

Blatt 1 Aufgabe 3 - Rundungsfehleranalyse

May 1, 2018

1 Aufgabenstellung

Rundungsfehleranalyse. Geben Sie eine detaillierte Rundungsfehleranalyse von

$$y = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

für $|x| \ll 1$ an, verwenden Sie dabei unter anderem, dass $1 - \cos(x) \approx \frac{x^2}{2}$ oder $y \approx \frac{1}{2}$ und vernachlässigen Sie ε -Terme höherer Ordnung, da diese keinen signifikanten Beitrag leisten. