$).
- Wir definieren $e := \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.
  D.h. für große n ist $e \sim (1 + \frac{1}{n})^n$, d.h. $e^{\frac{1}{n}} \sim 1 + \frac{1}{n}$. In anderen Worten: $e^\delta \sim 1 + \delta$ (für kleine δ).

  Damit bekommen wir $e^{x+\delta} = e^x \cdot e^\delta \sim e^x(1+\delta) = e^x + e^x \cdot \delta$, d.h.: $(e^x)' = e^x$.
  (Ein wesentlicher Grund warum e von so zentraler Bedeutung ist.)
- Daher: $(a^x)' = (e^{x\ln(a)})' = \ln(a) e^{x\ln(a)} = \ln(a) \cdot a^x$ (für $a > 0$).
- Daher auch: $\ln'(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$ (für $x > 0$).
- $\sin'(x) = \cos(x)$, und $\cos'(x) = -\sin(x)$ (mehr dazu später).

Bedeutung der Ableitung

- f' hat enorme konzeptuelle Bedeutung als Änderungsrate von f.

  Beispiel: Sei $f(t)$ die Position in Abhängigkeit von Zeit t.
  Dann ist $v(t) := f'(t)$ die Geschwindigkeit.
  Analog ist $v'(t) = f''(t)$ die Beschleunigung (Änderungsrate von v).
  Die meisten fundamentalen Gleichungen der Physik sind Differenzialgleichungen (zB Schrödinger- und Maxwell- und Einsteinsche Feldgleichungen)
- f' hat enorme Bedeutung als (erste, einfachste) Approximation:
  $f(x + \delta) \sim f(x) + \delta \cdot f'(x)$.

  Viele komplizierte Probleme lassen sich in dieser "ersten Näherung" behandeln, mit immer noch nützlichen Resultaten.
- Ableitung ist in der Mathematik enorm nützlich:
  Klassisches Beispiel: Extremwerte.

Extremwerte

Definition

Sei $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. x_0 ist lokales Maximum, wenn
$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall x \in B_\varepsilon(x_0) \cap A)\, f(x) \leq f(x_0)$.
Analog für Minimum.

Theorem

Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, und $x_0 \in (a, b)$ lokales Maximum oder Minimum ist, dann $f'(x_0) = 0$.

Beweis (für Minimum): $f(x) \geq f(x_0)$, d.h. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist ≥ 0 für $x > x_0$ und ist ≤ 0 für $x < x_0$. Für jede Folge y_n die von rechts kommend gegen x_0 konvergiert gilt also $f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0} \geq 0$; von links kommend bekommen wir $f'(x_0) \leq 0$. $\square$

Bemerkungen

- Das gilt nicht für $x = a$ oder $x = b$: Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$. Dann ist 0 das (sogar globale) Minimum und 1 das Maximum, aber die Ableitung ist überall 1.
- Die Umkehrung gilt nicht: $f'(x) = 0$ impliziert nicht dass x lokales Minimum oder Maximum ist.
  Bsp: x^3 ist streng monoton (und hat daher gar keine lokalen Minima oder Maxima), $\frac{dx^3}{dx}(0) = 0$.
- Immer wieder nützlich, zB für Ungleichungen: Will man zeigen $f(x) < g(x)$ für alle $x \geq 0$, d.h. $h(x) := g(x) - f(x) > 0$, dann reicht es zu zeigen: $h(0) > 0$, und $h(x) > 0$ für unbeschränkt viele x, und $h(x) > 0$ für alle x mit $h'(x) = 0$.

Mittelwertsatz

Theorem

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *differenzierbar. Dann gibt es ein* $x \in (a, b)$ *mit* $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Beweis: $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Es gilt $F(a) = F(b) = f(a)$ und $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Wir suchen ein x mit $F'(x) = 0$, dann ist $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ wie verlangt.

Weil F stetig ist, ist $F''[a, b] = [c, d]$ mit $c \leq d$ in $\mathbb{R}$.

Fall 1: $c = d$. Dann ist F konstant, und $F'(x) = 0$ für jedes $x \in [a, b]$.
Fall 2: $c < d$. Dann ist entweder c oder d ungleich $f(a) = F(a) = F(b)$.
Angenommen $d \neq f(a)$. Dann ist das Maximum $d = F(y)$ für ein $y \in (a, b)$, und $0 = F'(y) = 0$. Analog für $c \neq f(a)$ und Minimum. □

Mittelwertsatz

Theorem (Mittelwertsatz)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gibt es ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Sei f ausreichend differenzierbar. Dann wissen wir:
Lokal (d.h. für $\delta \sim 0$) gilt: $f(x+\delta) \sim f(x) + \delta f'(x)$.

Global ($\delta \gg 0$) und exakt gilt:

$$f(x+\delta) = f(x) + \delta f'(x') \text{ für ein } x' < \delta.$$

(Verwende den Mittelwertsatz für $a = x$, $b = x + \delta$, $x = x'$.)

(Später werden wir etwas ähnliches bei Taylor-Reihen sehen.)

Anwendung des Mittelwertsatzes: Monotonie

Theorem

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

- *f ist monoton wachsend gdw $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$.*
- *Wenn sogar $f'(x) > 0$, dann ist f streng monoton wachsend.*
- *Analog für fallend.*

Beweis: Für $x < y$ in (a, b) gibt es $z \in (x, y)$ mit $f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$.
Angenommen f ist nicht streng monoton wachsend, dann gibt es $x < y$ mit $f(x) \geq f(y)$; daher ist $f'(z) \leq 0$.
Analog: Wenn f nicht monoton wachsend ist, dann $f(x) > f(y)$ und $f'(z) < 0$.
Wenn aber $f'(z) < 0$, dann gibt es Umgebung in der $f(x) > f(y)$ für all $x < z < y$. □

Die Umkehrung gilt nicht für streng monoton.
Bsp: x^3 ist streng monoton, aber $\frac{dx^3}{dx}(0) = 0$.

Anwendung des Mittelwertsatzes: De l'Hopital

Theorem (Ohne Beweis)

Wir setzen voraus: $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$; $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *existiert; und* $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$ *ist entweder* 0 *oder* $+\infty$ *oder* $-\infty$.
Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die Voraussetzung $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \in \{0, \infty, -\infty\}$ ist nötig!
Bsp: Für $x_0 = 1$, $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ ist $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, aber $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}$.

“Beweis” für $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und f, g stetig diffbar bei x_0:
$\frac{f(x_0+\delta)}{g(x_0+\delta)} \sim \frac{f(x_0)+\delta f'(x_0)}{g(x_0)+\delta g'(x_0)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Bsp: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$.

Exkurs: Differentation und echte Daten

- Symbolisches Differenzieren ist leicht.
- $f'(x)$ für $x \sim x_0$ gut approximierbar durch

$$(*) \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- $f(x)$ in der Praxis oft Messdaten: diskret, verrauscht.
- Direkt $(*)$ zu verwenden wäre sinnlos, konvergiert zu keinem sinnvollen Wert wenn $x \to x_0$.
- Wie üblich: Auf Grundlage eines Modells (oder "universell", zB mit splines) Funktion fitten; dann diese Funktion ableiten.

Mehrere Variablen: Partielle Differentiale

- Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $1 \leq i \leq n$.
- Wir können den Wert für alle x_j mit $j \neq i$ festhalten (d.h., als Konstanten behandeln), und erhalten eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(y) = g(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.
- Wir bezeichnen $h'(x_i)$ als $\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x})$.
- Beispiel: Sei $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2) + (x_2)^2$ und $\vec{x} = (0, 1)$.
  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \cos(x_1 x_2), \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{x} = 1 \cdot \cos(0 \cdot 1) = 1$
  $\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \cos(x_1 x_2) + 2x_2, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}\vec{x} = 0 \cdot \cos(0 \cdot 1) + 2 \cdot 1 = 2.$

Mehrere Variablen: Die Ableitung

Betrachten wir $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}) \ldots, f_m(\vec{x}))$.

- Eine lineare Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ entspricht einer $m \times n$ Matrix A:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \quad z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$
- Die Ableitung von f bei $\vec{x}$ ist eine affine Approximation $g(\vec{y}) = f(\vec{x}) + A \cdot (\vec{y} - \vec{x})$, wobei A so eine Matrix ist.
- Damit die Ableitung existiert, muss die Ableitung "besser" sein entsprechend der Definition:
$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists \delta > 0)\, d(\vec{y}, \vec{x}) < \delta \to d(f(\vec{y}), g(\vec{y})) < \varepsilon \cdot d(\vec{y}, \vec{x})$$
- (Ohne Beweis!) Wenn die Ableitung von f existiert, dann gilt : $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x})$.

Mehrere Variablen: Beispiel

- Dasselbe Beispiel wie zuvor: $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2) + (x_2)^2$ und $\vec{x} = (0, 1)$, d.h.: $\frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{x} = 1$; $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2$ und $f(\vec{x}) = 1$.
  Für den Punkt $\vec{x}$ ist die affine Approximation $g(\vec{y})$ also:

$$g(\vec{y}) = f(\vec{x}) + A(\vec{y} - \vec{x}) = 1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 - 0 \\ y_2 - 1 \end{pmatrix} = y_1 + 2y_2 - 1$$

- Hier (d.h. im Fall $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$) entspricht die Ableitung einer "Tangentialebene".
  (Vgl: affine Approximation im 1-dim entspricht Gerade/Tangente.)
  Dabei gibt es viele Aspekte die im Eindimensionalen nicht auftreten.
  Es gibt z.B. (für nicht-konstante Ebenen) eine Richtung in die Ebene/Funktion am schnellsten steigt ("Gradient") etc.

Mehrere Variablen: Bemerkung

Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ an $\vec{x}$ differenzierbar ist, dann können wir also schreiben:

$$f(\vec{y}) \sim g(\vec{y}) = f(\vec{x}) + A(\vec{x}) \cdot (\vec{y} - \vec{x})$$

mit einer linearen Funktion/Matrix $A(\vec{x})$.
(Wir schreiben jetzt $A(\vec{x})$ um zu verdeutlichen dass die Matrix A von $\vec{x}$ abhängt, genauso wie $f'(x)$ i.A. von x abhängt.)

Sei A die Menge der $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ an denen f differenzierbar ist. Die Ableitung "als Funktion" Df mit Definitionsbereich A bildet nun also ein $\vec{x} \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ auf eine lineare Abbildung $A(\vec{x})$ ab, d.h. auf ein Element von $\mathbb{R}^{m \times n}$!

Das deutet an dass bereits die zweite Ableitung im mehrdimensionalen komplizierter ausfallen wird als im Eindimensionalen (Krümmungstensor etc).

Höhere Ableitungen: Notation

- Sei $f : A_0 \to \mathbb{R}$, und $A_1 \subseteq A_0$ die Menge der x an denen f differenzierbar ist.
  Wir bekommen dann $f' : A_1 \to \mathbb{R}$.
  Sei $A_2 \subseteq A_1$ die Menge der x an denen f' differenzierbar ist.
  Das definiert $(f')' : A_2 \to \mathbb{R}$.
- Statt $(f')'$ schreibt man f'' oder $\frac{d^2 f}{dx^2}$, genannt "zweite Ableitung", und für $x \in A_2$ sagt man "f ist zweifach differenzierbar bei x."
- Analog: Statt $(f'')'$ schreibt man f''', genannt "dritte Ableitung", die k-te Ableitung bezeichnet man mit $f^{(k)}$. Wir setzen auch $f^{(0)} := f$.
- Wenn f (bei x) k-mal differenzierbar ist für alle $k \in \mathbb{N}$, dann heißt f unendlich oft differenzierbar.

Zweite Ableitung als Krümmung

Wenn f differenzierbar, dann ist $f'(x)$ die Steigung der Tangente in x.
Wenn f' differenzierbar, dann ist $f''(x)$ die Änderung der Steigung, d.h., die Krümmung der Kurve, im Punkt x.

Definition

Eine Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ heißt konkav, wenn für alle $x < y < z$ in (a, b) der Wert $f(z)$ über der Strecke zwischen $(x, f(x))$ und $(y, f(x))$ liegt, d.h., wenn $f(y) \geq f(x) + (y - x)\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$.
Wenn sogar $>$ gilt statt $\geq$ heißt f strikt konkav.
Analog für [strikt] konvex, wenn $\leq$ [bzw $<$] gilt.

Theorem (Ohne Beweis)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f [strikt] konkav genau dann wenn f' [streng] monoton fallend ist. Analog für konvex und steigend.

Insbesondere: Wenn $f'' > 0$ auf $[a, b]$, dann ist f konvex, etc.

Kurvendiskussion

Ableitung und zweite Ableitung erlaubt es in vielen Fällen, diverse Eigenschaften einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zu bestimmen, z.B.:

- $f'(x) = 0$ ist notwendige Bedingung für "x lokales Extremum,"
- $f' \geq 0$ gdw f monoton steigend,
- $f' > 0$ ist hinreichende Bedingung für "f streng monoton steigend,"
- $f'' > 0$ ist hinreichende Bedingung für "f konvex", etc

Wir erwähnen ein weiteres klassisches hinreichendes Kriterium:

- Wenn $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$, dann ist x ein lokales Maximum. (Und für $f''(x) > 0$ ein lokales Minimum).

Zweite Ableitung als quadratische Approximationen

- f ist stetig heißt:
  f ist durch konstante Funktion (=Polynom von Grad 0) "gut" approximierbar. (Gut entspricht $\dots < \varepsilon$.)
- f ist differenzierbar heißt:
  f ist durch affine Funktion (=Polynom von Grad 1) "besser" approximierbar. (Besser entspricht $\dots < \varepsilon \cdot |x - x_0|$.)
- Wir wollen nun f durch ein Polynom g von Grad 2, d.h. quadratisch, "noch besser" approximieren, entsprechend $\dots < \varepsilon \cdot |x - x_0|^2$.
  $f(x) \sim g(x) := a(x - x_0)^2 + b(x - x_0) + c$
- Es stellt sich heraus das dafür kein neues Konzept nötig ist, sondern dass wir dafür die zweite Ableitung verwenden können.
- Was ist die natürliche Wahl der Koeffizienten a, b, c? Wir wollen:
  (Wie in konstanter Approx.) $g(x_0) = f(x_0) \Rightarrow c = f(x_0)$
  (Wie in affiner Approx.) $g'(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow b = f'(x_0)$
  (Neu) $g''(x_0) = f''(x_0)$. Achtung: $g''(x_0) = 2a$, d.h. $\Rightarrow a = \frac{f''(x_0)}{2}$.

Ableitung von Polynomen

- Noch ein Beispiel: Grad 3.

$$\begin{array}{rl} f(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d & \Rightarrow f(0) = d = 0!d \\ f'(x) = a\cdot 3\cdot x^2 + b\cdot 2\cdot x + c & \Rightarrow f'(0) = c = 1!c \\ f''(x) = a\cdot 3\cdot 2\cdot x + b\cdot 2 & \Rightarrow f''(0) = 2b = 2!b \\ f'''(x) = a\cdot 3\cdot 2 & \Rightarrow f'''(0) = 2\cdot 3a = 3!a \end{array}$$

- Allgemein: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^n + \dots a_1 x + a_0$.
  Dann ist $f^{(k)}(0) = 1\cdot 2\cdots k\cdot a_k = k!a_k$ (für alle $0 \le k \le n$).
  (Insbes.: $f^{(0)}(0) = f(0) = a_0 = 0!a_0$, Daher gilt: $f^{(1)}(0) = a_1 = 1!a_1$)
  und $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.
- Dementsprechend ist die natürliche n-te Approximation zu einer n-mal differentierbaren Funktion $f(x)$: $g(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

Taylor-Reihen

Wie gut ist die Approximation? Schreibe $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$. Die Approximation ist gut wenn $|R_n(x)|$ klein ist.

Theorem (Satz von Taylor, ohne Beweis)

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$, wobei $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} x^{n+1}$ für ein $\zeta \in [0, x]$

Den Fall $n = 0$ kennen wir schon aus dem Mittelwertsatz: $f(x) = f(0) + xf'(\zeta)$ für ein $\zeta \in [0, x]$.

Definition

Die Taylor-Reihe von f ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Ein Beispiel

- Betrachte $f(x) = \sin(x)$.
- Es gilt $|f^{(k)}(x)| \leq 1$ für alle k, x. Daher ist $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$
- $n!$ wächst schneller als m^n für jedes fixe $m \in \mathbb{N}$:
  $$\begin{array}{r|l|l|l} m^n = & m \cdot m \cdots m & \cdot \quad m \quad \cdots \quad m & \cdot \quad m \quad \cdots m \\ n! = & 1 \cdot 2 \cdots m & \cdot (m+1) \cdots 2m & \cdot (2m+1) \cdots n \end{array}$$
  D.h. $\frac{n!}{m^n} > \frac{1}{m^m} \cdot 2^{n-2m} = 2^{n-2m-m \ln m}$. (Besser: $> (\frac{n}{me})^n$)
- D.h. für jedes x gilt $\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$.
- Für jedes x konvergiert also $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ gegen $\sin(x)$.
- Die Ableitungen von sin sind $\sin, \cos, -\sin, -\cos, \sin, \dots$; für $\sin^{(k)}(0)$ bekommen wir $0, 1, 0, -1, \dots$. D.h.
  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \pm \cdots$

Potenzreihen

Definition

Eine Potenzreihe ist eine unendliche Reihe der Form $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Genauer: Für jedes fixe x ergibt diese Darstellung eine unendliche Reihe, die konvergieren kann oder auch nicht.
Wenn sie konvergiert, dann ist $g(x)$ definiert, sonst nicht.
$g(0)$ existiert immer, und $g(0) = a_0$.

Theorem (Ohne Beweis)

Es gibt ein $0 \leq R \leq \infty$ (Konvergenzradius) mit:
$|x| < R \Rightarrow g(x)$ *existiert (Reihe konvergiert sogar absolut)*
$|x| > R \Rightarrow g(x)$ *existiert nicht*
(Für $|x| = R$ sagen wir nichts.)

Beispiele

- $a_n = n!$. Dann ist $g(x)$ für kein $x \neq 0$ definiert.
(Weil ja $n! \gg x^n$ für jedes x, d.h., $n!x^n$ ist keine Nullfolge, daher kann die Reihe nicht konvergieren.)
Dementsprechend ist $R = 0$.
- $a_n = 1$. Dann haben wir die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, die konvergiert genau dann wenn $|x| < 1$ (und liefert $\frac{1}{1-x}$).
Dementsprechend ist $R = 1$.
- $a_n = \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}$. Wie wir vorher aus dem Satz von Taylor gesehen haben konvergiert $g(x)$ für alle x, und zwar gegen $\sin(x)$.
Dementsprechend ist $R = \infty$.

Entwicklung um andere Mittelpunkte

Bis jetzt haben wir Potenzreihen und Taylor-Reihen "um 0" betrachtet. Wir können dasselbe "um x_0" tun.

- Eine Potenzreihe um x_0 hat die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$.
  Es gilt: Es gibt $0 \leq R < \infty$ s.d. absolut konvergent für $|x - x_0| < R$ und divergent für $|x - x_0| > R$.
- Die Tylor Reihe von f um x_0 ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$

Taylor-Reihen

- Wenn f bei 0 unendlich oft differenzierbar ist, dann definiert f die Potenzreihe $g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, genannt Taylor Reihe.
- Fragen:
  - Was ist der Konvergenzradius R von g?
  - Gilt $g(x) = f(x)$ für alle $|x - x_0| < R$?
- Antwort, für alle anständigen Funktionen f:
  - R ist so groß wie nur irgendwie möglich.
  - Ja, $g(x) = f(x)$
- Was heißt "anständig"? Das beantwortet erst die komplexe Analysis. In der Praxis sind alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen die Ihnen je begegnen werden anständig.

Eine unanständige Funktion

(Kein Prüfungsstoff)
Eine unanständige (bei 0) Funktion wäre z.B.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{wenn } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir bekommen $f^{(n)}(0) = 0$ für alle n, daher ist $g(x) = 0$ und $R = \infty$.
Aber $g(x) \neq f(x)$ für alle $x \neq 0$.

Warum kann das passieren? Im reellen sieht es so aus als ob wir $f(x)$ bei 0 stetig (und sogar diffbar) definieren können, im komplexen geht das aber nicht.

Um $x_0 \neq 0$ funktioniert die Taylorreihe bestens, mit $R = |x_0|$.

Potenzreihen: Ableitung, Eindeutigkeit

Eine Potenzreihe "um x_0" ist eine unendliche Reihe der Form
$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$.
Zur Erinnerung: Es gibt dann ein $0 \leq R \leq \infty$ (Konvergenzradius) s.d. für
$I := (x_0 - R, x_0 + R)$:
Wenn $x \in I$, dann konvergiert $g(x)$ (sogar absolut);
und wenn $|x - x_0| > R$ dann konvergiert/existiert $g(x)$ nicht.

Theorem (Ohne Bew.)

Angenommen $R > 0$. Dann ist $g(x) : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, und $a_n = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Bemerkung: Das impliziert: Wenn es ein $r > 0$ gibt so dass für alle x mit
$|x - x_0| < r$ gilt: $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ ist definiert und gleich
$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$; dann ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bew.: $f = g$, daher $f^{(n)} = g^{(n)}$, daher $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} = b_n$. □

Taylorreihen

Sei nun $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, x_0 in (a, b).
Beachte: I.A. existiert $\lim_{x \to a} f(x)$ nicht.
(Beispiele für solche $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$: $\frac{1}{x}$, oder $\sin(\frac{1}{x})$, etc.)

Definition

Die Taylorreihe von f um x_0 ist $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Wir können (siehe Bsp) i.A. nicht hoffen dass $g(a)$ gegen $f(a)$ konvergiert.
I.A. können wir nur auf sinnvolle Konvergenz für $a < x < b$ hoffen, d.h., nur auf Konvergenzradius $R^* := \min(|a - x_0|, |b - x_0|)$.

Informelles Theorem

Alle "anständigen" (richtig: "analytischen") Funktionen f erfüllen:

- Der Konvergenzradius R von g ist "maximal", d.h. $\geq R^*$.
- Für $|x - x_0| < R$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Bemerkung: "Analytisch" wird über komplexe Differenzierbarkeit definiert.

Arithmetik der Taylorreihen/Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$, beide mit Konvergenzradius $\geq R$ (wobei $R > 0$).
Dann gilt (und die folgenden Potenzreihen haben Konvergenzradius $\geq R$):

- f ist auf $(x_0 - R, x_0 + R)$ differenzierbar, und $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x - x_0)^{n-1}$.
- $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(x - x_0)^n$.
- $f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$ mit $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (Cauchy-Produkt).

Taylorreihen/Potenzreihen: Beispiele

- Für $f(x) = e^x$ ist $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Wir bekommen also:

  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Konvergenzradius ∞.

  Das ist eine wichtige Darstellung,
  und dient als Definition für andere Begriffe der Exponentiation.
  Z.B. e^A für eine lineare Abbildung (Matrix) A, etc.
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
- Im Komplexen ergibt das $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$
  (und insbesondere das beliebte $e^{i\pi} = -1$).

Taylorreihen/Potenzreihen: Beispiele (Forts.)

- (Geometrischer Reihe)
  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
  Konvergenzradius 1, d.h. Konvergenz für $|x| < 1$ bzw $x \in (-1, 1)$.
- Wenn wir $-x$ schreiben statt x:
  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \cdots \sum (-1)^n x^n$. Konvergenzradius wieder 1.
- Äquivalent, mit $y := 1 + x$, d.h. $x = y - 1$, bekommen wir die Taylorreihe um $y_0 = 1$:
  $\frac{1}{y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (y-1)^n$.
  Der Konvergenzradius (um $y_0 = 1$) ist natürlich wiederum 1, d.h. Konvergenz für $|y - 1| < 1$, d.h. für $y \in (0, 2)$.
- $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Konvergenzradius 1.

  Äquivalent: $\ln(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (y-1)^n$, der Konvergenzradius (diemal um 1) ist wiederum 1.

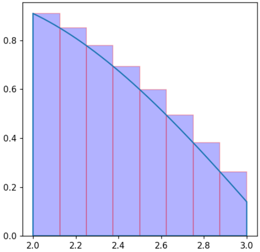
Integralrechnung

Vorschau: Integration als Umkehrung der Ableitung

- Die Ableitung, d.h. das Bilden von $f'(x)$ aus $f(x)$, ist von fundamentaler Bedeutung in zahllosen Anwendungen.
- Klassisches Beispiel: Sei $s(t)$ Ort/Position in Abhängigkeit von der Zeit t. Dann ist $v(t) := \frac{ds}{dt}(t)$ die Geschwindigkeit zur Zeit t.
- Die Umkehrung dieser Operation ist natürlich ebenfalls konzeptionell wichtig und enorm nützlich: Gegeben $f(x)$, wir suchen ein $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$. So ein F heißt "Stammfunktion" oder "(unbestimmtes) Integral" von f, geschrieben $F(x) = \int f(x)dx$
- In unserem Beispiel: Angenommen $v(t)$ ist gegeben. D.h. wir wissen zB wie schnell ein Auto zu jedem Zeitpunkt fährt. Wo befindet es sich zum Zeitpunkt t?
- Gesucht ist also $s(t)$ mit $s'(t) = v(t)$, d.h. eine Stammfunktion von v.

Vorschau: Integral als Fläche

- Das Integral hat noch eine andere Bedeutung/Intuition, als "infinitesimales Summen-Produkt".
  In dieser Form heißt es "bestimmtes Integral".
- Besonders anschaulich als "Fläche unter einer Kurve":
  Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$.
  Wie können wir die Fläche, begrenzt durch a, b, 0 und $f(x)$ berechnen (oder erst mal überhaupt definieren)?



- Approximation durch Rechtecke.
- Mehr Rechtecke $\to$ genauer. Sei $A(n)$ die Approximation durch n Rechtecke.
- Dann: $\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} A(n)$ ist die Fläche.

  (Dimensionen: $f(x)$ und dx sind Längen.

  Ergebnis ist Länge x Länge = Fläche.)

Vorschau: Integration als “Summenprodukt”

Dieses Konzept des “infinitesimales Summen-Produkts” ist viel allgemeiner anwendbar als nur auch Flächen. Wieder das Beispiel Geschwindigkeit:

- Wenn sich ein Auto, beginnend zur Zeit $t = 0$, eine h lang mit 10 km/h bewegt, und danach 2h mit 20 km/h, dann hat es offenbar zum Endzeitpunkt $t = 3$ (in Stunden) folgenden Weg zurückgelegt: $1\mathrm{h} \cdot 10\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 2\mathrm{h} \cdot 20\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 50\mathrm{km}$.
- Wenn man die Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = b$ öfter misst, beginnend bei Zeit $t = 0$, in b/δ vielen (kleinen) Zeitspannen δ, dann bekommt man die “genauere” Rechnung $s(b) = \sum_{n=0}^{b/\delta} v(n \cdot \delta) \cdot \delta$.
  (v hat die Dimension Weg/Zeit, und δ Zeit, das Produkt also Weg. b/δ ist dimensionslos (Zeit/Zeit).)
- Im Übergang zu infinitesimalen δ bekommt man wieder das “infinitesimale Summen-Produkt” $s(b) = \int_0^b v(t)dt$.

Zusammenhang unbestimmtes und bestimmtes Integral

- Es gilt $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^d f(t)dt$.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Schreibe $F(x)$ für $\int_a^x f(t)dt$, für $x \in (a, b)$.
- $F(x + \delta)$ ist dann $F(x) + \int_x^{x+\delta} f(t)dt$.
- Für ausreichend kleine δ (und stetiges f) ist $\int_x^{x+\delta} f(t)dt \sim f(x)\delta$.
- Es ist also $F(x + \delta) \sim F(x) + f(x) \cdot \delta$.
- Das heißt nichts anderes also: $F'(x) = f(x)$, d.h. F ist Stammfunktion (unbestimmtes Integral) von f.

Unbestimmtes Integral: Definition

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Definition

$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist das (oder: ein) unbestimmte Integral von f, auch: Stammfunktion, wenn $F'(x) = f(x)$ für $x \in [a, b]$.

- Es gilt: F ist eindeutige bis auf eine additive Konstante.
  Beweis: Seien F, G Integrale von f sind. Dann ist $(F - G)' = f' - f' = 0$. Nach dem Mittelwertsatz ist $F - G$ daher konstant c, d.h. $F(x) = G(x) + c$. □
- Ein Integral ist (nach Definition) differenzierbar, insbesondere stetig.
- Im Allgemeinen muss ein f keine Stammfunktion haben. Ein Beispiel dafür: $\mathrm{sign}(x)$ (gibt Problem bei 0).
- Wenn f ein Integral hat, muss es nicht stetig sein. Es gilt aber:

Theorem (Ohne Beweis)

Wenn $f(x)$ stetig ist, dann hat f ein Integral.

Konkrete Integrale

- $\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$, für $r \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$ für $x > 0$.
  (Allgemeiner: $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|)$ für $x \neq 0$.)
- $\int e^x dx = e^x$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x)$
- $\int \cos(x) dx = -\sin(x)$
- $\int \operatorname{sign}(x) dx$ gibt es nicht; 0 ist das Problem.
  Natürlich ist $f := \operatorname{sign}(x) \restriction (-\infty, 0) = -1$, d.h. $\int f = -x$;
  und $g := \operatorname{sign}(x) \restriction (0, \infty) = 1$, d.h. $\int f = x$.

