

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

PRÜFUNG AUS ANALYSIS F. INF.

(GITTENBERGER)

Wien, am 2. Juli 2013 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

Alle Beispiele von Gittenberger gelöst. Wenn sie grau Hinterlegt sind sind sie irgendwo anders am PDF gelöst, weil das Beispiel doppelt ist.

4)

5)

Am VoWi ist auch eine Version wo alle Beispiele geordnet sind.

1)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^x(x^3 - 5x^2 + 7x + y^2 - 7)$. Bestimmen Sie alle relativen Extrema (Lage und Art des Extremums) von f !

$$f(x, y) = e^x(x^3 - 5x^2 + 7x + y^2 - 7)$$

$$f_x(x, y) = e^x(x^3 - 5x^2 + 7x + y^2 - 7) + e^x(3x^2 - 10x + 7)$$

$$= e^x(x^3 - 2x^2 - 3x + y^2)$$

$$f_y(x, y) = e^x \cdot 2y = 2 \cdot e^x y$$

Null setzen

$$2 \cdot e^x \cdot y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$e^x(x^3 - 2x^2 - 3x + y^2) = 0$$

$$e^x(x^3 - 2x^2 - 3x) = 0 \Rightarrow e^x \text{ kann nicht } 0 \text{ sein}$$

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$x(x+1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1, x = 3$$

Potenzielle Punkte $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(3, 0)$

$$f_{xx}(x, y) = e^x(x^3 + x^2 - 7x + y - 3)$$

$$f_{xy}(x, y) = 2e^x y$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \cdot e^x$$

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

$$(0, 0) : H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \det H_f(0, 0) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$(-1, 0) : H_f(-1, 0) = \begin{bmatrix} \frac{4}{e} & 0 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{bmatrix} \det H_f(-1, 0) = \frac{8}{e^2} \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$f_{xx}(-1, 0) > 0$$

$$(3, 0) : H_f(3, 0) = \begin{bmatrix} 12e^3 & 0 \\ 0 & 2 \cdot e^3 \end{bmatrix} \det H_f(3, 0) = 24e^6 \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$f_{xx}(3, 0) > 0$$

2)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ für $|x| < 1$ konvergiert und für $|x| > 1$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1$ bzw. bei $x = -1$?

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad a_n = \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{x^n}{\sqrt{n}}} \right| = \left| \frac{x^{n+1} \cdot \sqrt{n}}{x^n \cdot \sqrt{n+1}} \right| = |x| \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = |x| \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x| \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1}} = \underline{\underline{|x|}}$$

Potenzreihe konvergiert für $|x| < 1$

Für $x = 1$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

p-Reihen Test:

Für Reihen der Form $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$
mit $p > 0$

konvergiert sie für $p > 1$

divergiert sie für $0 < p < 1$

\Rightarrow divergiert.

Für $x = -1$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (-1)^n$$

Leibniz-Kriterium.

Alternierende Reihen $\sum_{n \geq 1} a_n \cdot (-1)^n$
konvergieren, falls

an eine positive ✓

monoton fallende ✓

Nullfolge ist ✓

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \underline{\underline{0}}$$

\Rightarrow konvergiert

Konvergenzintervall ist

$$-1 < x < 1$$

3) (8 P.) Gegeben sei das Bereichsintegral $\iint_B (xy + 2(x^2 + y^2)) dx dy$ mit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Skizzieren Sie den Bereich und berechnen Sie das Integral!

4)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen bis inklusive zweiter Ordnung existieren und stetig sind. Wie kann f mit Hilfe des Satzes von Taylor linear approximiert werden? Wie sieht dann das Restglied aus? Was bedeutet, daß eine symmetrische und quadratische Matrix positiv definit ist? Sei $(\text{grad}f)(x_0, y_0) = 0$. Begründen Sie, warum man bei positiver definiten Hessematrix an der Stelle (x_0, y_0) schließen kann, daß (x_0, y_0) ein lokales Minimum von f ist?

Anmerkung: Bei der dritten Frage ist nicht danach gefragt, wie man die Definitheit einer Matrix feststellen kann (zB mittels Hauptminorenkriterium).

5)(8 P.) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und f eine auf \mathbb{R} definierte, reellwertige Funktion. Was bedeuten die folgenden mathematischen Aussagen?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3, \quad f(x) \text{ ist stetig an der Stelle } x = 6.$$

Geben Sie eine verbale Beschreibung und eine formal exakte Definition an!

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

Der Grenzwert der Folge für $n \rightarrow \infty$ konvergiert gegen 1. Je größer der Wert von n wird, desto näher kommt der Wert der Folge an 1.

Def.:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n > N(\varepsilon) \mid a_n - 1 < \varepsilon$$

Die Werte von a_n liegen innerhalb eines beliebig kleinen Abstands ε um 1, wenn n hinreichend groß ist.

b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

Der Grenzwert der Funktion $f(x)$ strebt gegen 3, wenn sich x der Zahl 2 nähert. Dies impliziert aber nicht das $f(2) = 3$ sein muss, sondern das die Werte von $f(x)$ nahe bei 3 liegen wenn x nahe bei 2 ist.

Def.:

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert c ($c \in \mathbb{R}$), wenn für jede Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_n \neq x_0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ folgt, das $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$.

Man schreibt dann $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$.

c) $f(x)$ ist stetig an der Stelle $x = 6$

Die Funktion hat an der Stelle $x = 6$ keine Sprünge oder Unterbrechungen

Def.:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0 : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

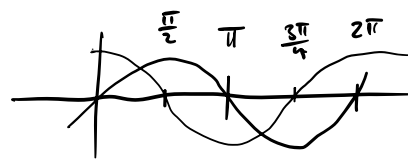
**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 30. September 2013 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)



1)(8 P.) Gegeben sei $f(x, y) = \frac{\ln(1+x^2)}{y} + y \sin(y)$ und der Punkt $P = (0, \pi)$. Weiters bezeichne n jene Niveaulinie von $f(x, y)$, die durch P geht.

a) Berechnen Sie $\text{grad} f$ im Punkt P .

b) Bestimmen Sie die Richtung von n im Punkt P , z.B. durch Angabe eines Richtungsvektors oder der Gleichung der Tangente an n durch P .

$$a) f(x, y) = \frac{\ln(1+x^2)}{y} + y \cdot \sin(y)$$

$$f_x(x, y) = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{(1+x^2)} \cdot 2x = \frac{2x}{y+x^2y}$$

$$f_y(x, y) = -\frac{\ln(1+x^2)}{y^2} + \sin(y) + y \cos(y)$$

$$\text{grad} f = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y+x^2y} \\ -\frac{\ln(1+x^2)}{y^2} + \sin(y) + y \cdot \cos(y) \end{pmatrix}$$

$$\text{grad} f(0, \pi) = \begin{pmatrix} \frac{0}{\pi+0 \cdot \pi} \\ -\frac{0}{\pi^2} + 0 + \pi \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi \end{pmatrix}$$

e) Die Tangente an dieser Niveaulinie im Punkt P steht senkrecht zum $\text{grad} f(P)$.

$$\text{Richtungsvektor } \underline{\underline{R = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

2)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{2^{2n} x^n}{n^2}$ für $|x| < 1/4$ konvergiert und für $|x| > 1/4$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1/4$ bzw. bei $x = -1/4$?

3)(8 P.) Gegeben sind zwei differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Beweisen Sie die folgende Formel mittels vollständiger Induktion!

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{d^k}{dx^k} f(x) \right) \cdot \left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} g(x) \right)$$

4)(8 P.) Was versteht man unter einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$? Wie lautet der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen?

Gegeben sei die Erdoberfläche E , und wir nehmen an, dass die Lufttemperatur eine stetige Funktion $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ des Ortes ist. Für $x \in E$ bezeichnen wir mit \bar{x} den zu x antipodalen Punkt (d.h. auf der Erdoberfläche liegen x und \bar{x} genau gegenüber). Beweisen Sie, dass es mindestens ein Paar antipodaler Punkte mit derselben Lufttemperatur gibt! Hinweis: Betrachten Sie einen Großkreis G von E und die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto T(x) - T(\bar{x})$. Ist diese Funktion stetig? (Warum?) Benützen dann den Zwischenwertsatz.

Da $T(x)$ stetig und $T(\bar{x})$ stetig ist f auch stetig.

Zu zeigen f besitzt Nullstelle

Man wähle $x_0 \in G$ beliebig, so können 3 Fälle eintreten:

1. $T(x_0) - T(\bar{x}_0) = 0$

2. $f(x_0) = T(x_0) - T(\bar{x}_0) > 0$: Dann folgt $f(\bar{x}_0) < 0$

Denn folgt durch den Zwischenwertsatz

das es im Intervall $[x_0, \bar{x}_0]$ eine

Nullstelle geben muss.

3. das gleiche wie 2.

5)(8 P.) Was versteht man unter einer homogenen linearen Differenzgleichung zweiter Ordnung? Wie sieht die Lösungsgesamtheit so einer Gleichung aus? (Dh wie sieht die Struktur der Lösungsmenge aus?) Was versteht man unter der charakteristischen Gleichung einer homogenen linearen Differenzgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, und wie hängen die Lösungen der charakteristischen Gleichung mit den Lösungen der Differenzgleichung zusammen?

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 24. Jänner 2014 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

~~1)(8 P.) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren denjenigen Punkt auf der Kurve $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, der dem Punkt $(1, 2)$ am nächsten liegt! Fertigen Sie auch eine zur Problemstellung passende Skizze an!~~

2)(8 P.) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{(n+1)^2+1}{2^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{2^n}} \right| = \left| \frac{2^n \cdot (n^2+2n+2)}{2^{n+1} (n^2+1)} \right| = \left| \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{2}{n^2}\right)} \right| = \left| \frac{1}{2} \right|$$

\Rightarrow konvergiert

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$

Leibniz-Kriterium

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot (-1)^n$$

Ist a_n eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert sie.

Wenn sie alterniert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2 \left(\frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$

Da der Wert im Nenner viel schneller anwächst, ist sie monoton fallend.

\Rightarrow konvergiert.

3)(8 P.) Sei $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ die durch $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ definierte Funktion. Beweisen Sie, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ gilt.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$ gilt.

4)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Definieren Sie die Begriffe “relatives Maximum (Minimum)” und “absolutes Maximum (Minimum)” von f . Geben Sie weiters je eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums von f an. Prüfen Sie, ob die Funktion $f(x, y) = x^3 + 3xy - 5x - 10y$ im Punkt $(1, 3)$ ein relatives Extremum besitzt.

5)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Wie ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ an der Stelle (x_0, y_0) definiert? Was versteht man unter der Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$? Wie lässt sich die Richtungsableitung geometrisch interpretieren? Seien weiters zwei Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wie lautet die Kettenregel für die Ableitung von $x \mapsto f(g(x), h(x))$?

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 14. März 2014 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

1)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 8y' - 20y = e^{10x} + 1.$$

$$y'' - 8y' - 20y = e^{10x} + 1$$

Homogene:

$$y'' - 8y' - 20y = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 20 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (-20)}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{8 \pm 12}{2}$$

$$\lambda_1 = 10 \quad \lambda_2 = -2$$

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^{10x} + C_2 \cdot e^{-2x}$$

Partikuläre Lösungen:

$$y_{p_1}(x) = y'' - 8y' - 20y = 1$$

$$\begin{aligned} -20A &= 1 \\ A &= -\frac{1}{20} \end{aligned}$$

$$y_{p_1}(x) = -\frac{1}{20}$$

$$y_{p_2}(x) = y'' - 8y' - 20y = e^{10x}$$

$$20Ae^{10x} + 100Axe^{10x} - 8(Ae^{10x} + 10Axe^{10x}) - 20Axe^{10x} = e^{10x}$$

$$12Ae^{10x} = e^{10x}$$

$$A = \frac{1}{12}$$

$$y_{p_2}(x) = \frac{x \cdot e^{10x}}{12}$$

$$y(x) = C_1 \cdot e^{10x} + C_2 \cdot e^{-2x} + \frac{x \cdot e^{10x}}{12} - \frac{1}{20}$$

$$A \cdot x \cdot e^{10x}$$

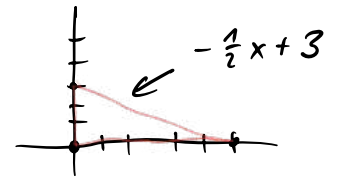
$$A \cdot e^{10x} + 10Axe^{10x}$$

$$10Ae^{10x} + 10Ae^{10x} + 100Ax^{10x}$$

2)(8 P.) Bestimmen Sie alle Punkte (x, y) auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3$, für die die Tangente an den Graphen von f parallel zur Geraden $3x - 5y = 7$ ist, sowie die Gleichungen der Tangenten an diesen Punkten.

3)(8 P.) Berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B (-1 + 2xy) dx dy$, wobei der Bereich B das Dreieck in der (x, y) -Ebene mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(6, 0)$ und $(0, 3)$ bezeichnet.

$$\int_0^6 \int_0^{-\frac{1}{2}x+3} (-1 + 2xy) dy dx = \underline{\underline{18}}$$



$$\int_0^{-\frac{1}{2}x+3} (-1 + 2xy) dy = (-y + xy^2) \Big|_0^{-\frac{1}{2}x+3}$$

$$\begin{aligned} -(-\frac{1}{2}x+3) + x(-\frac{1}{2}x+3)^2 &= \frac{1}{2}x - 3 + x\left(\frac{x^2}{4} - 3x + 9\right) \\ &= \frac{1}{2}x - 3 + \frac{x^3}{4} - 3x^2 + 9x \\ &= \frac{x^3}{4} - 3x^2 + \frac{19}{2}x - 3 \end{aligned}$$

$$\int_0^6 \left(\frac{x^3}{4} - 3x^2 + \frac{19}{2}x - 3 \right) dx =$$

$$\left(\frac{x^4}{16} - x^3 + \frac{19x^2}{4} - 3x \right) \Big|_0^6 =$$

$$81 - 216 + 171 - 18 = \underline{\underline{18}}$$

4)(8 P.) Wann nennt man eine Abbildung $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ kontrahierend? Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ differenzierbar. Warum folgt aus $|f'(x)| < 1$ für alle $x \in [a, b]$, dass f eine Kontraktion ist? Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ eine Kontraktion. Wieviele Elemente hat dann die Menge $\{x \in [a, b] \mid f(x) = x\}$ und wie können diese bestimmt werden?

Kannst nicht.

5)(8 P.) Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe “Grenzwert” und “Häufungspunkt” an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, deren Häufungspunkte genau die Elemente von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ sind? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, begründen Sie, warum es so eine Folge nicht geben kann.

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 16. Mai 2014 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

1)(8 P.) a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion $\ln(x)$ an der Anschlussstelle $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied zu a).

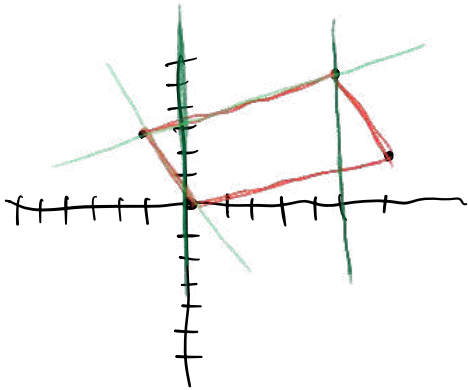
c) Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{für } x \neq 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

an der Stelle $x = 1$ stetig ist.

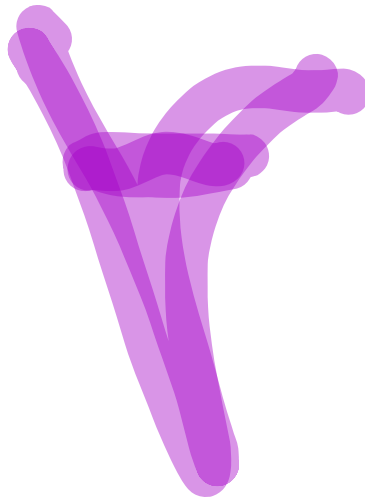
2)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{2^{2n} x^n}{n^2}$ für $|x| < 1/4$ konvergiert und für $|x| > 1/4$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1/4$ bzw. bei $x = -1/4$?

3)(8 P.) Berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B xy \, dx \, dy$, wobei der Bereich B das Rechteck in der (x, y) -Ebene mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(6, 2)$, $(5, 5)$ und $(-1, 3)$ bezeichnet.



$$\begin{aligned}y &= -3x \\y &= k \cdot x + d \\(-1, 3) \quad 3 &= -k + d \\(0, 0) \quad 0 &= d \\k &= -3\end{aligned}$$

$$\int_{-3x}^{\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}} \int_{-1}^0 xy \, dx \, dy$$



4)(8 P.) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Was bedeuten die folgenden Aussagen? a) $a_n = O(b_n)$, b) $a_n = o(b_n)$, c) $a_n \sim b_n$.

Stimmen die folgenden Schlussfolgerungen?

(Ihre Antwort muss begründet werden!)

d) Aus $a_n = o(1)$ folgt, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

e) Aus $a_n \sim b_n$ folgt $a_n - b_n = o(a_n)$.

Geben Sie weiters je zwei konkrete Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, sodass

f) $a_n = O(b_n)$, g) $a_n = o(b_n)$ gilt bzw h) $a_n = O(b_n)$ nicht gilt.

5)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Wie ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ an der Stelle (x_0, y_0) definiert? Was versteht man unter der Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$? Wie lässt sich die Richtungsableitung geometrisch interpretieren? Seien weiters zwei Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Wie lautet die Kettenregel für die Ableitung von $x \mapsto f(g(x), h(x))$?

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 3. Juli 2015 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

1)(8 P.) Untersuchen Sie mit Hilfe eines geeigneten Konvergenzkriteriums, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{3^{3n} x^n}{n^2 + 1}$ konvergiert. Beachten Sie, dass jene Stellen, wo das von Ihnen gewählte Konvergenzkriterium versagt, gesondert untersucht werden müssen!

2)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 8y' + 7y = e^x - 1.$$

$$y'' - 8y' + 7y = e^x - 1$$

Homogene Lösung:

$$y'' - 8y' + 7y = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 7}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 28}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 7$$

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{7x}$$

Partikuläre Lösung:

$$y_{p_1}(x) = y'' - 8y' + 7y = -1$$

$$+7A = -1$$

$$A = -\frac{1}{7}$$

$$y_{p_1}(x) = -\frac{1}{7}$$

$$A \cdot x \cdot e^x$$

$$A \cdot e^x + A \cdot x \cdot e^x$$

$$A e^x + A e^x + A x e^x$$

$$= 2A e^x + A x e^x$$

$$y_{p_2}(x) = y'' - 8y' + 7y = e^x$$

$$2A e^x + A x e^x - 8A e^x - 8A x e^x + 7A x e^x = e^x$$

$$-6A e^x = e^x$$

$$A = -\frac{1}{6}$$

$$y_{p_2}(x) = -\frac{x \cdot e^x}{6}$$

$$\underline{\underline{y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{7x} - \frac{x \cdot e^x}{6} - \frac{1}{7}}}$$

3)(8 P.) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x \leq 0, \\ x + \frac{2 \log(1+x)}{x} & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f an der Stelle $x = 0$ stetig und differenzierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

4)(8 P.) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, deren partielle Ableitungen bis inklusive zweiter Ordnung existieren und stetig sind. Wie kann f mit Hilfe des Satzes von Taylor im Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ linear approximiert werden? Was versteht man unter der Hesse-Matrix $H_f(a, b)$? Wie hängt $H_f(a, b)$ mit f und der linearen Approximation von f im Punkt (a, b) zusammen? Angenommen, $H_f(a, b)$ sei positiv definit, und es gelte $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Warum hat dann f an der Stelle (a, b) ein lokales Minimum?

$$(1) \quad f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Hierbei sind f_x und f_y jeweils die partiellen Ableitungen nach x bzw. y im Punkt (a, b) .

(2) Die Hesse-Matrix $H_f(a, b)$ ist die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen:

$$H_f(a, b) = \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix}$$

(3) Hesse-Matrix gibt die Krümmung im Punkt (a, b) an.

(4) Wenn die Matrix positiv definit ist, das Skalarprodukt mit dieser Matrix immer positiv.

5)(8 P.) Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie eine geometrische (d.h. anschauliche) Definition von totaler Differenzierbarkeit. Wie lassen sich die partiellen Ableitungen f_x und f_y sowie die Richtungsableitung von f in Richtung eines normierten Vektors \mathbf{v} , jeweils im Punkt (a, b) , geometrisch beschreiben? Wie lautet die Richtungsableitung von $f(x, y) = \arctan(\log(x^2)) \sin(y)$ in Richtung des Vektors $(0, 1)$ und im Punkt $(1, 0)$?

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 28. September 2015 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

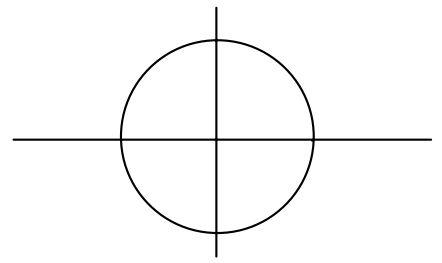
3)

4)

5)

1)(8 P.) Gegeben ist die Folge

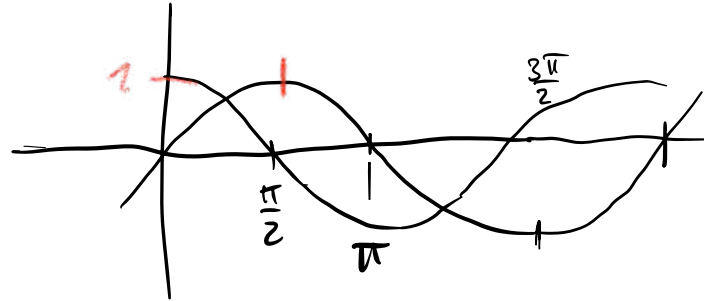
$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{\sqrt{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{n + \cos(n\pi)}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$



(a) Bestimmen Sie alle eigentlichen und uneigentlichen Häufungspunkte dieser Folge.

(b) Beweisen Sie auch, dass ausser den in (a) gefundenen Häufungspunkten keine weiteren gibt.

$$a_n = \frac{\sqrt{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{n + \cos(n\pi)}}$$



e)

$$a_{4n} = \frac{\sqrt{4n} \cdot \sin(2n\pi)}{\sqrt{4n + \cos(4n\pi)}} = 0$$

$$a_{4n+1} = \frac{\sqrt{4n+1} \cdot \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{4n+1 + \cos(2n\pi + \pi)}} = \frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{4n}}$$

$$a_{4n+2} = \frac{\sqrt{4n+2} \cdot \sin(2n\pi + \pi)}{\sqrt{4n+2 + \cos(2n\pi + 2\pi)}} = 0$$

$$a_{4n+3} = \frac{\sqrt{4n+3} \cdot \sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right)}{\sqrt{4n+3 + \cos(2n\pi + 3\pi)}} = -\frac{\sqrt{4n+3}}{\sqrt{4n+2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{4n}) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{4n+1}) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{4n+2}) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{4n+3}) = -1$$

(b) Die Teilfolgen decken alles ab \Rightarrow
keine anderen
Häufungspunkte

2)(8 P.) Man beweise mit Hilfe des Integralkriteriums, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)e^{-n}$$

konvergent ist.

$$\int u'v = uv - \int uv'$$

$$u' = e^{-x} \quad v = 1$$

$$u = -e^{-x} \quad v' = x+1$$

$$\int_1^{\infty} (x+1)e^{-x} dx =$$

$$\left(-\frac{x+1}{e^x}\right) \Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} e^{-x} dx =$$

$$\frac{2}{e} + \left(-\frac{1}{e^x}\right) \Big|_1^{\infty} = \frac{2}{e} + \frac{1}{e} = \underline{\underline{\frac{3}{e}}}$$

3)(8 P.) Bestimmen Sie alle relativen Extrema und alle Sattelpunkte der Funktion

$$f(x, y) = \cos(x^2 + 2y) + x^2.$$

Bemerkung: Sie dürfen ohne Beweis die Tatsache verwenden, dass eine symmetrische 2×2 -Matrix genau dann indefinit ist, wenn ihre Determinante negativ ist.

4)(8 P.) Was versteht man darunter, dass eine reelle Funktion f im Punkt x_0 stetig ist? (Geben Sie die exakte ϵ - δ -Definition an!)

Erklären Sie anhand dieser Definition, warum die Funktion $f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{f. } x \leq 0 \\ 1 & \text{f. } x > 0 \end{cases}$

unstetig im Punkt $x_0 = 0$ ist. Warum ist die Funktion $f_2 : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig? Gibt es eine (auf ihrem gesamten Definitionsbereich) stetige Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $(0, 1]$ mit f_2 übereinstimmt? (Begründung!)

5)(8 P.) Gegeben ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie eine geometrische (d.h. anschauliche) Definition von totaler Differenzierbarkeit. Wie lassen sich die partiellen Ableitungen f_x und f_y sowie die Richtungsableitung von f in Richtung eines normierten Vektors \mathbf{v} , jeweils im Punkt (a, b) , geometrisch beschreiben? Wie lautet die Richtungsableitung von $f(x, y) = \arctan(\log(x^2)) \sin(y)$ in Richtung des Vektors $(0, 1)$ und im Punkt $(1, 0)$?

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 20. November 2015 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

1)(8 P.) Berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B x \cdot |y| \, dx \, dy$, wobei der Bereich B das Rechteck in der (x, y) -Ebene mit den Eckpunkten $(-1, -2)$, $(-1, 3)$, $(2, 3)$ und $(2, -2)$ bezeichnet.

2)(8 P.) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen. Beweisen Sie mit Hilfe eines indirekten Beweises, dass aus $a_n \leq b_n$ immer $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ folgt. Stimmt diese Behauptung immer noch, wenn die beiden \leq durch $<$ ersetzt werden (Beweis oder Gegenbeispiel)?

1) Wenn $a_n \leq b_n$ dann folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Indirekter Beweis:

Nehmen wir das Gegenteil der zu beweisenden

Aussage $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$a_n > b_n + \varepsilon$ für unendlich viele n .

Dies steht jedoch im Widerspruch zu unserer

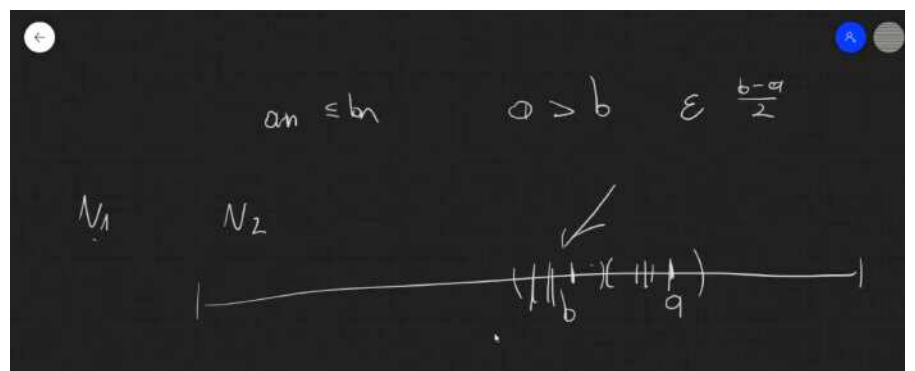
Voraussetzung das $a_n \leq b_n$ für alle n . \Rightarrow Annahme ist falsch

Daher muss $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ sein.

Gegenbeispiel

$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \rightarrow$ jedes Folgenglied ist kleiner

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+2}\right) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) \rightarrow$ beide gehen gegen $\underline{0}$.



3)(8 P.) Man berechne den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$e^{\ln(f(x))}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \quad / \ln$$

$$\ln(L) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} 2^x &= \frac{d}{dx} e^{\ln(2)x} = e^{\ln(2)x} \cdot \ln(2) \\ &= 2^x \cdot \ln(2) \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{2} \right)}{x} \quad \Rightarrow \text{L'Hospital}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \cdot \ln(2) - 2^{-x} \cdot \ln(2)}{2^x + 2^{-x}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \cdot \ln(2) - 2^{-x} \cdot \ln(2)}{(2^x + 2^{-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2)(2^x - 2^{-x})}{2^x + 2^{-x}} = 0$$

$$\ln(L) = 0$$

$$L = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

4)(8 P.) Wie kann man eine Funktion $f(x)$ mit Hilfe des Satzes von Taylor quadratisch approximieren. Sei $T(x)$ die quadratische Approximation von $f(x)$. Geben Sie einen exakten Ausdruck für den Fehler $f(x) - T(x)$ an. Bestimmen Sie für $x = 1/2$ eine obere Schranke für $|f(x) - T(x)|$ an, falls (a) $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$ bzw. (b) $f(x) = e^x$.

$$(1) \quad T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

$$(2) \quad R_2(x) = f(x) - T_2(x)$$

$$R_2 = \frac{f'''(\xi)}{6}(x - x_0)^3$$

$$(3) \quad x = \frac{1}{2} \quad x_0 = 0 \quad \overset{\circ}{I} = (0, \frac{1}{2})$$

$$(a) \quad f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$f'(x) = (1-x) \left(-\frac{1}{(1-x)^2}\right) = -\frac{1}{1-x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{(1-x)^3}$$

$$R_2 = -\frac{1}{6 \cdot (1-\xi)^3} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{48(1-\xi)^3}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \text{ Fehler: } \left| -\frac{1}{6} \right| = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - T_2\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{6}$$

$$(b) \quad f'''(x) = e^x$$

$$R_2 = \frac{e^\xi}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{e^\xi}{48}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \text{ Fehler: } \left| \frac{\sqrt{e}}{48} \right|$$

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - T_2\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{\sqrt{e}}{48}$$

5)(8 P.) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Definieren Sie die Begriffe "relatives Maximum (Minimum)" und "absolutes Maximum (Minimum)" von f . Geben Sie weiters je eine notwendige und eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums von f an. Prüfen Sie, ob die Funktion $f(x, y) = 3xy + y^3 - 10x - 5y$ im Punkt $(3, 1)$ ein relatives Extremum besitzt.

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f besitzt an der Stelle $x_0 \in D$ ein relatives Maximum (bzw. Minimum), wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt, so dass für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap D$ gilt: $f(x) < f(x_0)$ (bzw. $f(x) > f(x_0)$).

Eine Stelle x_0 heißt absolutes Maximum (bzw. Minimum) von f , falls diese Ungleichung für alle $x \in D$ gilt.

Notwendige Bedingung:

Falls die partiellen Ableitungen erster Ordnung existieren müssen diese beide Null sein.

$$\text{Also } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Hinreichende Bedingung:

Es handelt sich um ein relatives Extremum falls die Determinante der Hesse-Matrix positiv ist, und abhängig ob die zweiten partiellen Ableitungen negativ oder positiv sind handelt es sich um ein Maximum oder Minimum.

$$f(x, y) = 3xy + y^3 - 10x - 5y \quad P(3, 1)$$

$$f_x = \frac{df}{dx}(x, y) = 3y - 10$$

$$f_x(3, 1) = 3 \cdot 1 - 10 = -7$$

$$f_y = \frac{df}{dy}(x, y) = 3x + 3y^2 - 5$$

$$f_y(3, 1) = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1^2 - 5 = 1$$

Da $f_x(3, 1)$ und $f_y(3, 1)$ nicht beide Null sind kann $P(3, 1)$ kein relatives Extremum sein.

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 22. Jänner 2016 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Berechnen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{(n+2)!}$.

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{(n+2)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right)$$

\Rightarrow Teleskopsumme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+2)!} \right) = \underline{\underline{1}}$$

2)(8 P.) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die für alle $x, y \in [a, b]$ die Ungleichung

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass f auf dem Intervall $[a, b]$ konstant ist.

3)(8 P.) Durch $z = \frac{xy}{x+y}$ ist eine Fläche im \mathbb{R}^3 gegeben. Die Beschränkung von x und y auf die Werte $x = e^t$ und $y = e^{-t}$ ($t \in \mathbb{R}$) definiert eine Kurve auf dieser Fläche. Bestimmen Sie $\frac{dz}{dt}$ mit Hilfe der Kettenregel. Machen Sie anschließend die Probe, indem Sie zuerst x und y in z einsetzen und dann nach dem Parameter t differenzieren. Wo verläuft diese Kurve auf der Fläche horizontal?

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt}(x,y) &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \left(\frac{y}{x+y} - \frac{xy}{(x+y)^2} \right) \cdot e^t - \left(\frac{x}{x+y} - \frac{xy}{(x+y)^2} \right) \cdot e^{-t} \\ &= \left(\frac{e^{-t}}{e^t+e^{-t}} - \frac{1}{(e^t+e^{-t})^2} \right) \cdot e^t - \left(\frac{e^t}{e^t+e^{-t}} - \frac{1}{(e^t+e^{-t})^2} \right) \cdot e^{-t} \\ &= \frac{1}{e^t+e^{-t}} - \frac{e^t}{(e^t+e^{-t})^2} - \frac{1}{e^t+e^{-t}} + \frac{e^{-t}}{(e^t+e^{-t})^2} \\ &= \frac{e^{-t} - e^t}{(e^t+e^{-t})^2} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} \frac{e^t \cdot e^{-t}}{e^t + e^{-t}} &= \frac{1}{e^t + e^{-t}} \\ \frac{d}{dt} \frac{1}{e^t + e^{-t}} &= -\frac{1}{(e^t + e^{-t})^2} \cdot (e^t - e^{-t}) = \frac{e^{-t} - e^t}{(e^t + e^{-t})^2} \end{aligned}$$

$$(e^t + e^{-t})^{-1}$$

$$\frac{e^{-t} - e^t}{(e^t + e^{-t})^2} = 0$$

$$e^{-t} = e^t \quad | \ln$$

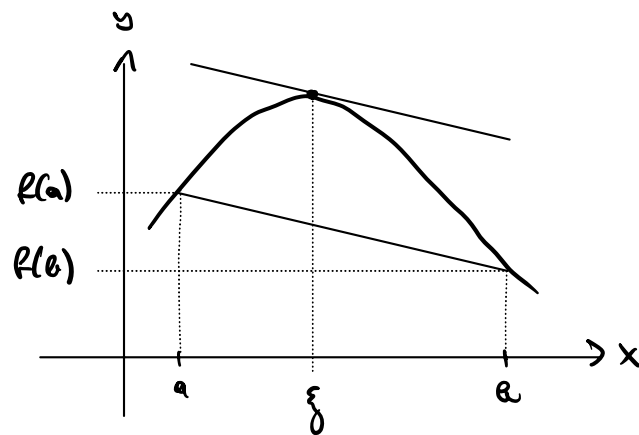
$$-t = t$$

$$2t = 0$$

$$\underline{\underline{t = 0}}$$

Das passiert bei $t = 0$ bzw. im Punkt $(1|1)$.

- 4)(8 P.) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und illustrieren Sie ihn durch eine Skizze.
(Der Zusammenhang zwischen Skizze und Aussage des Satzes muss genau erklärt werden!)



Sei f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Dann gibt es einen Punkt $\xi \in (a, b)$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Es gibt also mindestens eine Stelle ξ , wo die Tangente parallel zur Geraden ist die $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verbindet.

5)(8 P.) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Was versteht man unter (i) der Beschränktheit von f , (ii) einer Zerlegung Z von $[a, b]$ und der Feinheit von Z , (iii) der Obersumme von f über $[a, b]$? Wie lautet das Riemannsches Integrierbarkeitskriterium?

- (1) Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $x \in [a, b]$ gilt, dass $|f(x)| \leq M$.
- (2) Eine Zerlegung Z von $[a, b]$ ist eine endliche Folge von Punkten x_0, \dots, x_n sodass $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Diese Punkte unterteilen das Intervall in kleinere Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Die Länge des größten solchen Teilintervalls wird als die Feinheit bezeichnet.
- (3) Die Obersumme über einer Funktion f und einer Zerlegung Z ist definiert als die Summe der Produkte aus der Länge jedes Teilintervalls und dem maximalen Funktionswert in diesem Teilintervall.

Riemannsches Integrierbarkeitskriterium.

Eine auf dem Intervall $[a, b]$ beschränkte Funktion f ist genau dann integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ gibt, sodass die zugehörige Obersumme $O_Z(f)$ und Untersumme $U_Z(f)$ die Ungleichung

$$O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon \text{ gilt.}$$

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 11. März 2016 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

- 1)(8 P.) a) Beweisen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung, dass für alle $x > 0$ die Ungleichung $\ln(x) < \frac{x}{2}$ gilt.
Hinweis: Wo ist die Differenz der beiden Seiten der beiden Seiten der Ungleichung minimal?
- b) Leiten Sie aus a) die folgende Ungleichung her:
Für alle positiven natürlichen Zahlen n gilt $\ln(n) < \sqrt{n}$.
- c) Benutzen Sie b), um die Konvergenz der Folge $a_n = \frac{\ln n}{n}$ zu zeigen, indem Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein passendes $N(\varepsilon)$ angeben.

2)(8 P.) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(x)^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln(x)}$$

Exponent

$$x \cdot \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \text{L'Hospital} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{x^2}{x} = -x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = \underline{\underline{0}} \quad e^0 = \underline{\underline{1}}$$

3)(8 P.) Bestimmen Sie jene Lösung der linearen Differentialgleichung $2y'' + 3y' - 5y = 0$, die den Anfangsbedingungen $y(0) = 3/2$, $y'(0) = -5$ genügt.

$$2y'' + 3y' - 5y = 0$$

$$2\lambda^2 + 3\lambda - 5 = 0$$

$$\sqrt{49} = 7$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4}$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-3 \pm 7}{4} \quad \lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

$$y = \underline{\underline{C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-\frac{5}{2}x}}}}$$

$$y' = C_1 \cdot e^x - \frac{5}{2} \cdot C_2 \cdot e^{-\frac{5}{2}x}$$

$$\frac{3}{2} = C_1 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{3}{2} - C_1$$

$$-5 = C_1 - \frac{5}{2} C_2$$

$$-5 = C_1 - \frac{5}{2} \left(\frac{3}{2} - C_1 \right)$$

$$-5 = C_1 - \frac{15}{4} + \frac{5}{2} C_1$$

$$-\frac{5}{4} = \frac{7}{2} C_1$$

$$-\frac{5}{14} = C_1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = \frac{3}{2} - \left(-\frac{5}{14} \right) = \frac{26}{14} = \frac{13}{7}$$

$$y(x) = \underline{\underline{-\frac{5}{14} \cdot e^x + \frac{13}{7} \cdot e^{-\frac{5}{2}x}}}}$$

4)(8 P.) Was versteht man (anschaulich) unter dem bestimmten Integral einer reellwertigen Funktion f über einem Intervall $[a, b]$? Wann heißt so ein Integral uneigentlich? Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral und berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^y e^{\tan(z^2)} dz.$$

5)(8 P) 1) Wie lautet die Taylorreihenentwicklung einer unendlich oft differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (mit Anschlussstelle x_0)?

2) Wie lautet das Taylorsche Näherungspolynom zweiten Grades einer Funktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (mit Anschlussstelle (x_0, y_0))?

$$1) T(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n$$

$$2) T(x, y) = f(x_0, y_0) + (f_x(x_0, y_0)(x-x_0) + f_y(x_0, y_0)(y-y_0)) \\ + \frac{1}{2} (f_{xx}(x_0, y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \\ f_{yy}(x_0, y_0)(y-y_0)^2) + R_n$$

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 6. Mai 2016 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

1)(8 P.) Berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B x \cdot |y| \, dx \, dy$, wobei der Bereich B das Rechteck in der (x, y) -Ebene mit den Eckpunkten $(-1, -2)$, $(-1, 3)$, $(2, 3)$ und $(2, -2)$ bezeichnet.

2)(8 P.) a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion $\ln(x)$ an der Anschlussstelle $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied zu a).

c) Untersuchen Sie mit Hilfe der Ergebnisse von a) und b), ob die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{für } x \neq 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist.

3)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{2^{2n} x^n}{n^2}$ für $|x| < 1/4$ konvergiert und für $|x| > 1/4$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1/4$ bzw. bei $x = -1/4$?

4)(8 P.) Definieren Sie die Begriffe partielle Ableitung, Richtungsableitung, Gradient für Funktionen in zwei Variablen und geben Sie jeweils ein Beispiel an.

Partielle Ableitung:

Bei der partiellen Ableitung wird eine Funktion im Bezug auf eine ihrer Variablen abgeleitet, nur diese Variable wird als veränderlich betrachtet und alle anderen als Konstanten.

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $(x_0, y_0) \in D$, so heißt f in (x_0, y_0) partiell nach x differenzierbar, falls der Grenzwert

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \text{ existiert.}$$

Bsp: $f(x, y) = yx^3 + y^3 + 2x \quad f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3yx^2 + 2$

Richtungsableitung:

Die Richtungsableitung gibt die Rate an in der sich eine Funktion in einem gegebenen Punkt in eine gegebene Richtung ändert.

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cdot \vartheta) - f(x)}{t} = \text{grad } f(x) \cdot \vartheta$$

Bsp: $f(x, y) = x^2 + y^2 \quad v = (1, 1) \quad x = (1, 1)$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{4}}$$

Gradient:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} \quad \text{Gradient von } f.$$

Bsp: $f(x) = 3x^2 + 4y \quad \text{grad } f = \begin{pmatrix} 6x \\ 4 \end{pmatrix}$

5)(8 P.) Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, deren Häufungspunkte genau die Elemente von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ sind? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, begründen Sie, warum es so eine Folge nicht geben kann.

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 4. Juli 2017 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\underline{\Gamma(x)} = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Warum ist $\Gamma(x)$ ein uneigentliches Integral? Beweisen Sie, dass $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für $x > 0$ gilt und leiten Sie daraus die Identität $\Gamma(n+1) = n!$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ her.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt$$

$$= (-e^{-t} t^x) \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$= \underbrace{-\frac{t^x}{e^t} \Big|_0^{\infty}}_{\Downarrow 0} + x \Gamma(x) = \underline{\underline{x \cdot \Gamma(x)}}$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u v'$$

$$u' = e^{-t} \quad v' = x \cdot t^{x-1}$$

$$u = -e^{-t} \quad v = t^x$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-t} dt$$

$$= (-e^{-t}) \Big|_0^{\infty} = -\frac{1}{e^{\infty}} + \frac{1}{e^0} = \underline{\underline{1}}$$

2)(8 P.) Bestimmen Sie alle relativen Extrema der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20.$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$$

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 3$$

$$f_y(x, y) = 3y^2 - 12$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y$$

$$f_{xy}(x, y) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$3y^2 - 12 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$P_1(1|2) \quad P_2(1|-2)$$

$$P_2(-1|2) \quad P_3(-1|-2)$$

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$$

$$P_1: H_f(P_1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \det H_f(P_1) = 6 \cdot 12 = 72 \Rightarrow \text{relatives Minimum.}$$

$$P_2: H_f(P_2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \quad \det H_f(P_2) = -72 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$P_3: H_f(P_3) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \det H_f(P_3) = -72 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$P_4: H_f(P_4) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \quad \det H_f(P_4) = 72 \Rightarrow \text{relatives Maximum}$$

3)(8 P.) Berechnen Sie unter Benützung der komplexen Zahlen und der Moivreschen Formel $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\sin \frac{n\pi}{6}}{2^n}.$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\sin \left(\frac{n\pi}{6} \right)}{2^n} = \operatorname{Im} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{\cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right)}{2^n} \right)$$

$$\sum_{n \geq 0} \underbrace{\left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} \right)}{2} \right)^n}_q$$

$$|q| = \sqrt{\left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{6} \right)}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{6} \right)}{2} \right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\cos^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} \right)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad \left| \frac{1}{2} \right| < 1 \Rightarrow$$

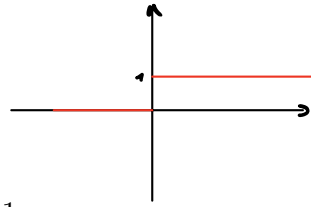
$$\sum_{n \geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{6} \right)}{2} + i \frac{\sin \left(\frac{\pi}{6} \right)}{2} \right)} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{6} \right)}{2} + i \frac{\sin \left(\frac{\pi}{6} \right)}{2} \right)} = \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{6} \right)}{2} + i \frac{\sin \left(\frac{\pi}{6} \right)}{2} \right) \right) \left(1 - \left(\frac{\cos \left(\frac{\pi}{6} \right)}{2} - i \frac{\sin \left(\frac{\pi}{6} \right)}{2} \right) \right)}$$

4)(8 P.) Was versteht man darunter, dass eine reelle Funktion f im Punkt x_0 stetig ist? (exakte ε - δ -Definition und auch anschaulich!)

Erklären Sie anhand der ε - δ -Definition, warum die Funktion

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{f. } x \leq 0 \\ 1 & \text{f. } x > 0 \end{cases}$$



unstetig im Punkt $x_0 = 0$ ist.

Warum ist die Funktion

$$f_2 : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{1}{x}$$

auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig?

Gibt es eine auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetige Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $(0, 1]$ mit f_2 übereinstimmt? (Begründung!)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Wir geben uns eine Toleranz ε vor und erlauben es $f(x)$ nicht immer halb des Intervalls $f(x_0) \pm \varepsilon$ zu bewegen. Genau dem löst sich immer ein Intervall $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ finden sodass die Funktion dieses Intervall nicht verlässt, wenn sie stetig ist.

2) Widerspruchsbeweis

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad x_0 = 0$$

\Downarrow

$$|x| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)| < \frac{1}{2}$$

$|x| < \delta(\varepsilon)$ bedeutet das $x \in (-\delta(\varepsilon), +\delta(\varepsilon))$

weil $\delta(\varepsilon) > 0 \Rightarrow \exists x^* \in (-\delta(\varepsilon), \delta(\varepsilon))$ so das $x^* > 0$ ist.

$|x^*| < \delta(\varepsilon)$ aber $|f(x^*)| = 1$ damit ist die Funktion nicht stetig.

3) Wenn $g(x)$ stetig auf einem Intervall I ist und $f(x)$ ist stetig auf $g(I)$ so ist $f(g(x))$ stetig auf I .

$\frac{1}{x}$ ist stetig auf $(0, 1]$, $\sin(x)$ ist stetig auf ganz \mathbb{R} , dennoch ist $\sin(\frac{1}{x})$ stetig auf $(0, 1]$.

4) Nein, da $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ nicht existiert kann keine solche Funktion gefunden werden.

5)(8 P.) Was ist eine Potenzreihe?

Was versteht man unter dem Konvergenzradius einer Potenzreihe?

(Bemerkung: Es ist bei dieser Frage nicht die Formel zur Berechnung des Konvergenzradius gefragt!)

Wie kann man den Konvergenzradius einer Potenzreihe berechnen?

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die man um einen Punkt a in eine Potenzreihe entwickeln kann? Wie lautet in diesem Fall die Potenzreihe von $f(x)$?

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 29. September 2017 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

1)(8 P.) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ erfüllt.

Zeigen Sie: a) f ist stetig auf ganz \mathbb{R} . b) f ist eine konstante Funktion.

$$e) \quad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2 \quad | : |x - y|$$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq |x - y| \quad | \lim_{x \rightarrow y}$$

$$\lim_{x \rightarrow y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \lim_{x \rightarrow y} |x - y|$$

$$|f'(y)| \leq 0 \quad \rightarrow \text{aus } |x| \leq 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f'(y) = 0$$

Da die erste Ableitung überall für jedes $y \in \mathbb{R}$ $f'(y) = 0$, so muss $f(x)$ konstant sein.

a) Definition der Stetigkeit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Wir wählen einen beliebigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$

$$|x - x_0| < \sqrt{\varepsilon}$$

\Downarrow

$$|x - x_0|^2 < \varepsilon$$

\Downarrow aufgrund der Angabe

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Deher ist f stetig für alle $x \in \mathbb{R}$

2)(8 P.) Gegeben ist die Differentialgleichung $x^2 y'' - 6y = 12 \ln x$.

- 1) Beschreiben Sie den Typ dieser Differentialgleichung (linear/nichtlinear, homogen/inhomogen, Ordnung, etc.)!
 - 2) Beweisen Sie, dass für alle $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ die Funktion $C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2 \ln x + \frac{1}{3}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist!
 - 3) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung!
- Bestimmen Sie die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = \frac{2}{3}$,
 4) $y'(1) = -1$.

1) lineare, inhomogen, 2. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten.

$$2) \quad x^2 y'' - 6y = 12 \ln(x)$$

$$x = e^t \quad y(x) = z(t)$$

$$t = \ln(x) \quad y(x) = z(\ln(x))$$

$$y' = \frac{d}{dx} z(\ln(x)) = \frac{z'(\ln(x))}{x} = \frac{z'(t)}{e^t}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \frac{z'(\ln(x))}{x} = \frac{z''(\ln(x)) - z'(\ln(x))}{x^2} = \frac{z''(t) - z'(t)}{e^{2t}}$$

$$x^2 y'' - 6y = 0$$

$$z''(t) - z'(t) - 6z(t) = 0$$

$$z'' - z' - 6z = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - \lambda e^{\lambda t} - 6e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -2$$

$$z(t) = C_1 \cdot e^{3t} + C_2 \cdot e^{-2t}$$

$$y(x) = C_1 \cdot x^3 + \frac{C_2}{x^2}$$

$$z'' - z - 6z = 12t \quad z_p(t) = At + B$$

$$0 - A - 6(At + B) = 12t$$

$$-A - 6At - 6B = 12t$$

$$\begin{cases} -6A = 12 \\ A = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} -A - 6B = 0 \\ 2 = 6B \\ B = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$z_p(t) = -2t + \frac{1}{3}$$

$$y_p(t) = -2 \cdot \ln(x) + \frac{1}{3}$$

$$y(x) = C_1 \cdot x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2 \ln(x) + \frac{1}{3}$$

$$y'(x) = 3C_1 x^2 - \frac{2C_2}{x^3} - \frac{2}{x}$$

$$y(1) = \frac{2}{3}$$

$$y'(1) = -1$$

$$\frac{2}{3} = C_1 + C_2 + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = C_1 + C_2 \Rightarrow \frac{1}{3} - C_2 = C_1$$

$$-1 = 3C_1 - 2C_2 - 2$$

$$1 = 3C_1 - 2C_2$$

$$1 = 1 - 3C_2 - 2C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{1}{3}$$

$$y(x) = \frac{1}{3} x^3 - 2 \ln(x) + \frac{1}{3}$$

3)(8 P.) Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{1}{(3n+1)^2} + \frac{1}{(3n+3)^2} + \frac{1}{(3n+5)^2} + \dots + \frac{1}{(3n+2n+1)^2}$$

(1) Schreiben Sie die Folge kompakter in der Form $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(3n+2k+1)^2}$ auf, in dem Sie die Fragezeichen durch passende Ausdrücke ersetzen!

(2) Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(3) Zeigen Sie weiters, dass $a_n - a = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$(1) \quad a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(3n+2k+1)^2}$$

(2) Majorantenkriterium:

Die Reihe ist von unten mit 0 beschränkt da alle Terme positiv sind, des weiteren wird jedes Folgeglied kleiner

$$a_n = \frac{1}{(3n+2k+1)^2} \quad 0 \leq a_n \leq \frac{1}{(3n+1)^2} \cdot n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(3n+1)^2} = \frac{n}{9n^2+6n+1} = \frac{n^2 \left(\frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(9 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{9} = \underline{\underline{0}}$$

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\underline{0}}$$

$$(3) \quad a_n - a = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^n \frac{1}{(3n+1+2k)^2}}{\frac{1}{n}} \right| \leq C \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{(3n+1+2k)^2} \leq \frac{n^2}{(3n+1)^2} \leq C$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(3n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2 \left(9 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$$

Da ein $C = \frac{1}{9}$ existiert, gilt $a_n - a = O\left(\frac{1}{n}\right)$

4)(8 P.) Gegeben ist eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) Geben Sie eine geometrische (d.h. anschauliche) Definition von totaler Differenzierbarkeit.
- 2) Wie lässt sich die Richtungsableitung von f in Richtung eines normierten Vektors \mathbf{v} im Punkt (a, b) geometrisch beschreiben?
- 3) Wie lautet die Richtungsableitung von $f(x, y) = (1 + 2x) \arctan(\ln(2y^2))$ in Richtung des Vektors $(1, 0)$ im Punkt $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$?

1) Eine geometrische Definition von totaler Differenzierbarkeit ist, dass die Funktion $f(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) der Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0) ähnelt. Die partielle Ableitungen sind der Anstieg der Tangentialebene in diese Richtung.

2) Die Richtungsableitung gibt an wie stark diese Tangentialebene in die Richtung des Vektors ansteigt.

3)

$$f(x, y) = (1 + 2x) \cdot \arctan(\ln(2y^2)) \quad \mathbf{v} = (1, 0)$$
$$x = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \cdot \arctan(\ln(2y^2))$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (1 + 2x) \cdot \frac{1}{\ln(2y^2)^2 + 1} \cdot \frac{1}{2y^2} \cdot 4y = \frac{2 + 4x}{y(\ln(2y^2)^2 + 1)}$$

$$f_x(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2 \cdot \arctan(\ln(2 \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}})^2))$$

$$= 2 \cdot \arctan(\ln(1)) = 2 \cdot \arctan(0) = 0$$

$$f_y(0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2 + 4 \cdot 0}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\ln(1)^2 + 1)} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

5)(8 P.) Wie ist die Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in (a, b)$

1) definiert?

2) Rechnen Sie $(x^2)' = 2x$ mit Hilfe dieser Definition nach!

3) Wie lautet die Kettenregel fürs Differenzieren? Geben Sie eine vollständige Formulierung in Form eines mathematischen Theorems, d.h. gefordert ist eine Formulierung in ganzen Sätzen, die auch alle nötigen Voraussetzungen angibt!

4) Sei $g = f^{-1}$. Weiters gelte, dass f und g differenzierbar sind und dass $f'(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass dann $g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x+x_0)\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} x+x_0 = \underline{2x_0}$$

$$3) \quad f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Die Ableitung der zusammengesetzten Funktion an der Stelle x ist das Produkt der Ableitung von f an der Stelle $g(x)$ und der Ableitung von g an der Stelle x .

$$4) \quad g = f^{-1} \qquad g'(f(x_0))$$

$$g(f(x)) = x$$

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

↓
einsetzen $x = x_0$

$$g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

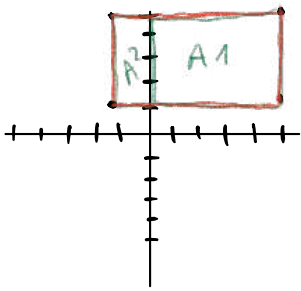
(GITTENBERGER)

Wien, am 24. November 2017 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

1)(8 P.) $\iint_B (|x|y + x^2 - y^2) dx dy$, wobei $B \subset \mathbb{R}^2$ der Rechtecksbereich sei, welcher durch die Eckpunkte $(-1, 1)$, $(5, 1)$, $(5, 5)$ und $(-1, 5)$ bestimmt ist.



$$B = [-1, 5] \times [1, 5]$$

$$\iint_B (|x|y + x^2 - y^2) dx dy$$

$$\int_1^5 \left(\int_{-1}^5 (|x|y + x^2 - y^2) dx \right) dy = \underline{\underline{76}}$$

$$A_1: \int_1^5 \int_0^5 (xy + x^2 - y^2) dx dy = \int_1^5 \left(\frac{25y}{2} + \frac{125}{3} - 5y^2 \right) dy =$$

$$A_2: \int_1^5 \left(-\int_{-1}^0 xy dx + \int_{-1}^0 x^2 - y^2 dx \right) dy = \int_1^5 \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{3} + y^2 \right) dy =$$

$$\int_0^5 (xy + x^2 - y^2) dx = \left(\frac{x^2 y}{2} + \frac{x^3}{3} - xy^2 \right) \Big|_0^5 = \frac{25y}{2} + \frac{125}{3} - 5y^2$$

$$-\int_{-1}^0 xy dx = -\left(\frac{x^2 y}{2} \right) \Big|_{-1}^0 = \frac{y}{2}$$

$$\int_{-1}^0 x^2 - y^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} - xy^2 \right) \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{3} + y^2$$

$$\int_1^5 \left(\frac{25y}{2} + \frac{125}{3} - 5y^2 \right) dy = \left(\frac{25y^2}{4} + \frac{125}{3}y - \frac{5y^3}{3} \right) \Big|_1^5 =$$

$$= \frac{25 \cdot 25}{4} + \frac{125 \cdot 5}{3} - \frac{5 \cdot 125}{3} - \left(\frac{25}{4} + \frac{125}{3} - \frac{5}{3} \right) =$$

$$= \frac{625}{4} + \frac{625}{3} - \frac{625}{3} - \frac{25}{4} - \frac{125}{3} + \frac{5}{3} = \frac{600}{4} - \frac{120}{3} = 150 - 40 = \underline{\underline{110}}$$

$$\int_1^5 \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{3} + y^2 \right) dy = \left(\frac{y^2}{4} - \frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^5 =$$

$$= \frac{25}{4} - \frac{5}{3} + \frac{125}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{25}{4} - \frac{120}{3} - \frac{1}{4} = 6 - 40 = \underline{\underline{-34}}$$

$$110 - 34 = \underline{\underline{76}}$$

2)(8 P.) Gegeben sind zwei differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Beweisen Sie die folgende Formel mittels vollständiger Induktion!