Integrale: Arithmetik

- $\int(f+g) = (\int f) + (\int g)$.
  (Wichtig.) In Interpretation als Summe trivial.
  In Interpretation als Fläche "Prinzip von Cavalieri".
- $\int r \cdot f(x)dx = r \cdot \int f(x)dx$ für $r \in \mathbb{R}$.
- Genau wie bei der Summe ist $\int(f \cdot g)$ i.A. NICHT $(\int f) \cdot (\int g)$.
  Bsp: $f(x) = g(x) = f(x)g(x) = 1$. Dann $\int f = \int g = \int(fg) = x + c$ aber $(\int f)(\int g) = x^2 + c$.
- Bemerkung: Es gilt: $(F \cdot G)' = F'G + G'F$, d.h.
  $\int(FG') = FG - \int(G'F)$ ("Partielles Integrieren")
- Bemerkung: Es gilt: $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$, wenn $F = \int f(x)dx$ ("Substitutionsregel")
- Potenzreihen: Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ (mit Konvergenzradius > 0). Dann ist $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ (mit gleichem Konvergenzradius).

Integration: Bemerkungen

- Integration ist "schwierig": Die Integrale sehr einfache Funktionen haben oft keine einfache Darstellung mehr (und selbst wenn sie eine haben ist sie oft nur schwer zu finden).
- (Differenzieren ist einfach, es ist also insbesondere einfach zu überprüfen ob ein "einfaches" F tatsächlich Integral von f ist.)
- Beispiele von Funktionen deren Integral keine einfache Darstellung hat: $\frac{\sin x}{x}$ und e^{x^2}.
- Diese Integrale sind sehr "anständige" Funktionen, können auch sehr nützlich sein, effizient berechenbar, etc. (Wir werden später ein besonders wichtiges Beispiel erwähnen.) Aber sie lassen sich eben nicht "einfach" ("elementar") aufschreiben.
- Computeralgebrasysteme (wolfram alpha etc) können helfen schön darstellbare Integrale zu finden bzw. nicht darstellbare zu benennen. (Fertigkeit im Integrieren ist in Physik etc trotzdem von großer Bedeutung.)

Bestimmtes Integral: Stückweise setig

Definition

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig, wenn es $a := x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ gibt und es $g_i : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{R}$ stetig gibt mit $g_i \restriction (x_i, x_{i+1}) = f \restriction (x_i, x_{i+1})$ für alle $0 \leq i < n$.

- f stückweise stetig impliziert daß f stetig ist bei allen ausser endlich vielen x. (Die möglichen Ausnahmen sind die x_i der Definition.)
- Die Umkehrung gilt nicht: Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 0$ für $x = 0$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ sonst. Dann ist f überall stetig ausser bei 0, aber nicht stückweise stetig.
- $\mathrm{sign}(x)$ (eingeschränkt auf jedes $[a,b]$) ist stückweise stetig.
- Wenn f stückweise stetig ist, dann ist $f''[a,b]$ eine Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Intervalle (und insbesondere beschränkt).
- Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig ist und $a \leq x \leq y \leq b$, dann ist $f \restriction [x,y]$ stückweise stetig.

Bestimmte Integrale

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig.

Definition

- $\int_a^b f(x)dx := \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(a + i \cdot \frac{b-a}{N}) \cdot \frac{b-a}{N}$
- Setze $\int_a^a f(x)dx := 0$ und $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$

Theorem (Ohne Beweis)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

- *Sei f stückweise stetig. Dann existiert $\int_a^b f(x)d(x)$.*
- *Sei f stetig, $x_0 \in [a, b]$ und setze $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ (für $x \in [a, b]$).*
  Dann ist $F'(x) = f(x)$. D.h. F ist eine Stammfunktion von f.
- *Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.*
  Dann ist $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Nachtrag

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, genauso g.

- Für $c \in [a, b]$ ist $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. (Ohne Beweis.)
- $(b - a) \cdot \min_{a \leq x \leq b}(f(x)) \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b - a) \cdot \max_{a \leq x \leq b}(f(x))$. (Einfach zu sehen aus Definition.)
- Daraus folgt insbesondere:
  - Wenn $f(x) \geq 0$, dann $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
  - Wenn $f(x) \leq g(x)$ für $x \in (a, b)$, dann $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
  - $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- Setzt $f^+(x) := \max(0, f(x))$ und $f^-(x) := -\min(0, f(x))$.
  Dann sind f^+ und f^- stetig, und $f = f^+ - f^-$.
  Daher $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$.

Integration: Uneigentliche Integrale ("zweiter Art")

Angenommen $\int_a^b f(x)dx$ existiert für alle $b \geq a$.
(Das ist jedenfalls der Fall wenn $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig.)

Definition

$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx.$

- Natürlich muss der Limes nicht existieren. Bsp: $f(x) = \sin(x)$, dann ist $\int_a^b f(x)dx = 1 - \cos(b)$, was nicht konvergiert.
- Wenn der (uneigentliche) Limes ∞ ist, schreiben wir $\int_a^\infty f(x)dx = \infty$. Bsp: $f(x) = 1$.
  Anderes Bsp: $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx := \lim_{b\to\infty} \ln(b) = \infty$.
- Analog wenn Limes $-\infty$ ist. Bsp.: $f(x) = -1$.

Beispiele in denen der Limes ("eigentlich") existiert:

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{b} - (-\frac{1}{1}) = 1.$
- $\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-b} - (-e^0) = 1.$

Bemerkungen

- Konvergenz von Reihe/Integral und Nullfolgen:
  - Zur Erinnerung: Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ existiert (d.h.: wenn die Reihe konvergiert), dann muss a_n eine Nullfolge sein.
    (Umkehrung gilt nicht, siehe $\frac{1}{n}$.)
  - Aus "$\int_0^\infty f(x)dx$ existiert" folgt aber nicht dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
    Bsp.: $f(x) = 1$ wenn $x \in [n, n + \frac{1}{2^n}]$, und 0 sonst.
    Dann ist $\int_1^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$.
  - Für monotone Funktionen gilt aber: Wenn $\int_0^\infty f(x)dx$ endlich ist, dann $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. (Siehe nächstes slide.)
- Zerlegung in positiven und negativen Teil:
  - Für "eigentliche" Integrale haben wir gesehen:
    $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$.
  - Wenn das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)dx$ existiert, muss aber $\int_0^\infty f^+(x)dx$ nicht existieren.
  - Bsp: $f(x) = (-1)^n$ wenn $x \in [n, n + \frac{1}{n}]$ für $n \in \mathbb{N}$, und 0 sonst.
    Dann gilt $\int_1^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ (exisitert),
    aber $\int_1^\infty f^+(x)dx$ entspricht $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ (divergent).

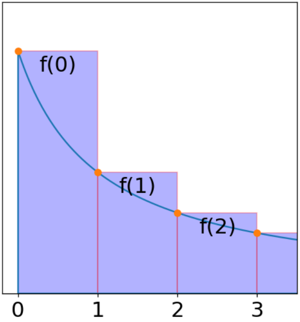
Integral als Abschätzung für Reihen

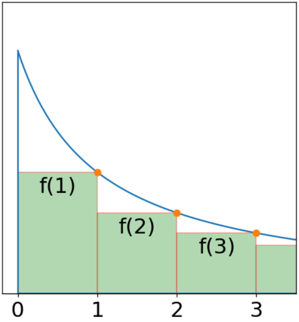
Theorem

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend. Dann
$\int_0^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=0}^\infty f(n) \leq f(0) + \int_0^\infty f(x)dx.$

Insbesondere: Die Summe ist endlich gdw Integral ist endlich.

Beweis: Blaue Rechtecke $= f(0) + f(1) + \cdots \geq \int_0^\infty f(x)dx$,
Grüne Rechtecke $= f(1) + f(2) + \cdots \leq \int_0^\infty f(x)dx$.





Integral als Abschätzung für Reihen: Beispiele

Bemerkungen:

- Analog $\int_M^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=M}^\infty f(n) \leq f(M) + \int_M^\infty f(x)dx$.
- Wenn strikt monoton fallend, dann beide mal $<$ statt $\leq$.

Beispiele:

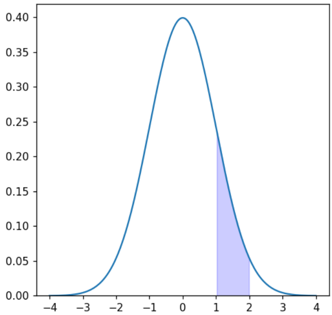
- $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ konvergieren beide nicht.
- $\int_1^\infty \frac{1}{n^2}dx = 1 < \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^\infty \frac{1}{n^2}dx = 2$
  (Tatsächlich gilt: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \sim 1.64$)

Integration: Normalverteilung

Ein besonderes wichtiges Beispiel einer Funktion ohne elementares Integral:

Definition

$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$
die Dichtefunktion einer (standard-)normalverteilten Zufallsvariable.



- Dichtefunktion heißt:
  Die Wahrscheinlichkeit dass der Wert in $[a, b]$ liegt ist $\int_a^b \varphi(x)dx$.
- Insbesondere: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$.
  (Daher der Normierungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$)
- Das Integral läßt sich nicht elementar darstellen. Äquivalent:
  $\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$ (die Wahrscheinlichkeit für $\leq x$ ist) ist nicht elementar darstellbar.

Mehr uneigentliche Integrale

Analog kann man in natürlicher Weise uneigentliche Integrale für viele andere Konstellationen definieren:

- $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$ (auch für uneigentl. Fall $\pm\infty$).
- Wenn $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ definiert, dann $\int_a^b f(x)dx := \lim_{y\to b} \int_a^y f(x)dx$ (auch für den uneigentlichen Fall $\pm\infty$).
  Bsp: $\int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx := \lim_{y\to 0} \ln(|y|) = -\infty$.
- Analog für $f : (a,b]$.
  Bsp: $\int_0^1 \frac{1}{x} dx := \lim_{y\to 0}(-\ln(y)) = \infty$.

Noch mehr uneigentliche Integrale

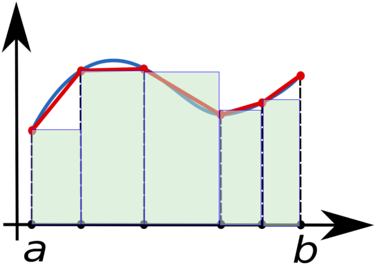
Diese Fälle kann man natürlich kombinieren (wobei man jeweils zeigen müsste dass die folgenden Definitionen unabhängig von c sind):

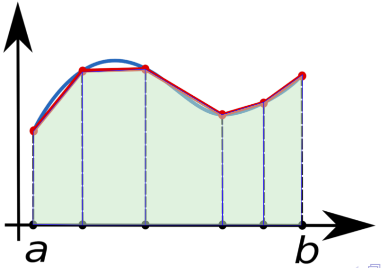
- Für $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ setze $\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- Für $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ setze $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$.
- Für $f:(-\infty,b)\to\mathbb{R}$ setze $\int_{-\infty}^b f(x)dx := \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
- Für $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ setze $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{\infty} f(x)dx$

Etc.

Numerisches Integrieren

- Symbolisches Integrieren ist “schwierig”.
- Numerisches Integrieren ist “leicht” und recht robust.
- Selbst die dümmstmögliche Methode (Summe, links) ist OK, besser und immer noch einfach: “Trapez” (rechts, `numpy.trapz`).
- Gibt natürlich viele andere numerische Methoden die für verschiedene Situationen besser sind.
- Funktioniert i.A. sogar für verrauschte “Echtdaten” gut und effizient (benötigt für N Datenpunkte N Summen).





(Mathematische) Bemerkung

- Unsere Definition des bestimmten Integrals war besonders einfach, weil wir "f stückweise stetig" voraussetzen.
- Eine einfache Modifikation der Definition ("Riemann Integral") funktioniert für mehr (aber nicht alle) Funktionen.
- Es gibt auch eine andere Definition, die mathematisch befriedigender ist ("Lebesque Integral"), die für noch viel mehr Funktionen funktioniert.
- Im wesentlichen: Man ordnet gewissen Teilmengen von $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R}^n$ etc) eine Größe zu ("Lebesque Maß"), und verwendet das Maß von $f^{-1}[y, y+\varepsilon)$ ist, etc.
- Aber weiterhin gilt: Es gibt immer Funktionen die nicht integrierbar sind bzw. Mengen denen man kein Maß zuordnen kann; besonders schönes Beispiel: Banach Tarski Paradoxon. (Man kann eine Kugeln mir Radius 1 im $\mathbb{R}^3$ in 10 Teile zerlegen, jeden Teil einmal rotieren und verschieben, und erhält als Ergebnis zwei Kugeln mit Radius 1.)

Differentialgleichungen

Gleichungen

Völlig willkürliche Beispiele für Gleichungen (in den reellen Zahlen):

- $x + 2 = 5$. Hat eindeutige Lösung.
- $\sin(x) = 0$. Lösungsmenge ist $\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$.
- Allgemein: $f(x) = 0$. Lösungsmenge sind die Nullstellen von f. Selbst wenn es nur endlich viele gibt, und wenn f "einfach" ist, kann man die Nullstellen i.A. nicht "explizit" anschreiben (sehr wohl aber recht effizien numerisch berechnen).
- $x^2 + 1 = 0$. Hat keine Lösung (in $\mathbb{R}$).
- $0 \cdot x = 1$. Hat keine Lösung (nichtmal in $\mathbb{C}$).
- $x = x$. Ganz $\mathbb{R}$ ist Lösungsmenge.
- $x = |x|$. Lösungsmenge ist $\mathbb{R}^{\geq 0}$.

In diesen Gleichungen ist x eine "freie Variable", die für eine reelle Zahl steht.

Gleichungen in mehreren Variablen

Weitere völlig willkürliche Beispiele, diesmal für für Gleichungen in den reellen Zahlen mit zwei Variablen, x und y.
Die Lösungsmenge kann man nun als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ darstellen:

- $x + 2 = y$. Eine Gerade.
- Allgemeiner $y = f(x)$. Graph der Funktion f.
- $y^2 = x$. Eine Parabel (kein Funktionsgraph).
- $y^2 = -1 - x^2$. Hat keine Lösung.
- $x \cdot y = x \cdot y$. Ganz $\mathbb{R}^2$ ist Lösungsmenge.
- $x \cdot y = |x \cdot y|$. Lösungsmenge ist Vereinigung zweier Quadranten.

Gleichungssysteme

Weitere völlig willkürliche Beispiele, diesmal für für ein System von Gleichungen:

- $x + y = 1$, $x - y = 3$. Eindeutige Lösung $x = 2$, $y = -1$.
- $x + y = 1$, $2x + 2y = 2$. Lösungsmenge ist Gerade $y = 1 - x$.
- $x + y = 1$, $2x + 2y = 0$. Keine Lösung.

Solche "linearen Gelichungssystem" werden in der linearen Algebra behandelt.

Funktionsgleichungen

Wir betrachten nun Gleichungen mit einer freien Variablen, nennen wir sie f, die für eine reelle Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ steht mit $A \subseteq \mathbb{R}$ "größtmöglich".
Wieder ein paar Beispiele:

- $f(x) = |f(x)|$. (Gemeint ist immer: "für alle x in A")
  Jede Funktion mit $f(x) \geq 0$ ist Lösung.
- $(f(x))^2 = -1$. Keine Lösung.
- $0 \cdot f(x) = 0$. Jede Funktion ist Lösung.
- $f(x) = x^2$. Definiert direkt (und eindeutig) die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$.
- $f(x)^2 = x$.
  - Offenbar kann so ein f nur für $x \geq 0$ definiert sein. Wir suchen also Lösungen $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}$.
  - Offenbar muss gelten: $f(x) = \pm\sqrt{x}$.
  - Es kann alle möglichen seltsamen Lösungen geben, z.B.: $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \in \mathbb{N}$ und $f(x) = -\sqrt{x}$ sonst.
  - Man sieht aber: Es gibt nur zwei stetige Lösungen: $f(x) = \sqrt{x}$, und $f(x) = -\sqrt{x}$

Funktionsgleichungen (Forts.)

Gesucht: $f : A \to \mathbb{R}$ das bestimmte Gleichung(en) erfüllt.

- Üblicherweise suchen wir nur f mit zusätzlichen Eigenschaften wie stetig, differenzierbar, etc.
- Der Definitionsbereich A wird i.A. nicht ganz $\mathbb{R}$ sein, wir suchen "sinnvolle" (i.A.: maximale) A.
  (Für $A = \{0\}$ werden sich oft viele Lösungen finden die aber nicht relevant sind.)
  Oft ist so ein maximales A ein Intervall, manchmal beschränken wir uns auch explizit auf Intervalle.
  (Wenn im vorigen Bsp $A = [0, 1] \cup [3, 4]$ ist, gibt es 4 statt 2 stetige Lösungen, etc.)

Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung ist eine Funktionsgleichung die den Differentialoperator verwendet. Willkürliche Beispiele:

- $f'(x) = 1$. Lösungen sind $f(x) = x + c$ für $c \in \mathbb{R}$ beliebig.
- Allgemein: $f'(x) = g(x)$ (für konkretes g) hat Lösung(en) $\int f(x)dx$ [auf Intervall eindeutig bis auf Konstante c].
- $f'(x) = f(x)$. Wir wissen: $a \cdot e^x$ ist Lösung, für $a \in \mathbb{R}$. Andere Lösungen?
- $f'(x) = x \cdot f(x)$. Lösung??

Differentialgleichung

- Diffgleichungen viel komplizierter als Gleichungen über reelle Zahlen. (Letztere kann man oft zumindest numerisch gut behandeln.)
- Wie man schon beim Integrieren sieht haben "einfache" Diffgleichungen oft keine "einfach anschreibbare" Lösung. Für das einfaches Integrieren gibt es robuste numerische Verfahren, für allgemeinere Diffgleichungen ist das ungleich schwieriger.
- Wir kennen schon die Unterscheidung "exakt (symbolisch)" vs "numerisch". Bei Diffgleichungen kommt noch die Unterscheidung "qualitativ" vs "quantitativ" dazu.

Notation

- Gewöhnliche (explizite) Differentialgleichungen erster Ordnung: $f'(x) = g(x, f(x))$, wobei g eine gegebene Funktion ist.
- Gewöhnliche (explizite) Differentialgleichungen zweiter Ordnung: $f''(x) = g(x, f(x), f'(x))$.
  Grundlage der Newtonschen Mechanik (in gegebenem Kraftfeld): $s''(t) = \frac{1}{m} F(s(t))$.
- Allgemein nennt man Diffgleichungen bei denen die Variable für eine einstellige Funktion steht eine "gewöhnliche Diffgleichung".
- Im Gegensatz dazu: Wenn f für zB eine zweistellige Funktion $f(x, y)$ steht, gibt es die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$. Die entsprechenden Diffgleichungen heißen "partielle Diffgleichungen" (Z.B. Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial f}{\partial t} = c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.)

Gewöhnliche Diffgleichungen erster Ordung 1

Wir schreiben im Folgenden y oder $y(x)$ für die gesuchte Funktion ("abhängige Variable"). Statt $y(x)$ schreiben wir oft einfach y, und statt $y'(x)$ zbw $\frac{dy}{dx}$ einfach y'.
Wir wollen $y' = f(x, y)$ lösen.

Bsp: $y' = y$. Eine Lösung: $C \cdot e^x$. Wenn wir zusätzlich festlegen dass $y(1) = 2$ sein soll, ergibt sich die eindeutige Lösung $C = \frac{2}{e}$.

Wenn zusätzlich zu $y' = f(x, y)$ noch $y(x_0) = y_0$ gegeben ist, spricht man von einem "Anfangswertproblem".

Anfangswertproblem

Man könnte intuitiv erwarten dass ein Anfangswertproblem eine (eindeutige) Lösungs besitzt: Wie wissen $y(x_0) = y_0$ und daher $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Wir wissen daher $y(x_0 + \delta) \sim y(x_0) + \delta y'(x_0)$. Damit können wir $y'(x_0 + \delta) = f(\dots)$ berechnen, etc.