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{d^k}{dx^k} f(x) \right) \cdot \left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} g(x) \right)$$

116:

Beweisen Sie die folgende Formel mittels vollständiger Induktion!

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{d^k}{dx^k} f(x) \right) \cdot \left(\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} g(x) \right)$$

IA: $n=0$ $f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)$ ✓

IB: $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(\frac{d^k}{dx^k} f(x) \right) \cdot \left(\frac{d^{n-k+1}}{dx^{n-k+1}} g(x) \right)$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d^n}{dx^n} (f(x)g(x)) \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) \right)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x) \right)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x) \right)$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x)$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \cdot f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x)$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k+1)}(x)$$

3)(8 P.) Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{\ln x} \right)^{1/\ln x}$$

Anleitung: Stellen Sie die Funktion mit Hilfe der Identität $f(x) = e^{\ln(f(x))}$ in der Form $e^{a(x)/b(x)}$ dar. Bestimmen Sie dann $c = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x)}{b(x)}$. Der gesuchte Grenzwert ist dann e^c . (Warum gilt das?)

$$f(x) = \left(\frac{x}{\ln(x)} \right)^{\frac{1}{\ln(x)}} \quad f(x) = e^{\ln(f(x))}$$

Exponent:

$$\ln \left(\left(\frac{x}{\ln(x)} \right)^{\frac{1}{\ln(x)}} \right) = \frac{1}{\ln(x)} \cdot \ln \left(\frac{x}{\ln(x)} \right) = \frac{1}{\ln(x)} \left(\ln(x) - \ln(\ln(x)) \right)$$

$$= 1 - \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \right) = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} \right) \xrightarrow{\text{L'Hospital}} = 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{x \ln(x)}}{\frac{1}{x}} \right) =$$

$$= 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x \cdot \ln(x)} \right) = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\text{Grenzwert: } e^1 = \underline{\underline{e}}$$

4)(8 P.) Sei $f(x, y)$ eine reellwertige Funktion. Wie ist die partielle Ableitung von f im Punkt (x_0, y_0) definiert? Wie lautet die Kettenregel für das Ableiten von $F(x) = f(u(x), v(x))$? Wie berechnet man die Ableitung von $y(x)$, wenn $y(x)$ die Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ ist? (Begründung! Welche Voraussetzungen legen Sie bei Ihrer Antwort zugrunde?)

5)(8 P.) Sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte, reellwertige und beschränkte Funktion. Was versteht man unter einer Riemann'schen Zwischensumme von f über $[a, b]$? Wie ist das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[a, b]$ definiert? Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f , für die das bestimmte Integral über dem Intervall $[a, b]$ nicht existiert. Begründen Sie auch, warum es nicht existiert. Wie ist das unbestimmte Integral der Funktion f definiert?

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 30. Jänner 2018 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Skizzieren Sie mit Hilfe der Isoklinen das Richtungsfeld der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{xy}{x^2 + 1}$$

und finden Sie die allgemeine Lösung.

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{x}{x^2 + 1} \frac{du}{2x}$$

$$u = x^2 + 1$$
$$\frac{du}{dx} = 2x$$
$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$\ln(y) = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$y = e^{-\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C}$$

$$y = (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^C$$

$$y = \frac{e}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

2)(8 P.) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

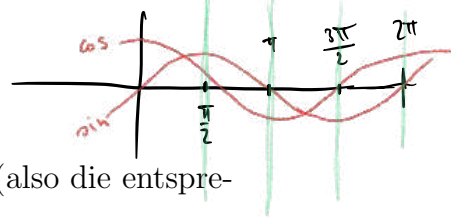
Bestimmen Sie alle Richtungsableitungen im Punkt $(0, 0)$.

Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2)$.

Untersuchen Sie, ob $f(x, y)$ im Punkt $(0, 0)$ total differenzierbar ist.

$$T_1 = -1 - x + 2 - y$$

$$T_1 = -x - y$$



3)(8 P.) Man bestimme die lineare und die quadratische Approximation (also die entsprechenden Taylorpolynome) der Funktion

$$f(x, y) = e^{x+y-3} \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right)$$

für den Entwicklungspunkt $(x, y) = (2, 1)$.

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + (f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)) \\ + \frac{1}{2} (f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\ + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) + R_n$$

$$f(x, y) = e^{x+y-3} \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right)$$

$$f_x(x, y) = e^{x+y-3} \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) - \frac{\pi y}{2} \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) \cdot e^{x+y-3}$$

$$f_y(x, y) = e^{x+y-3} \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) - \frac{\pi x}{2} \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) \cdot e^{x+y-3}$$

$$f_{xx}(x, y) = e^{x+y-3} \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) - \frac{\pi y}{2} \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) \cdot e^{x+y-3}$$

$$- \frac{\pi y}{2} \left(\frac{\pi y}{2} \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) \cdot e^{x+y-3} + \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) \cdot e^{x+y-3} \right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) e^{x+y-3} - \frac{\pi y}{2} \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) \cdot e^{x+y-3}$$

$$- \frac{\pi^2 y^2}{4} \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) \cdot e^{x+y-3} - \frac{\pi y}{2} \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) \cdot e^{x+y-3}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) e^{x+y-3} - \pi y \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) \cdot e^{x+y-3} - \frac{\pi^2 y^2}{4} \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) \cdot e^{x+y-3}$$

$$= e^{x+y-3} \left(\cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) - \pi y \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) - \frac{\pi^2 y^2}{4} \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) \right)$$

$$f_{yy}(x, y) = e^{x+y-3} \left(\cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) - \pi x \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) - \frac{\pi^2 x^2}{4} \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) \right)$$

$$f_{xy}(x, y) = e^{x+y-3} \left(\cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) - \frac{\pi}{2} (x \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) + y \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right) + \frac{\pi}{2} xy \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right)) \right)$$



4)(8 P.) Was versteht man unter einer homogenen, linearen Differentialgleichung zweiter (1) Ordnung?

(2) Wie sieht die Lösungsmenge so einer Differentialgleichung aus? Wie kann man infolge dessen die Lösungsmenge am einfachsten beschreiben?

(3) Was versteht man unter dem Superpositionsprinzip für inhomogene, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung?

(4) Beweisen Sie das Superpositionsprinzip für inhomogene, lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung?

(1) Homogen \rightarrow keine Störfunktion

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x) y = 0$$

Linear \rightarrow kein $(y'')^2$

(2) Eine Funktion oder die von zwei Konstanten variiert werden kann.

Es gibt nicht eine Lösung sondern unendlich viele.

(3) Ist die Störfunktion eine Linearkombination von Funktionen verschiedener Formen (z.B. Polynom- und Exponentialfunkt.), kann man zunächst partielle Lösungen der einzelnen Komponenten bestimmen, und diese dann zu einer Gesamtlösung zusammenfügen.

(4)

$$y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = s(x)$$

$$s(x) = s_1(x) + s_2(x)$$

$$y_h(x) \text{ erfüllt: } y'' + a(x) \cdot y' + b(x) y = 0$$

$$y_{p_1}(x) \text{ erfüllt: } y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = s_1(x)$$

$$y_{p_2}(x) \text{ erfüllt: } y'' + a(x) \cdot y' + b(x) \cdot y = s_2(x)$$

$$(y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x))'' + a(x)(y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x))' + b(x)(y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)) =$$

$$\underbrace{y_h'' + a(x)y_h' + b(x)y_h}_{=0} + \underbrace{y_{p_1}'' + a(x)y_{p_1}' + b(x)y_{p_1}}_{=S_1(x)} + \underbrace{y_{p_2}'' + a(x)y_{p_2}' + b(x)y_{p_2}}_{S_2(x)}$$

$$S_1(x) + S_2(x) = S(x)$$

$$y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = S_1(x) + S_2(x)$$

$$y_h(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = S(x)$$

5)(8 P.) Sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte, reellwertige und beschränkte Funktion.
Was ist eine Zerlegung von $[a, b]$ und wie ist die Feinheit einer Zerlegung definiert?
Was versteht man unter einer Riemann'schen Zwischensumme von f über $[a, b]$?
Wie ist das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[a, b]$ definiert?
Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f , für die das bestimmte Integral über dem Intervall $[a, b]$ nicht existiert, und begründen Sie mit Hilfe von Riemann'schen Zwischensummen, warum es nicht existiert.

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

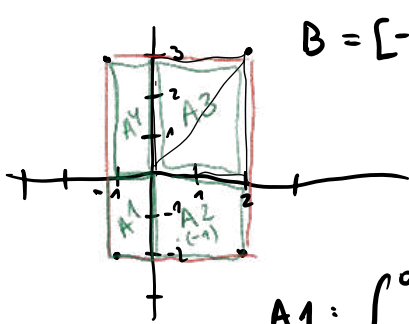
(GITTENBERGER)

Wien, am 9. März 2018 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

1)(8 P.) Berechnen Sie das Bereichsintegral $\iint_B |xy| dx dy$, wobei der Bereich B das Rechteck in der (x, y) -Ebene mit den Eckpunkten $(-1, -2)$, $(-1, 3)$, $(2, 3)$ und $(2, -2)$ bezeichnet.



$$B = [-1, 2] \times [-2, 3]$$

$$\iint_B |xy| dx dy$$

$$A1: \int_{-2}^0 \int_{-1}^0 xy dx dy = -\frac{1}{2} \int_{-2}^0 y dy = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) = \underline{\underline{1}}$$

$$A2: -\int_{-2}^0 \int_0^2 xy dx dy = -2 \int_{-2}^0 y dy = (-2) \cdot (-2) = \underline{\underline{4}}$$

$$A3: \int_0^3 \int_0^2 xy dx dy = 2 \int_0^3 y dy = 2 \cdot \frac{9}{2} = \underline{\underline{9}}$$

$$A4: -\int_0^3 \int_{-1}^0 xy dx dy = \frac{1}{2} \int_0^3 y dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$$

$$\int_{-1}^0 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\int_{-2}^0 y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_{-2}^0 = -2$$

$$\int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_0^3 y dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^3 = \frac{9}{2}$$

$$14 + \frac{9}{4} = 16,25$$

$$\int_{-2}^3 \int_{-1}^2 |x \cdot y| dx dy = \underline{\underline{16,25}}$$

2)(8 P.) Gegeben ist die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} (\sqrt{j} - 2\sqrt{j+1} + \sqrt{j+2})$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die n -te Partialsumme s_n dieser Reihe gegeben ist durch $s_n = -1 - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$.

Untersuchen Sie, ob die Reihe konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Manchmal hilft es, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ um $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ zu erweitern.

3)(8 P.) Bestimmen Sie alle Punkte (x, y) auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^3$, für die die Tangente an den Graphen von f parallel zur Geraden $3x - 5y = 7$ ist, sowie die Gleichungen der Tangenten an diesen Punkten.

Steigung der Geraden bestimmen

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 7 \\ 5y &= 3x - \frac{7}{5} \\ y &= \frac{3}{5}x - \frac{7}{25} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \end{array} \right) = \frac{7}{25}$$

\Rightarrow Steigung $= \frac{3}{5}$

Ableitung von $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2$$

Gleichsetzen:

$$\begin{aligned} 3x^2 &= \frac{3}{5} & x_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ x &= \sqrt{\frac{3}{15}} = \sqrt{\frac{1}{5}} & x_2 &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

y-Werte herausfinden

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{1^3}{(\sqrt{5})^3} = \frac{1}{(5^{\frac{1}{2}})^3} = \frac{1}{5^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5^3}} = \underline{\underline{\frac{1}{5 \cdot \sqrt{5}}}} \\ f(x_2) &= -\frac{1}{5\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Punkte:

$$P_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \mid \frac{1}{5\sqrt{5}}\right) \quad P_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \mid -\frac{1}{5\sqrt{5}}\right)$$

Tangenten:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$t_1(x) = \frac{3}{5}x + \frac{22}{25\sqrt{5}}$$

$$t_2(x) = \frac{3}{5}x - \frac{22}{25\sqrt{5}}$$

$$y - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\left(x - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$y - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}x - \frac{3}{25\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{25\sqrt{5}} + \frac{25}{25\sqrt{5}}$$

$$y = \frac{3}{5}x + \frac{22}{25\sqrt{5}}$$

4)(8 P.) Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, deren Häufungspunkte genau die Elemente von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ sind? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, begründen Sie, warum es so eine Folge nicht geben kann.

5)(8 P.) Was ist eine Potenzreihe?

Was versteht man unter dem Konvergenzradius einer Potenzreihe?

(Bemerkung: Es ist bei dieser Frage nicht die Formel zur Berechnung des Konvergenzradius gefragt!)

Wie kann man den Konvergenzradius einer Potenzreihe berechnen?

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die man um einen Punkt a in eine Potenzreihe entwickeln kann? Wie lautet in diesem Fall die Potenzreihe von $f(x)$?

Unter einer Potenzreihe versteht man Reihen der Form $\sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$.

Der Konvergenzradius R ist eine Zahl für die gilt $0 \leq R \leq \infty$, so dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x - x_0| < R$ absolut konvergent ist und für $|x - x_0| > R$ divergent ist.

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Wenn $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion um einen Punkt a in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, kann die Funktion als Taylor-Reihe der Funktion dargestellt werden:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 4. Mai 2018 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

1)(8 P.) a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion $\ln(x)$ an der Anschlussstelle $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied zu a).

c) Untersuchen Sie mit Hilfe der Ergebnisse von a) und b), ob die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{für } x \neq 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist.

2)(8 P.) Bestimmen Sie alle relativen Extrema und alle Sattelpunkte der Funktion

$$f(x, y) = \cos(x^2 + 2y) + x^2.$$

Bemerkung: Eine symmetrische 2×2 -Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist.

Partielles Differenzieren:

$$f_x(x, y) = -\sin(x^2 + 2y) \cdot 2x + 2x$$

$$f_y(x, y) = -2 \sin(x^2 + 2y)$$

Ableitungen Null setzen:

$$f_x = -\sin(x^2 + 2y) \cdot 2x + 2x = 0$$

$$2x(1 - \sin(x^2 + 2y)) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} 2x = 0 \\ x = 0 \end{matrix}$$

$$f_y = -2 \sin(x^2 + 2y) = 0$$

$$\sin(x^2 + 2y) = 0$$

\Rightarrow einsetzen

$$\sin(2y) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} y = 0 \\ y = \frac{\pi}{2} \end{matrix}$$

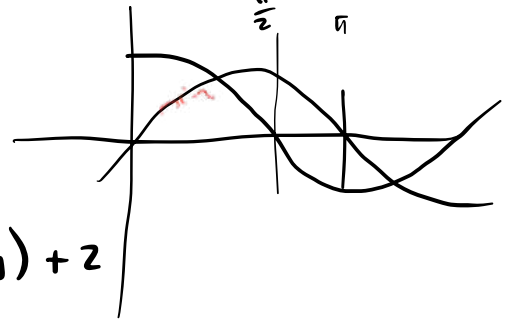
$$(0, \frac{n \cdot \pi}{2})$$

für $n \in \mathbb{Z}$

$$\underline{(0|0)}, \underline{(0, \frac{\pi}{2})}$$

$$\frac{3\pi}{2}$$

$$\sin(x^2 + 2y) = 1$$



Zweite Ableitungen:

$$f_{xx}(x, y) = -2 \sin(x^2 + 2y) - 4x^2 \cos(x^2 + 2y) + 2$$

$$f_{xy}(x, y) = -4x \cos(x^2 + 2y)$$

$$f_{yy}(x, y) = -4 \cos(x^2 + 2y)$$

Hesse Matrix:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

für $(0|0)$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

- 8

\Rightarrow Sattelpunkt

für $(0, \frac{\pi}{2})$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

\rightarrow relatives Minimum

3)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{2^{2n} x^n}{n^2}$ für $|x| < 1/4$ konvergiert und für $|x| > 1/4$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1/4$ bzw. bei $x = -1/4$?

4)(8 P.) Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, deren Häufungspunkte genau die Elemente von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ sind? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, begründen Sie, warum es so eine Folge nicht geben kann.

Eine Zahl a heißt Grenzwert (oder Limes) einer Folge $(a_n)_{n \geq 0}$, falls in jeder ε -Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen, d.h. falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

Wenn in jeder ε -Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen, so ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \geq 0}$.



5)(8 P.) Was versteht man (anschaulich) unter dem bestimmten Integral einer reellwertigen Funktion f über einem Intervall $[a, b]$? Wann heißt so ein Integral uneigentlich? Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral und berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^y e^{\tan(z^2)} dz.$$

Unter dem bestimmten Integral über $[a, b]$ kann man sich die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x -Achse vorstellen im Teil $[a, b]$.

Ist die Funktion positiv so ist auch die Fläche positiv, ist sie negativ, dann negativ.

Ein solches Integral heißt uneigentlich wenn die Funktion im Teil $[a, b]$ unbeschränkt ist, also eine Unendlichkeitsstelle hat, oder wenn das Intervall selbst unbeschränkt ist: $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$.

Der Zusammenhang besteht darin das das unbestimmte Integral von $f(x)$ oft als $F(x)$ (Antiderivat) berechnet wird. Das bestimmte Integral über $[a, b]$ lässt sich berechnen durch

$$F(b) - F(a).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_x^y e^{\tan(z^2)} dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_x^y f(z) dz = \frac{\partial}{\partial x} (F(y) - F(x)) = \\ f(z) &= e^{\tan(z^2)} & &= -F(x) = \underline{\underline{-e^{\tan(x^2)}}} \end{aligned}$$

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 21. Mai 2019 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

1)(8 P.) Beweisen Sie die folgende Formel (mit $n \in \mathbb{N}$) mit vollständiger Induktion:

$$\int x^n (\log x)^n dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{(n-k)! (n+1)^{k+1}} x^{n+1} (\log x)^{n-k}$$

Spezialfall wenn $m=n$:

$$\int x^n \cdot \ln(x)^n dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{(n-k)! \cdot (n+1)^{k+1}} x^{n+1} \ln(x)^{n-k}$$

Allgemein:

$$\int x^m \cdot \ln(x)^n dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n)!}{(n-k)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k}$$

Induktionsanfang für $n=0$:

$$\int x^m dx = \sum_{k=0}^0 \frac{(-1)^k (n)!}{(n-k)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k}$$

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{(m+1)} x^{m+1}$$

Induktionsbehauptung:

$$\int x^m \cdot \ln(x)^{n+1} dx = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot \ln(x)^{n+1}}{m+1} - \frac{n+1}{m+1} \cdot \int x^m \cdot \ln(x)^n dx = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k+1}$$

Induktionsschritt:

$$\frac{x^{m+1} \cdot \ln(x)^{n+1}}{m+1} - \frac{n+1}{m+1} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n)!}{(n-k)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot \ln(x)^{n+1}}{m+1} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k)! \cdot (m+1)^{k+2}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot \ln(x)^{n+1}}{m+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot \ln(x)^{n+1}}{m+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot (m+1)} \cdot x^{m+1} \ln(x)^{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot \ln(x)^{n+1}}{m+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot (m+1)} \cdot x^{m+1} \ln(x)^{n+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1} (n+1)!}{(n-k+1)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot \ln(x)^{n+1}}{m+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)! \cdot (m+1)} \cdot x^{m+1} \ln(x)^{n+1}$$

$$\frac{x^{m+1} \cdot \ln(x)^{n+1}}{m+1} = \frac{x^{m+1} \ln(x)^{n+1}}{m+1}$$

Womit $\int x^m \cdot \ln(x)^n dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n)!}{(n-k)! \cdot (m+1)^{k+1}} x^{m+1} \ln(x)^{n-k}$ gezeigt ist

$$\int x^n \cdot \ln(x)^n dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{(n-k)! \cdot (n+1)^{k+1}} x^{n+1} \ln(x)^{n-k} \text{ folgt direkt daraus, da dies dem Fall } m=n \text{ entspricht}$$

2)(8 P.) Beweisen Sie, dass die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$x^2 y'' - 6y = 12 \ln x$$

durch

$$y(x) = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2 \ln x + \frac{1}{3}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben ist.

Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = 2/3$, $y'(1) = -1$?

Homogene Lösung:

$$x^2 y'' - 6y = 12 \ln(x)$$

$$x^2 y'' - 6y = 0$$

$$x^2 y'' = 6y$$

$x = e^t \quad y(x) = z(t)$
 $+ \ln(x) \quad y(x) = z(\ln(x))$

$$x^2 = e^{2t}$$

$$y' = \frac{d}{dx} z(\ln(x)) = \frac{z'(\ln(x))}{x} = \frac{z'(t)}{e^t}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \frac{z'(\ln(x))}{x} = \frac{z''(\ln(x)) - z'(\ln(x))}{x^2} = \frac{z''(t) - z'(t)}{e^{2t}}$$

$$y'' x^2 - 6y = 0$$

$$z''(t) - z'(t) - 6z(t) = 0$$

$$z'' - z' - 6z = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 3) \cdot (\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = -2$$

$$z(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$$

$$\hookrightarrow y_h(x) = C_1 x^3 + C_2 x^{-2}$$

$$z'' - z' - 6z = 12$$

$$z_p(t) = A \cdot t + B$$

$$0 - A - 6(A + B) = 12$$

$$-A - 6A - 6B = 12 \quad z_p(t) = -2t + \frac{1}{3}$$

$$-6A = 12 \quad -A - 6B = 0 \quad = -2 \ln(x) + \frac{1}{3}$$

$$A = -2 \quad 2 - 6B = 0$$

$$B = \frac{1}{3}$$

$$y_h(x) = C_1 x^3 + C_2 x^{-2}$$

$$y_p(x) = -2 \ln(x) + \frac{1}{3}$$

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^{-2} - 2 \ln(x) + \frac{1}{3}$$

$$y'(x) = 3C_1 x^2 - 2C_2 x^{-3} - \frac{2}{x}$$

$$y(1) = \frac{2}{3}$$

$$y'(1) = -1$$

$$\frac{2}{3} = C_1 + C_2 - 2 \ln(1) + \frac{1}{3} = \underline{C_1 + C_2 + \frac{1}{3}}$$

$$-1 = \underline{3C_1 - 2C_2 - 2}$$

$$\frac{1}{3} = C_1 + C_2$$

$$1 = 3C_1 - 2C_2$$

$$\frac{5}{3} = 5C_1 \quad | :5$$

$$\underline{C_1 = \frac{1}{3}} \quad \underline{C_2 = 0}$$

3)(8 P.) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{2^{2n} x^n}{n^2}$ für $|x| < 1/4$ konvergiert und für $|x| > 1/4$ divergiert! Wie verhält sich die Reihe bei $x = 1/4$ bzw. bei $x = -1/4$?

$$a_n = \frac{2^{2n} x^n}{n^2} = \frac{4^n x^n}{n^2}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{4^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{4^n x^n}{n^2}} \right| = \left| \frac{4^{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot n^2}{4^n x^n (n+1)^2} \right| = \left| \frac{4 \cdot x \cdot n^2}{n^2 + 2n + 1} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{4 \cdot x \cdot n^2}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} \right| = \underline{\underline{|4x|}}$$

wenn $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$ dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^{2n} x^n}{n^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{4^n x^n}{n^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{(4x)^n}{n^2}$$

für $x = \frac{1}{4}$:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{6}}}$$

Euler

\Rightarrow konvergiert

für $x = -\frac{1}{4}$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^n$$

Leibniz Kriterium?

$$a_{n+1} < a_n$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$$

$$n^2 < (n+1)^2$$

$$n^2 < n^2 + 2n + 1 \quad | -n^2$$

$$-\frac{1}{2} < n \quad \checkmark$$

Alternierende Reihe mit einer $(a_n)_{n \geq 0}$ fallender Nullfolge

\Rightarrow konvergiert.

4)(8 P.) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Ergänzen Sie die folgende Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt stetig an der Stelle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ definitionsgemäß genau dann, wenn ...

Zeigen Sie: Für jede $m \times n$ -Matrix A ist die Funktion $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ stetig an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Zeigen Sie mit Hilfe des vorigen Resultats, dass $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ an jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ stetig ist.

dann, wenn ...

Zeigen Sie: Für jede $m \times n$ -Matrix A ist die Funktion $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ stetig an der Stelle $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Zeigen Sie mit Hilfe des vorigen Resultats, dass $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ an jedem Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ stetig ist.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$$

→ lin. Abb.

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} A\mathbf{x} = \mathbf{0} = f(\mathbf{0})$$

$$f(\mathbf{x}) \text{ linear} \Rightarrow f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} A \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} A\mathbf{x} + A \cdot \mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}_0 = f(\mathbf{x}_0)$$

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \cdot f(\mathbf{x})$$

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

5)(8 P.) Was versteht man (anschaulich) unter dem bestimmten Integral einer reellwertigen Funktion f über einem Intervall $[a, b]$? Wann heißt so ein Integral uneigentlich? Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral und berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^y e^{\tan(z^2)} dz.$$

Unter dem bestimmten Integral von f im Intervall $[a, b]$ kann man sich die Fläche unter der Kurve vorstellen, also zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$ und der x -Achse. Ist die Funktion im Intervall positiv, so ist auch die Fläche positiv, sonst negativ.

Ein Integral heißt uneigentlich wenn:

- f ist über $[a, b]$ unbeschränkt, d. h. sie hat eine oder mehrere Unendlichkeitsstellen
- Das Intervall selbst ist unbeschränkt, also hat die Form $(-\infty, a]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$.

Der Zusammenhang besteht darin das das unbestimmte Integral von f oft als $F(x)$ berechnet (Antiderivat)

Das bestimmte Integral lässt sich über dem Intervall $[a, b]$ berechnen als

$$F(b) - F(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^y e^{\tan(z^2)} dz = \underline{\underline{-e^{\tan(x^2)}}}$$

$$f(z) = e^{\tan(z^2)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^y f(z) dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(\underset{\downarrow}{F(y)} - \underset{\downarrow}{F(x)} \right) = -f(x)$$

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 2. Juli 2019 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

1)(8 P.) Bestimmen Sie die Lösung der Rekursion $a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-2} - a_{n-3} = 2^n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 0$.

2)(8 P.) Sei $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ eine auf dem ganzen Definitionsbereich stetige Funktion. Beweisen Sie, dass dann ein $x \in [a, b]$ existiert, für das $f(x) = x$ gilt.