Theorem (Ohne Beweis)

Sei $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *stetig.*

- *Es gibt für jedes* $x_0 \in (a, b)$ *und* $y_0 \in (c, d)$ *ein* $\varepsilon > 0$ *und eine Lösung* $y : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}$ *des Anfangswertproblems* $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.
- *Wenn zusätzlich gilt (Lipschitz-Bedingung): Es gibt ein* $L \in \mathbb{R}$ *s.d.* $(\forall x \in [a, b])\,(\forall y_1, y_2 \in [c, d])\,|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$, *dann ist diese Lösung eindeutig (auf* $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$*).*

(Für den Spezialfall $f(x, y) = g(x)$ sagt das nur, dass stetige Funktionen integrierbar sind.)

Trennung der Variablen

Die Lösung zu bestimmen ist eine ganz andere Frage.
Wir untersuchen Spezialfälle:

- $y' = g(x)$ (d.h. hängt nur von x ab, nicht von y).
  Dann $y = \int g(x)dx$.
- $y' = g(x)h(y)$ mit $h(y) \neq 0$.
  Dann funktioniert "Trennung der Variablen": $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$, d.h. $\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx$.
  Integriere beide Seiten: $\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx$, das ergibt $\tilde{H}(y) = G(x)$. "Isoliere" aus dieser impliziten Gleichung y.
- Beispiel: $y' = \frac{x}{y^2}$ gibt $\int y^2 dy = \int x dx$, d.h. $\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{2}x^2 + C$ bzw $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + D}$.

Sonderfall des Sonderfalls: Autonome Diffgl

Betrachte $y' = h(y)$. Wir bekommen also y prinzipiell durch Integration etc. Aber Integration ist oft nicht möglich. Qualitative Überlegungen:

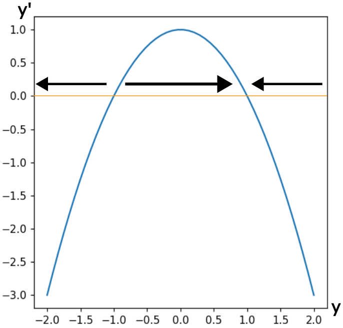
- Von besonderem Interesse sind $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $h(y_0) = 0$. Dann ist die konstante Funktion $y(x) = y_0$ eine Lösung ("Gleichgewichtspunkt").
- y_0 heißt "asymptotisch stabil", wenn es ein $\delta > 0$ gibt so dass für jede Lösung y gilt: Wenn $|y(x_0) - y_0| < \delta$, dann $\lim_{x\to\infty} y(x) = y^*$. (Jede Lösung die in die Nähe des Gleichgewichts kommt wird also "eingesaugt".)

Theorem (Ohne Beweis)

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, und y_0 Gleichgewichtspunkt. Wenn $h'(y_0) < 0$, dann ist y_0 asymptotisch stabil.

Beispiel für den Sonderfall des Sonderfalls

Betrachte $y' = 1 - y^2$. "Qualitative" Überlegungen:



- Zwei Gleichgewichtspunkte: -1 und 1, 1 ist stabil.
- Wenn $y(x) > 1$, dann wird y mit steigendem x kleiner (aber kann nicht unter $y(x) = 1$ kommen).
- Wenn $-1 < y(x) < 1$, dann wird y mit steigendem x größer (aber kann nicht über $y(x) = 1$ kommen).
- Wenn $y(x) < -1$, dann wird y mit steigendem x kleiner.
- -1 ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt.

Potenzreihen-Ansatz

Annahme/Ansatz: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Bsp: $y' = y^2 + \sin(x)$.
Koeffizientenvergleich:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots \\
y & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \\
y^2 & a_0 & 2a_1a_0 & 2a_2a_0 + a_1^2 & 2a_3a_0 + 2a_2a_1 & \\
\sin(x) & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3!} & \\
y^2 + \sin(x) & a_0 & 1 + 2a_1a_0 & 2a_2a_0 + a_1^2 & -\frac{1}{3!} + 2a_3a_0 + 2a_2a_1 & \\
y' & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 4a_4 &
\end{array}
$$

Bei Randbedingung $y(0) = 1$ ergibt sich: $a_0 = 1$, $a_1 = a_0 = 1$,
$a_2 = \frac{1}{2}(1 + 2a_1a_0) = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}(2a_2a_0 + a_1^2) = \frac{4}{3}$, etc.

Daher: $y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{11}{6}x^4 + O(x^5)$.

Allgemeiner Differentialgleichungen

- Diffgleichungen wichtig und allgegenwärtig (vA in Physik).
- I.A. hoffnungslos, eine in der Anwendung gegebene Diffgleichung exakt zu lösen.
- Einige wichtige Ausnahmen:
  Newtonsche Physik: 2-Körper-Problem (scheitert an 3),
  Schrödinger-Gleichung: Wasserstoffatom (scheitert 2. Elektron),
  Maxwell-Gleichungen: Lichtwellen im Vakuum (scheitert an geladenen Teilchen).
- Das heißt nicht dass nicht viel dazu zu sagen wäre:
  Löse einfache Approximation der Gleichnung exakt,
  Numerische Lösungen, Potenzreihenansatz, ...
  (Exakte) "qualitative" Aussagen ...

Harmonischer Oszillator

Eine der wichtigsten (und leicht lösbaren) Diffgleichungen:

- Punktteilchen in konstantem Kraftfeld $F(x)$:
  Kraft ist Masse mal Beschleunigung, d.h. $x''(t) = \frac{1}{m}F(x)$.
- Schreiben $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
- Wenn Teilchen um Gleichgewichtspunkt $x = 0$ schwingt:
  $F(0) = 0$ (d.h. $a_0 = 0$),
  $F(x) > 0$ wenn $x < 0$ und $F(x) < 0$ wenn $x > 0$ (d.h. $a_1 \leq 0$).
- Daher ist $F(x) = -bx + O(x^2)$ mit $b > 0$.
- Kleine Schwingungen: $O(x^2)$ vernachlässigbar:
- $x''(t) = \frac{1}{m}F(t) = -\frac{b}{m}x(t)$, d.h. $x(t) = a\sin(\sqrt{\frac{b}{m}}t + d)$.
- Das ist die universelle "erste Approximation" aller kleinen Schwingungen: Stimmgabel, Pendel, Federpendel;
  im Wesentlichen auch: Photonen (Lichtemission aus Atomschwingungen), etc.

Bsp: Schrödingergleichung

- Grundlegende “Bewegungsgleichung” der Quantenmechanik.
- $\psi(x,t)$ (komplexe!) Wellenfunktion eines Teilchens, abh. von Ort x und Zeit t.
  $|\psi(x,t)|^2$ ist Wahrscheinlichkeit bei Messung das Teilchen zur Zeit t in x zu finden.
- Teilchen in Potential $V(x,t)$:
  $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) + V(x,t)\cdot\psi(x,t)$ (Schrödingergl.)
- Lösbar für: Freies Teilchen (V konstant), $V(x) = x^2$ (harmon. Oszillator), Treppen und δ-Potentiale,
  (3dim:) Elektron in H-Atom ($V(\vec{x}) = -\frac{c}{|\vec{x}|}$).
- Wichtig: Diffgleichung ist linear, d.h.: Wenn ψ_1 und ψ_2 Lösungen sind, dann auch $c\cdot\psi_1$ und $\psi_1+\psi_2$.
  ($\rightarrow$ Superposition, Schrödingers Katze).
- Einige andere wichtige Gleichungen in der Physik sind linear, z.B. Maxwellgleichungen.
  ($\rightarrow$ Lichtwellen (im Vakuum) überlagern einander störungsfrei.)

Lineare (gew.) Diffgleichungen

- $y' + a(x)y = g(x)$ heißt Lineare Diffgleichung erster Ordnung; $a(x)$ Koeffizient, $g(x)$ Störfunktion bzw Inhomogenität. Wenn $g = 0$ heißt Diffgleichung homogen. (Gdw $y = 0$ Lösung ist.)
- Analog: $y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x)y^{(k)} = g(x)$ lineare Diffgleichung n-ter Ordnung mit Inhomogenität g.
- Superpositionsprinzip: Wenn y_1 Lösung zu Inhomogenität g_1 ist und y_2 zu g_2 (d.h. bei erster Ordnung: $y_i' + a(x)y_i = g_i(x)$ für $i = 1, 2$), dann ist $\alpha y_1 + \beta y_2$ (α, β konstant) Lösung zur Inhomogenität $\alpha g_1 + \beta g_2$.
  (Bew: Ableitung ist linearer Operator)
- Insbesondere: Sei y Lösung zur Inhomogenität g. Dann ist z ebenfalls solche Lösung gdw $z = y + w$ mit w Lösung der homogenen Gleichung.
  (Bew: Gegeben $y =: y_1$ und $z =: y_2$, verwende $\alpha := -1$, $\beta := 1$ und $g_1 := g_2 := g$; bzw gegeben $y =: y_1$ und $w =: y_2$ verwende $\alpha := \beta := 1$ und $g_1 := g$, $g_2 := 0$.)

Lineare Diffgleichungen erster Ordnung

- Lösung der hom. Gl. $y' + a(x)y = 0$ ist $e^{-A(x)}$, wobei $A' = a$ (oder konstant 0).
  Äquivalent: Allgemeine Lösung ist $Ce^{-A(x)}$, mit C konstant und A "fixer" Stammfunktion von A.
- Beweis: $y' = (e^{-A(x)})' = -a(x)e^{A(x)} = -a(x)y$.
  (Ohne Beweis: alle Lösungen sehen so aus.)
- Finden einer "partikulären" Lösung zur Störfunktion g:
  "Variation der Konstanten" (der Konstante C der hom. Lösung).
  Ansatz: $y_h(x) = e^{-A(x)}$; $y_p = C(x)y_h$.
  Das ergibt (Produktregel): $y_p' + a(x)y_p = c'(x)y_h$, was g sein soll.
  D.h. $c'(x) = e^{A(x)}g(x)$, bzw $c(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}g(t)dt$.
- Zusammenfassung: Die Lösungen von $y' + a(x)y = g$ sind $y = e^{-A(x)}(C + B(x))$ mit C konstant, $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$ und $B(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(t)}g(t)dt$ (x_0 beliebig).

Nachtrag zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Anfangswertproblem: $y'(x) = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

- Wir wissen: Wenn f stetig, dann gibt es lokal eine Lösung.
  Es muss aber keine globale Lösung geben! Bsp: ("Blow-Up"):
  - $y' = y^2$, $y(0) = 1$.
  - Trennung d. Var: $\frac{dy}{y^2} = dx$, $-\frac{1}{y} = x + C$, d.h. $y = \frac{1}{C-x}$
  - $y(0) = 1$, d.h. $C = 1$. Lösung ist also $y = \frac{1}{1-x}$.
  - Lösunge geht für $x = 1$ nach unendlich!
    (Keine stetige Lösung über $x = 1$ hinaus möglich.)
  - Andere Intuition: x Zeit, y Position. "Teilchen" bewegt sich in endlicher Zeit $x = 1$ gegen unendlich.
- Wir wissen: Wenn f zusätzlich Lipschitz-Bedingung erfüllt, dann Lösung lokal eindeutig. Gilt ohne Lipschitz-Bedingung nicht. Bsp:
  $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ hat Lösungen (für $-\infty \leq a \leq 0 \leq b \leq \infty$)

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-b)^2 & \text{wenn } x > b \\ 0 & \text{wenn } a \leq x \leq b \\ -\frac{1}{4}(x-a)^2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analysis in höheren Dimensionen

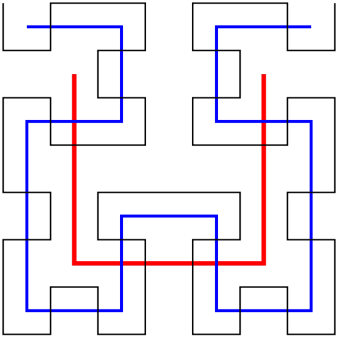
Kurven in Raum und Ebene

- Wir betrachten "parametrisierte Kurven" in $\mathbb{R}^n$, das sind: stetige Funktionen $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t)$, mit $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.
  Statt $\gamma(t)$ schreiben wir auch $(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$.
  Das Bild der Kurve ist $\gamma'' I \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Für $n = 1$ sind das einfach die bekannten reelle Funktionen.
  Allgemein haben wir n viele stetige Funktionen γ_i.
- Für $n = 2$: Kurven in der Ebene.
  Beispiel: $r(\sin(\omega t), \cos(\omega t))$ bewegt sich entlang einem Kreis mit Radius r mit Winkelgeschwindigkeit ω. Das Bild ist daselbe wenn man als Definitionsmenge z.B. $\mathbb{R}$ oder $[0, 2\pi]$ etc wählt.
- γ ist (n-mal|stetig) diffbar, wenn jede Komponente γ_i (n-mal|stetig) diffbar ist.
- Differenzierbare Kurven können Ecken haben. Bsp: (t^2, t^3)

Ableitung und Weglänge

- Die Ableitung $\gamma'(t)$ ist $(\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$.
- Bsp: für $\gamma(t) = r(\sin(\omega t), \cos(\omega t))$ ist $\gamma'(t) = r\omega(\cos(\omega t), -\sin(\omega t))$, und $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{r^2\omega^2\cos^2(\omega t) + r^2\omega^2\sin^2(\omega t)} = r\omega$.
- Wenn t als Zeit interpretiert wird, ist $\gamma'(t)$ die Geschwindigkeit (ein Vektor).
- Daher können wir die Weglänge (für $I = [a, b]$) definieren als $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\ dt$.
- Existiert jedenfalls wenn γ stetig diffbar.
- In obigem Beispiel, für $I = [0, \frac{2\pi}{\omega}]$, bekommen wir wenig überraschend die Weglänge $\int_a^b r\omega\, dt = 2r\pi$.

Es gibt stetige "raumfüllende" Kurven, d.h.
$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ stetig so dass $\gamma''[a,b] = \mathbb{R}^2$.
Bsp.: Hilbert-Kurve



(Mit differenzierbaren Funktionen kann das nicht passieren.)

Integration in höheren Dimensionen

- Sei $f : R \to \mathbb{R}$ mit $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir wollen das Volumen $\int_R f(x,y)dA$, auch $\iint_R f(x,y)dA$ geschrieben, zwischen x-y-Ebene und dem Funktionsgraphen berechnen.
- Für $R = [a,b] \times [c,d]$ gilt:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$

- Allgemeiner: Wenn $R = \{(x,y) : \ a \leq x \leq b, \ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$ für stetige Funktionen ϕ_1, ϕ_2, dann ist

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\, dy\, dx$$

Kugelvolumen

- $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = \frac{1}{2} a^2 \pi$ (die Fläche des Halbkreises mit Radius a).
- Sei $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ und $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. Dann ist $W := \iint_R f(x, y) dA$ das Volumen einer Halbkugel mit Radius r.
- Es gilt also: $W = \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$.
  Dabei ist $\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy$ die Fläche des Halbkreises mit Radius $\sqrt{r^2 - x^2}$, d.h. $\frac{\pi}{2}(r^2 - x^2)$.
  Es ist also
  $W = \frac{\pi}{2} \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx = \frac{\pi}{2}(2r^3) - \frac{\pi}{2} \int_{-r}^{r} x^2 dx = \frac{\pi}{2}(2r^3 - 2\frac{r^3}{3}) = \frac{2\pi r^3}{3}$.
- Das Kugelvolumen ist also $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Komplexe Analysis

Komplexe Zahlen, Kartesisch

- Formal: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind Paare (a, b) reeller Zahlen, zusammen mit den folgenden Rechenregeln:
  $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$,
  $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$.
  Das Paar $(0, 1)$ bezeichnen wir als i;
  die reelle Zahl a identifizieren wir mit $(a, 0)$.
- Schlampiger und besser: Eine komplexe Zahl hat die Form $z = a + ib$, wobei i eine "imaginäre" Zahl ist mit $i^2 = -1$.
- Notation: $\mathrm{Re}(a + ib) := a$, $\mathrm{Im}(a + ib) := b$ (Real- und Imaginärteil).
- Wenn $z = a + ib$, dann ist $z^* := a - ib = \mathrm{Re}\, z - \mathrm{Im}\, z$ (Konjugierte).
  Oft auch $\bar{z}$ geschrieben.
  Es gilt $z_1^* + z_2^* = (z_1 + z_2)^*$ und $z_1^* \cdot z_2^* = (z_1 \cdot z_2)^*$.
- $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$.
  Es gilt: $z \cdot z^* = |z|^2$; $|z| = 0$ gdw $z = 0$; $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- D.h. Re, Im und $z \mapsto |z|$ sind Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$; $z \mapsto z^*$ ist $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Ein paar Beweise

Wir beweisen beispielhaft:

- $z_1^* \cdot z_2^* = (z_1 \cdot z_2)^*$:
  $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
  $z_1^* \cdot z_2^* = a_1 a_2 - (-b_1)(-b_2) + i\big(a_1(-b_2) + a_2(-b_1)\big) =$
  $a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$.
- $z \cdot z^* = |z|^2$:
  $(a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$.
- $|z| = 0$ gdw $z = 0$:
  $a + ib \neq 0$ gdw $(a \neq 0$ oder $b \neq 0)$ gdw $a^2 + b^2 \neq 0$.
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$:
  $|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 \cdot z_2) \cdot (z_1 \cdot z_2)^* = z_1 \cdot z_2 \cdot z_1^* \cdot z_2^* = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$.

Division:

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}$.
- Bsp: $\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i))}{5} = -\frac{4}{5} + \frac{7}{5} i$

Python

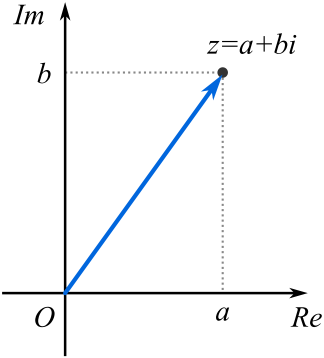
- In python sind komplexe Zahlen (type `complex`) als paar von floats (Kartesisch) implementiert.
- i kann im Code durch `1j` eingegeben werden: `2+3j` ergibt $2 + 3i$, etc. (j alleine ist nicht definiert bzw steht als (Variablen)-Name zur Verfügung.)
- Natürlich haben `numpy` und `sympy` ausführliche Unterstützung von Komplexen Berechnungen.
- Wenn nicht als reell spezifiziert dann geht `sympy` üblicherweise davon aus dass eine Variable/Funktion komplex ist:

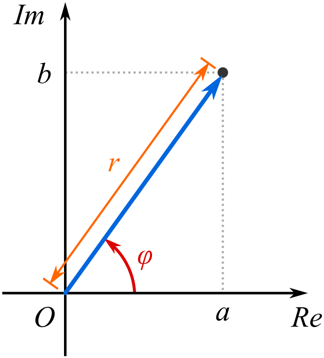
```
In [45]: y = sp.Symbol('y')
In [46]: sp.simplify(sp.log(sp.exp(y)))
Out[46]: log(exp(y))

In [47]: y = sp.Symbol('y', real=True)
In [48]: sp.simplify(sp.log(sp.exp(y)))
Out[48]: y
```

Graphische Darstellung

Komplexe Ebene:





Ein Punkt z kann auch durch "Länge" $r \geq 0$ und Winkel φ beschrieben werden (Polardarstellung).
Schreibweise (nur hier): $z = (r, \varphi)$. ("Richtig": $re^{i\varphi}$.)
Dabei ist $r = |z|$, und $\varphi = \tan^{-1}(\frac{b}{a})$ falls $a \neq 0$ (sonst $\pm\frac{\pi}{2}$).