Definieren wir eine Hilfspunktion $g(x) = f(x) - x$, da $f(x)$ stetig ist und x stetig ist, muss auch $g(x)$ stetig sein. Nun müssen wir zeigen das $g(x)$ einen Nullpunkt hat, dies würde bedeuten das $f(x) = x$.

Betrachten wir nun $g(a)$ und $g(b)$:

$$g(a) = f(a) - a$$

$$g(b) = f(b) - b$$

Da $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ wissen wir das $f(a)$ und $f(b)$ auch in $[a, b]$ liegen. Jetzt haben wir zwei Fälle:

1. $f(a) = a$ oder $f(b) = b$: In diesem Fall haben wir direkt einen Fixpunkt gefunden.

2. $f(a) > a$ und $f(b) < b$: Dann ist $g(a) = f(a) - a > 0$ und $g(b) = f(b) - b < 0$. Da $g(x)$ stetig ist muss es auch ein $g(x) = 0$ geben womit es auch ein $f(x) = x$ geben muss.

3)(8 P.) Gegeben ist die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} (\sqrt{j} - 2\sqrt{j+1} + \sqrt{j+2})$.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die n -te Partialsumme s_n dieser Reihe durch $s_n = -1 - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$ gegeben ist.

Untersuchen Sie, ob die Reihe konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Hinweis: Manchmal hilft es, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ um $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ zu erweitern.

1A: Die 0-te Partialsumme s_0 ist:

$$s_0 = \sqrt{0} - 2 \cdot \sqrt{0+1} + \sqrt{0+2} = -2 \cdot \sqrt{1} + \sqrt{2} = -2 + \sqrt{2}$$

Die Formel gibt für $n=0$:

$$s_0 = -1 - \sqrt{0+1} + \sqrt{0+2} = -1 - \sqrt{1} + \sqrt{2} = -1 - 1 + \sqrt{2} = -2 + \sqrt{2} \quad \checkmark$$

1B: Wir nehmen an dass die Behauptung für ein beliebiges n wahr ist. Das bedeutet:

$$s_n = -1 - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$$

1S: Zeigen dass dies auch für $n+1$ gilt:

$$s_{n+1} = s_n + (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3})$$

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= (-1 - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) + (\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}) \\ &= -1 - \cancel{\sqrt{n+1}} + \cancel{\sqrt{n+2}} + \cancel{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} \\ &= -1 - \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Dies ist genau die Formel die wir beweisen wollten.

Grenzwert:

$$s_n = -1 - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1 - \underbrace{\sqrt{n+1}}_{-\infty} + \underbrace{\sqrt{n+2}}_{+\infty}) = \underline{\underline{-1}}$$

4)(8 P.) Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, deren Häufungspunkte genau die Elemente von \mathbb{Z} sind? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, begründen Sie, warum es so eine Folge nicht geben kann.

Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert (oder Limes) der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$, falls in jeder ε -Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen, d.h. falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon \text{ gilt.}$$

Wenn in jeder ε -Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen, so ist a ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \geq 0}$.

$a_n =$

1	2	3	4	5	6	...
-1	-2	-3	-4	-5	-6	...
1	2	3	4	5	6	...
-1	-2	-3	-4	-5	-6	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Man stelle sich eine Tabelle vor die wie oben aussieht, geht man diese Tabelle nun wie oben gerechnet durch und schreibt das Element auf welches man sich gerade befindet auf, so kommt man zu einer Folge deren Häufungspunkte alle Elemente von \mathbb{Z} sind.

5)(8 P) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Erklären Sie anschaulich, was man unter der Stetigkeit von f auf $[a, b]$ versteht.

a) Formulieren Sie die ε - δ -Definition der Stetigkeit.

b) Wie sehen alle auf dem Intervall $[a, b]$ „stetigen“ Funktionen aus, wenn man in der Definition der Stetigkeit die Reihenfolge der Quantoren (von ε und δ) vertauscht?

a) Eine anschauliche Definition der Stetigkeit wäre:

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig auf $[a, b]$ wenn man den Graphen der Funktion zeichnen kann ohne den Stift abzusetzen, also das die Funktion keine Sprünge, Lücken oder Polstellen hat.

b) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

c)
$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Wenn man die Quantoren vertauscht werden, ist die Funktion beschränkt durch $f(x_0) - \varepsilon$ und $f(x_0) + \varepsilon$.

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 4. Oktober 2019 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

1)(8 P.) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad a_n = \frac{1}{n!}$$

Für welche komplexen Zahlen x ist diese Reihe konvergent?

Hinweis: Die Stirling'sche Formel lautet $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, wobei e die Eulersche Zahl $e \approx 2,71828 \dots$ bezeichnet. Außerdem gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{n^n}{e^n} \cdot \sqrt{2\pi n}}} = \sqrt[n]{\frac{e^n}{n^n \cdot \sqrt{2\pi n}}} =$$

$$\frac{e}{n \cdot \sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}}} = \frac{e}{n \cdot \sqrt[n]{2\pi n}} = \frac{e}{n \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{2\pi}} = \frac{e}{n \cdot \sqrt[n]{2\pi}} = \underline{\underline{0}}$$

\downarrow 1 ∞ \downarrow 1

$$r = \frac{1}{0} = \infty$$

Deswegen konvergiert es für alle $x \in \mathbb{C}$

- 2)(8 P.) a) Beweisen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung, dass für alle $x > 0$ die Ungleichung $\ln(x) < \frac{x}{2}$ gilt.
Hinweis: Wo ist die Differenz der beiden Seiten der beiden Seiten der Ungleichung minimal?
- b) Leiten Sie aus a) die folgende Ungleichung her:
Für alle positiven natürlichen Zahlen n gilt $\ln(n) < \sqrt{n}$.
- c) Benutzen Sie b), um die Konvergenz der Folge $a_n = \frac{\ln n}{n}$ zu zeigen, indem Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein passendes $N(\varepsilon)$ angeben.

a) $\ln(x) < \frac{x}{2}$

$$0 < \frac{x}{2} - \ln(x) \Rightarrow g(x) = \frac{x}{2} - \ln(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \quad g''(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = 0$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x}$$

$$\underline{\underline{2 = x}}$$

$$g''(2) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} > 0$$

\Rightarrow Minimum

$$g(2) = \frac{2}{2} - \ln(2) = 1 - \ln(2) > 0$$

$$g(x) > 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\ln(x) < \frac{x}{2}}}$$

b) $\ln(x) < \frac{x}{2} \Rightarrow x = \sqrt{n}$

$$\ln(\sqrt{n}) < \frac{\sqrt{n}}{2}$$

$$\ln(n^{\frac{1}{2}}) < \frac{\sqrt{n}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln(n) < \frac{\sqrt{n}}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\underline{\underline{\ln(n) < \sqrt{n}}} \quad \checkmark$$

c) Konvergenz $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$

aus (b) $\ln(n) < \sqrt{n} \quad /: n$

$$\frac{\ln(n)}{n} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n} = n^{\frac{1}{2}-1} = n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{\ln(n)}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Sandwich-Theorem:

$$0 < \frac{\ln(n)}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = \underline{\underline{0}}$$

Um zu einem gegebenen $\varepsilon > 0$ ein passendes $N(\varepsilon)$ zu finden, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt, dass $\left| \frac{\ln(n)}{n} \right| < \varepsilon$, können wir folgendes machen:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

$$1 < \varepsilon \cdot \sqrt{n}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < \sqrt{n} \quad / 2$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{\varepsilon^2} < n}}$$

$$\underline{\underline{N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil}}$$

3)(8 P.) a) Beweisen Sie, dass das Restglied zum Taylor-Polynom nullter Ordnung einer Funktion $f(x)$ an der Anschlussstelle a auch durch

$$\int_a^x f'(t) dt$$

darstellbar ist.

b) Beweisen Sie, dass das Restglied zum Taylor-Polynom erster Ordnung einer Funktion $f(x)$ an der Anschlussstelle a auch durch

$$\int_a^x (x-t)f''(t) dt$$

darstellbar ist.

a) $f(x) = f(a) + R_0$ \leftarrow Taylor-Pol. 0-Ordnung
 $R_0 = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$

b) $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + R_1$
 $R_1 = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$

$$\int_a^x (x-t)f''(t) dt = \int_a^x u'v = uv - \int uv'$$

$$f'(t)(x-t) \Big|_a^x + \int_a^x f'(x) =$$

$$u' = f''(t) \quad v' = -1$$

$$u = f'(t) \quad v = x-t$$

$$-f'(a)(x-a) + f(x) - f(a) =$$

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \underline{\underline{R_1}}$$

4)(8 P.) Sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte, reellwertige und beschränkte Funktion.

1) Was ist eine Zerlegung von $[a, b]$ und wie ist die Feinheit einer Zerlegung definiert?

2) Was versteht man unter einer Riemann'schen Zwischensumme von f über $[a, b]$?

3) Wie ist das bestimmte Integral von f über dem Intervall $[a, b]$ definiert?

4) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion f , für die das bestimmte Integral über dem Intervall $[a, b]$ nicht existiert, und begründen Sie mit Hilfe von Riemann'schen Zwischensummen, warum es nicht existiert.

1) Eine Zerlegung von $[a, b]$ ist eine endliche Folge von Punkten x_0, \dots, x_n , sodass $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Diese Punkte unterteilen das Intervall $[a, b]$ in kleinere Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$. Die Länge des längsten Teilintervalls einer Zerlegung Z heißt Feinheit $F(Z)$ der Zerlegung.

2) Eine Riemann'sche Zwischensumme S von f bezüglich einer Zerlegung Z und einer Auswahl von Zwischenpunkten $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ist definiert als

$$S = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

3) Sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$.

Falls jede Folge $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zwischensummen, deren Zerlegungsfolge $\lim_{n \rightarrow \infty} F(Z_n) = 0$ erfüllt, gegen den selben Grenzwert konvergiert, so nennt man diesen Grenzwert das bestimmte Integral von f auf dem Intervall $[a, b]$ und schreibt

$$\int_a^b f(x) dx$$

4) $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$f = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Jedes Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ einer Zerlegung von $[0, 1]$ enthält sowohl rationale als auch irrationale Zahlen, somit lassen sich sämtliche Zwischenstellen ξ_i rational bzw. irrational wählen.

5)(8 P.) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen. Was bedeuten die folgenden Aussagen? a) $a_n = O(b_n)$, b) $a_n = o(b_n)$, c) $a_n \sim b_n$.

Stimmen die folgenden Schlussfolgerungen?

(Ihre Antwort muss begründet werden!)

d) Aus $a_n = o(1)$ folgt, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

e) Aus $a_n \sim b_n$ folgt $a_n - b_n = o(a_n)$.

Geben Sie weiters je zwei konkrete Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, sodass

f) $a_n = O(b_n)$, g) $a_n = o(b_n)$ gilt bzw h) $a_n = O(b_n)$ nicht gilt.

a) (a_n) ist asymptotisch beschränkt durch (b_n) d.h. (a_n) wächst höchstens so schnell wie (b_n)

b) (a_n) ist im Vergleich zu (b_n) vernachlässigbar, wenn $n \rightarrow \infty$
 (a_n) wächst langsamer als jede noch so kleine Vielfache von (b_n)

c) (a_n) und (b_n) sind asymptotisch äquivalent.

d) $(a_n) = o(1) \rightarrow (a_n)$ ist Nullfolge \Rightarrow stimmt

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1} = 0$ kann nur dann gelten wenn a_n Nullfolge

e) $\frac{(a_n)}{(b_n)} \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{a_n - b_n}{a_n} \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1) = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{a_n - b_n}{a_n} = 1 - \frac{a_n}{b_n}$$

✓

f) $a_n = O(b_n)$

$$a_n = n \quad b_n = n^2 \quad |a_n| \leq C \cdot |b_n|$$

h) $a_n \neq O(b_n)$

$$a_n = n^2 \quad b_n = n \quad \text{Es gibt kein } C \text{ sodass gilt } |a_n| \leq C \cdot |b_n|$$

g) $a_n = o(b_n)$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad b_n = 1 \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$$

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 22. November 2019 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Untersuchen Sie mit Hilfe eines geeigneten Konvergenzkriteriums, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{n \geq 0} \frac{3^{3n} x^n}{n^2 + 1}$ konvergiert. Beachten Sie, dass jene Stellen, wo das von Ihnen gewählte Konvergenzkriterium versagt, gesondert untersucht werden müssen!

$$\sum_{n \geq 0} \frac{3^{3n} x^n}{n^2 + 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{27^n x^n}{n^2 + 1}$$

$$a_n = \frac{3^{3n} x^n}{n^2 + 1} = \frac{3^{3n} x^n}{(n+1)(n-1)}$$

$$\left| \frac{\frac{3^{3n+3} \cdot x^{n+1}}{(n+2)n}}{\frac{3^{3n} x^n}{(n+1)(n-1)}} \right| = \left| \frac{3^{3n+3} \cdot x^{n+1} (n+1)(n-1)}{3^{3n} x^n (n+2)n} \right| =$$

$$\left| \frac{27^{n+1} \cdot x^{n+1} \cdot (n^2 + 2n + 2)}{27^n \cdot x^n \cdot (n^2 + 1)} \right| = \left| \frac{27x \cdot (n^2 + 2n + 2)}{n^2 + 1} \right|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{27x(n^2 + 2n + 2)}{n^2 + 1} \right| = \left| \frac{27x \left(n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} \right) \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} \right| = \underline{\underline{|27x|}}$$

wenn $-\frac{1}{27} < x < \frac{1}{27}$ dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n \geq 0} \frac{27^n x^n}{n^2 + 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(27x)^n}{n^2 + 1}$$

für $x = \frac{1}{27}$:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 1} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

\Rightarrow konvergiert

für $x = -\frac{1}{27}$:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + 1} \cdot (-1)^n$$

Leibniz-Kriterium

$\frac{1}{n^2 + 1} \Rightarrow$ Monoton fallende Nullfolge

$$a_{n+1} < a_n$$

\Rightarrow konvergiert

Es konvergiert für $x \in \left[-\frac{1}{27}; \frac{1}{27}\right]$.