Polardarstellung

- D.h. mit (r, φ) ist $r\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)$ gemeint.
  Insbesondere ist $a = (a, 0)$ für $a \geq 0$, und $-a = (a, \pi)$.
- Nicht eindeutig: $(r, \varphi + 2k\pi) = (r, \varphi)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
  (Und $(0, \varphi) = 0$ für alle φ.)
- Es gilt: $(r_1, \varphi_1) \cdot (r_2, \varphi_2) = (r_1 r_2, \varphi_1 + \varphi_2)$.
  Polardarstellung ist also nützlicher für Multiplikation (kartesische besser für Addition).
  Beweis: Additionstheorem: $\mathrm{Re}(z_1 z_2) = a_1 a_2 - b_1 b_2 =$
  $r_1\cos(\varphi_1) r_2 \cos(\varphi_2) - r_1 \sin(\varphi_1) r_2 \sin(\varphi_2) = r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$;
  analog für $\mathrm{Im}(z_1 z_2)$.
- Daraus folgt auch: $\frac{1}{(r,\varphi)} = (\frac{1}{r}, -\varphi)$, $\frac{(r_1,\varphi_1)}{(r_2,\varphi_2)} = (\frac{r_1}{r_2}, \varphi_1 - \varphi_2)$, und
  $(r, \varphi)^* = z^* = \frac{|z|^2}{z} = \frac{(r^2,0)}{(r,\varphi)} = (r, -\varphi)$.

Rechenregeln

$\mathbb{C}$ ist ein "Körper", d.h. es gelten (wie in $\mathbb{R}$) die folgenden Rechenregeln: Sei z_1, z_2, z_3 in $\mathbb{C}$.

- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ und $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$,
- $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ und $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$,
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.
- $0 + z = z$, für alle z gibt es $-z$, d.h. ein (eindeutiges) z' mit $z + z' = 0$.
- $1 \cdot z = z$, für alle $z \neq 0$ gibt es $\frac{1}{z}$, d.h. ein (eindeutiges) z' mit $z \cdot z' = 1$.
- $0 \cdot z = 0$; und wenn $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ dann ist auch $z_1 z_2 \neq 0$. (Bew.: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.)

Daraus folgt auch dass man dividieren kann: Wenn $z_2 \neq 0$, dann gibt es $\frac{z_1}{z_2}$, d.h. ein eindeutiges z_3 mit $z_1 = z_2 \cdot z_3$.
(Bew. der Eindeutigkeit: Wenn $z_2 \cdot z_3 = z_2 \cdot z_4$, dann $z_2(z_3 - z_4) = 0$, daher $z_3 - z_4 = 0$.)

z^n

- Wenn $z = (r, \varphi)$, dann ist $z^n = (r^n, n \cdot \varphi)$.
- Im Komplexen verhält sich die Funktion $z \mapsto z^n$ anders als im Reellen:
- Für $n \geq 1$ gibt es für jedes $u = (r, \phi)$ eine n-te Wurzel $z_0 = (\sqrt[n]{r}, \frac{\phi}{n})$. ($n$-te Wurzel heißt: $z_0^n = u$).
- Es gibt genau n solcher Wurzeln: $z_j = (\sqrt{n}r, \frac{\varphi+2j\pi}{n})$ für $j = 0, \dots, n-1$. ($\frac{\varphi+2n\pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi$ liefert wieder x_0, etc.)
- Insbesondere: Für $n > 1$ ist $z \mapsto z^n$ ist nicht injektiv.
- Bsp: Quadratwurzeln von $i = (1, \frac{\pi}{2})$ sind $(1, \frac{\pi}{4})$ und $(1, \frac{3\pi}{4})$. Die 4-ten Wurzeln von $1 = (1, 0)$ sind 1, i, -1, $-i$.
- Die n vielen n-ten Wurzeln von 1 heißen n-te Einheitswurzeln.

Fundamentalsatz

- $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ heißt Polynom vom Grad n.
- Fundamentalsatz der Algebra: Jedes Polynom von Grad ≥ 1 hat (mindestens) eine Nullstelle.
- In $\mathbb{R}$ hat jedes Polynom ungeraden Grades ein Nullstelle.
- Bsp: $x^2 + 1$ hat komplexe Nullstellen $\pm i$ (aber keine reellen).
- Bsp: $x^3 - 2$ hat drei Nullstellen in $\mathbb{C}$, eine in $\mathbb{R}$, und gar keine in $\mathbb{Q}$, weil $\sqrt[3]{2} \notin Q$.

Inverse

- $z^{-n} := \frac{1}{z^n}$ definiert für $z \neq 0$.
- $(r, \varphi) \mapsto (\frac{1}{r^n}, -\frac{\varphi}{n})$.

Bedeutung der Komplexen Zahlen

- Ursprünglich eingeführt um Nullstellen von Polynomen (auch reelle) zu bestimmen/finden.
- Sehr nützlich um alle möglichen reellen Funktionen effektiver zu beschreiben (Bsp: $\mathrm{Re}(e^{i\omega t})$ statt $\cos(\omega t)$.)
- Die Struktur von $\mathbb{C}$ entspricht fundamentalen Eigenschaften der Quantenmechanik (Wellenfunktion komplexwertig).
- ...

Metrik, Topologie und Stetigkeit

- $d(z_1, z_2) := |z_2 - z_1|$ ist Metrik auf $\mathbb{C}$ (dieselbe Metrik wie standard Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$).
- Dadurch ist $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ definiert.
- Konkreter: $\lim_{n\to\infty}(a_n + ib_n) = c + id$ gdw. $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = d$.
- Dadurch sind auch Bälle $B_\varepsilon(z)$, offene und abgeschlossene Teilmengen etc der komplexen Ebene definiert (genau dasselbe wie in $\mathbb{R}^2$).
- Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann man als Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen, mittels $g(x, y) := (\operatorname{Re} f(x + iy), \operatorname{Im} f(x + iy))$; umgekehrt läßt sich jedes $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ als $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ interpretieren mittels $f(a + ib) := g_1(a, b) + ig_2(a, b)$.
- f ist stetig als Funktion von $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gdw stetig als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.
- Bsp: $z \mapsto z^n$, $z \mapsto z^*$, $z \mapsto |z|$ sind alle stetig.
- Polar auf Kartesisch ist stetig, Umkehrung nicht!

Differenzierbarkeit

- $u = \lim_{z\to 0} f(z)$ heißt: Wenn $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ dann $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = u$.
- (Erinnerung: Für $z_n = a_n + ib_n$ ist $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$; äquivalent: $\lim_{n\to\infty} |z_n| = 0$.)
- Bem.: In $\mathbb{R}$ können wir "von zwei Seiten" kommen (rechtsseitiger und linksseitiger Limes), in $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{C}$ mehr Möglichkeiten.
- Def.: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar (in z_0), wenn $\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$ existiert
- Das ist nicht dasselbe wie dass f differenzierbar ist als $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$!

Beispiele

Nicht komplex differentierbar:

- $z \mapsto z^*$ ist nicht (komplex) differenzierbar (sehr wohl aber als Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$).

  Bew: $\frac{(z_0+h)^*-z_0^*}{h} = \frac{h^*}{h}$.
  Für h reell ist $h^* = h$, und daher $\lim_{h\to 0} \frac{h^*}{h} = 1$.
  Für h imaginär ist $h^* = -h$, und daher $\lim_{h\to 0} \frac{h^*}{h} = -1$.
- Analog: $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$ nicht komplex differenzierbar.

Die folgenden Funktionen sind komplex differenzierbar:

- z^n für $n \in \mathbb{Z}$, mit Ableitung nz^{n-1} (falls $n < 0$ natürlich nur für $z \neq 0$).

Rechenregeln

Auch die komplexe Ableitung erfüllen:

- $(\alpha f)'(z) = \alpha f'(z)$ für $\alpha \in \mathbb{C}$,
- $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$,
- $(f \cdot g)'(z) = f'(z)g(z) + g'(z)f(z)$,
- $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z)$.

Daraus folgt wie üblich:

- $(\frac{f}{g})'(z) = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{g(z)^2}$.
- Wenn $f(g(z)) = z$, dann $f'(g(z)) = \frac{1}{f'(z)}$.

Holomorphe Funktionen und Potenzreihen

Komplexe Differenzierbarkeit ist viel mächtiger als reelle:

Sei $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ auf ganz $B_r(z_0)$ komplex diffbar. Dann gilt:

- f ist beliebig oft komplex diffbar.
- Die Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ konvergiert auf $B_r(z_0)$ gegen f.
- Sei umgekehrt $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r. Dann ist g auf $B_r(z_0)$ komplex diffbar, und $a_n = \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}$.
  In dem Fall ist $g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(z - z_0)^{n-1}$.

Exponentiation und Winkelfunktionen

- $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ hat Konvergenzradius ∞, mit $(e^z)' = e^z$.
- Für $\phi \in \mathbb{R}$ gilt $e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$, d.h. $(1, \phi)$ in Polarschreibweise.
- Erfüllt die üblichen Rechenregeln: $e^0 = 1$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, daher $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$, $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$.
- $e^{a+i\phi} = e^a e^{i\phi} = (e^a, \phi)$ in Polarschreibweise.
- Das Bild von e^z ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- e^z ist nicht injektiv: $e^{z+i2j\pi} = e^z$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Logarithmus

- e^x ist nicht injektiv, daher ist die Umkehrfunktion nicht wohldefiniert.
- Das ist auch der Grund warum `sympy` $\ln(e^x)$ nicht zu x vereinfachen will: $x + 2\pi i \neq x$, aber $e^{x+2\pi i} = e^x$, d.h. was immer man auch für einen Wert für $\ln(2^x)$ wählt, we kann nicht sowohl x als auch $x + 2\pi i$ sein.
- $f := e^x \restriction A$ z.B. für $A := \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ ist injektiv, und hat dasselbe Bild wie e^x, nämlich $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

  Beweis: Wenn $z \neq 0$, dann ist $z = (r, \varphi)$ für eindeutige $r < 0$ und $-\pi < \varphi \leq \pi$, und $z = e^u$ mit $u = \ln(r) + i\varphi \in A$.
- Wir können den komplexen Logarithmus ln also z.B. als Umkehrung dieses f definieren. Dann ist ln auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definiert, aber auf $\{-r + 0i : r \in \mathbb{R}\}$ unstetig: $\ln(-r) = \ln(r) + i\phi$, aber $ln(-r - \epsilon i) \sim \ln(r) - i\phi$ für kleine $\epsilon > 0$.
- Man kann natürlih auch andere “Streifen” als A wählen, und erhält dann andere “Zwege” des Logarithmus.