2)(8 P.) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' - y = e^x - 1.$$

Homogene Lösung:

$$y' - y = 0$$

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{1}{y} dy = dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 1 dx$$

$$\ln|y| = x + C$$

$$y = C_1 \cdot e^x$$

Verifikation der Partikulären:

$$y' - y = e^x - 1$$

$$y_p(x) = C(x) \cdot e^x$$

$$(C(x) \cdot e^x)' - C(x) \cdot e^x = e^x - 1$$

$$C'(x) \cdot e^x + \cancel{C(x) \cdot e^x} - \cancel{C(x) \cdot e^x} = e^x - 1$$

$$C'(x) \cdot e^x = e^x - 1$$

$$C'(x) = 1 - \frac{1}{e^x} = 1 - e^{-x}$$

$$C(x) = \int 1 - e^{-x}$$

$$= x + e^{-x}$$

$$y_p(x) = x \cdot e^x + 1$$

$$y(x) = C_1 \cdot e^x + x \cdot e^x + 1$$

$$= e^x (C_1 + x) + 1$$

3)(8 P.) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x \leq 0, \\ x + \frac{2 \log(1+x)}{x} & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f an der Stelle $x = 0$ stetig und differenzierbar ist, und berechnen Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{2 \cdot \log(1+x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2 \cdot \log(1+x)}{x} \right) =$$

$$0 + 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\log(1+x)}{x} \right) \xrightarrow{\text{L'Hospital}} 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{(1+x) \cdot \ln(10)} \right) =$$

$$2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{\ln(10) + x \cdot \ln(10)} \right) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{\ln(10) + 0} \right) = 2 \cdot \frac{1}{\ln(10)} = \underline{\underline{\frac{2}{\ln(10)}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow \underline{\underline{\text{nicht stetig}}}$$

Differenzierbar:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\left(x + \frac{2 \cdot \log(1+x)}{x} \right) - 2}{x - 0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \cdot \log(1+x)}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x} =$$

$$1 - \infty - \infty \Rightarrow \text{nicht differenzierbar}$$

4)(8 P.) Was versteht man (anschaulich) unter dem bestimmten Integral einer reellwertigen Funktion f über einem Intervall $[a, b]$? Wann heißt so ein Integral uneigentlich? Erklären Sie den Zusammenhang zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral und berechnen Sie

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^y e^{\tan(z^2)} dz.$$

Bestimmtes Integral:

Man kann sich das bestimmte Integral einer Funktion f über einem Intervall $[a, b]$ vorstellen als die Fläche zwischen der Funktion $f(x)$ und der x -Achse und vertikalen Linien bei a und b .

Ist die Funktion im Intervall positiv ist die Fläche tatsächlich positiv, ist sie negativ ist auch die Fläche negativ.

Uneigentliches Integral:

Ein Integral heißt uneigentlich wenn:

- 1) f über $[a, b]$ nicht beschränkt ist, d.h. sie hat eine oder mehrere Unendlichkeitsstellen
- 2) Das Intervall selbst ist unbeschränkt, also es hat die Form $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ oder $(-\infty, \infty)$.

Zusammenhang:

Das unbestimmte Integral der Funktion f wird oft als $F(x)$ bezeichnet (Antiderivat). Das bestimmte Integral lässt sich über dem Intervall $[a, b]$ berechnen als

$$F(b) - F(a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^y e^{\tan(z^2)} dz$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_x^y e^{\tan(z^2)} dz. = \underline{\underline{-e^{\tan(x^2)}}}$$

$$f(z) = e^{\tan(z^2)} \quad \frac{\partial}{\partial x} (F(y) - F(x))$$

\downarrow
 $0 \quad - f(x)$

5)(8 P.) Gegeben ist eine Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Geben Sie eine geometrische (d.h. anschauliche) Definition von totaler Differenzierbarkeit. Wie lassen sich die partiellen Ableitungen f_x und f_y sowie die Richtungsableitung von f in Richtung eines normierten Vektors \mathbf{v} , jeweils im Punkt (a, b) , geometrisch beschreiben? Wie lautet die Richtungsableitung von $f(x, y) = \arctan(\log(x^2)) \sin(y)$ in Richtung des Vektors $(0, 1)$ und im Punkt $(1, 0)$?

Die Funktion $f(x, y)$ ähnelt im Punkt (x_0, y_0) der Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0) .

Die partiellen Ableitungen sind der Anstieg der Tangentialebene in diese Richtung

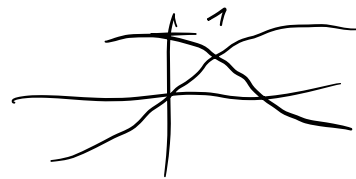
Die Richtungsableitung gibt an wie stark diese Tangentialebene in die Richtung des Vektors ansteigt.

$$f(x, y) = \arctan(\log(x^2)) \sin(y) \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\frac{2x}{x^2}}{1 + \log(x^2)^2} \cdot \sin(y) = \frac{2 \cdot \sin(y)}{x + x \log(x^2)^2} =$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \arctan(\log(x^2)) \cdot \cos(y)$$



$$f_x(1, 0) = \frac{2 \cdot \sin(1)}{1 + \log(1)^2} = 2 \cdot \sin(1)$$

$$f_y(1, 0) = \arctan(\log(1)) \cdot \cos(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot \sin(1) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Zuname:

Vorname:

Matrikelnummer:

**PRÜFUNG AUS
ANALYSIS F. INF.**

(GITTENBERGER)

Wien, am 24. Jänner 2020 (Ab hier freilassen!)

Arbeitszeit: 100 Minuten

1)

2)

3)

4)

5)

1)(8 P.) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

- 1) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung $(1, 2)$ im Punkt $(0, 0)$.
- 2) Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^3)$.
- 3) Bestimmen Sie die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f \text{ ist stetig an der Stelle } (x, y)\}$.

$$v = (1, 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t \cdot (1, 2)) - f(0, 0)}{t} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 \cdot 2t}{t^6 + 4t^2} - 0}{\frac{t}{1}} = \frac{2t^4}{t^7 + 4t^3} = \underline{\underline{0}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} (x^3 y) \cdot (x^6 + y^2)^{-1} = \frac{3x^2 \cdot y}{x^6 + y^2} - \frac{x^3 \cdot y \cdot 6x^5}{(x^6 + y^2)^2} =$$

$$u'v + v'u$$

$$= \frac{3x^2 \cdot y}{x^6 + y^2} - \frac{6x^8 \cdot y}{(x^6 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} (x^3 y) \cdot (x^6 + y^2)^{-1} = \frac{x^3}{x^6 + y^2} - \frac{2x^3 y^2}{(x^6 + y^2)^2}$$

$$u' = x^3$$

$$v' = -\frac{2y}{(x^6 + y^2)^2}$$

BS mit $\text{grad}f(x) \cdot v$

1)(8 P.) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

- 1) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung $(1, 2)$ im Punkt $(0, 0)$.
- 2) Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^3)$.
- 3) Bestimmen Sie die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f \text{ ist stetig an der Stelle } (x, y)\}$.

1) Gradienten ausrechnen

$(0, 0)$ einsetzen

$(1, 2)$ multiplizieren

$$\lim_{t \rightarrow 0}$$

$$2) \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 t^3}{t^6 + t^6} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^6 \rightarrow 1}{2 t^6 \rightarrow 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

3) Da wir in (2) schon herausgefunden haben dass f für $y = t^3$ und $x = t$ nicht stetig am Ursprung ist ergibt sich folgende Menge:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot 2n = \frac{2n}{4n^2 + 4n + 1} = \frac{n^x \left(\frac{2}{n}\right)}{n^x \left(4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{4} = 0$$

$$0 < a_n < \frac{2n}{(2n+1)^2}$$

2)(8 P.) Gegeben ist die Folge

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+4)^2} + \frac{1}{(2n+9)^2} + \frac{1}{(2n+16)^2} + \dots + \frac{1}{(2n+4n^2)^2}$$

1) Schreiben Sie die Folge kompakter in der Form $a_n = \sum_{k=1}^n ?$ auf, in dem Sie die Fragezeichen durch passende Ausdrücke ersetzen!

2) Beweisen Sie, dass die Folge konvergiert, und bestimmen Sie $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

3) Zeigen Sie weiters, dass $a_n - a = O\left(\frac{1}{n}\right)$. $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$

1) $a_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(2n+k^2)^2}$

Quotientenkriterium

2) Jeder Term der Funktion ist positiv und wird mit wachsendem n kleiner \rightarrow deutet auf monoton fallend hin. Sie ist auch nach oben beschränkt da jeder Term kleiner ist als $\frac{1}{(2n)^2}$ und es $2n$ Folgeglieder gibt. \Rightarrow die Summe ist kleiner als $2n \cdot \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{2n}$, was gegen 0 konvergiert wenn $n \rightarrow \infty$. \Rightarrow Folge konvergiert.

$$a_k = \frac{1}{(2n+k^2)^2}$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\frac{1}{(2n+(k+1)^2)^2}}{\frac{1}{(2n+k^2)^2}} \right|$$

3)

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(2n+k^2)^2}}{\frac{1}{n}} \right| \leq C$$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{n}{(2n+k^2)^2} \leq \frac{2n^2}{(2n+1)^2} \leq C$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(2n+1)^2} = \frac{2n^2}{4n^2+4n+1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \checkmark$$

Da ein $C = \frac{1}{2}$ existiert gilt $a_n - a = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

3)(8 P.) a) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung der Funktion $\ln(x)$ an der Anschlussstelle $x_0 = 1$.

b) Bestimmen Sie das Restglied zu a).

c) Untersuchen Sie mit Hilfe der Ergebnisse von a) und b), ob die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{für } x \neq 1, \\ 1 & \text{für } x = 1. \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist.

a) $f(x) = \ln(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{df}{dx} \frac{1}{x} = \frac{df}{dx} x^{-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2$$

$$P_2(x) = 0 + \frac{1}{1} (x-1) - \frac{\frac{1}{1}}{2!} (x-1)^2$$

$$= \underline{\underline{(x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2}} + R_n$$

b) $f''(x) = \frac{df}{dx} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{df}{dx} x^{-2} = (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

$$R_n = \frac{\frac{2}{2^3}}{\frac{6}{1}} (x-1)^3 = \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{6}_3 \cdot \cancel{2}^3} (x-1)^3 = \frac{1}{3 \cdot 2^3} (x-1)^3$$

mit $0 < \xi < x$

c)

Um die Stetigkeit der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0=1$ zu untersuchen müssen wir den Grenzwert von $f(x)$ für x gegen 1 untersuchen und schauen ob dieser Wert mit $f(x_0)$ übereinstimmt.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{unbestimmt} \Rightarrow \text{L'Hospital}$$

L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{d}{dx} \ln(x)}{\frac{d}{dx} (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Der Grenzwert von $f(x)$ für x gegen 1 ist also 1 und entspricht also $f(x_0) \Rightarrow$
Funktion ist an der Stelle $x_0=1$ stetig.

4)(8 P.) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine total differenzierbare Funktion. Weiters seien $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen.

- 1) Wie ist die partielle Ableitung von f im Punkt (x_0, y_0) definiert?
- 2) Wie lautet die Kettenregel für das Ableiten von $F(x) = f(u(x), v(x))$?
- 3) Wie berechnet man die Ableitung von $y(x)$ an der Stelle x_0 , wenn $y(x)$ die Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort und nennen Sie die Voraussetzungen, die Sie dabei zugrunde legen!

1) Die partielle Ableitung von f im Punkt (x_0, y_0) ist definiert als die Ableitung einer Funktion im Bezug auf eine Variable, während die andere Variable festgehalten wird.

Dann heißt f in (x_0, y_0) partiell nach x differenzierbar falls der Grenzwert:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

existiert, und partiell nach y differenzierbar falls der Grenzwert:

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

existiert. Die beiden Grenzwerte $f_x(x_0, y_0)$ und $f_y(x_0, y_0)$ werden partielle Ableitungen von f nach x bzw. y genannt.

$$2) F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot v'(x)$$

hier sind $\frac{\partial f}{\partial u}$ und $\frac{\partial f}{\partial v}$ die partiellen Ableitungen von f nach u und v an der Stelle $(u(x), v(x))$, und $u'(x)$ und $v'(x)$ sind die Ableitungen von u und v nach x .

3) Um die Ableitung von $y(x)$ an der Stelle x_0 zu berechnen, wenn $y(x)$ die Lösung der Gleichung $F(x, y) = 0$ ist, wird die implizite Differentiation verwendet.

Voraussetzungen:

- $F(x, y)$ ist stetig differenzierbar in der Umgebung von (x_0, y_0)
- Die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial y}$ an der Stelle (x_0, y_0) ist nicht 0.

Unter diesen Bedingungen kann man die Gleichung $F(x, y) = 0$ nach x differenzieren und erhält:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y'(x) = 0$$

umformen auf

$$y'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

und für x_0 erhält man

$$y'(x_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Dies ist die Steigung der Funktion an der Stelle x_0 .

5)(8 P.) Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen. Geben Sie exakte Definitionen für die Begriffe Grenzwert und Häufungspunkt an.

Gibt es eine Folge reeller Zahlen, die zwei Grenzwerte hat? Wenn ja, geben Sie eine solche Folge konkret an. Wenn nein, beweisen Sie, dass es so eine Folge nicht geben kann.

Eine reelle Zahl a heißt Grenzwert (oder Limes) der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$, falls in jeder ε -Umgebung von a fast alle Folgenglieder a_n liegen, d.h. falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$

Wenn in jeder ε -Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen, so ist a ein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n \geq 0}$.

Eine Folge kann zwar mehrere Häufungspunkte haben, aber nicht mehrere Grenzwerte. Falls a und b zwei Häufungspunkte von $(a_n)_{n \geq 0}$ sind, so gilt für $\varepsilon < \frac{1}{2}|a-b|$, dass $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$. Daher können nicht fast alle a_n sowohl in $U_\varepsilon(a)$ als auch in $U_\varepsilon(b)$ liegen. Daher kann es nicht zwei Grenzwerte geben.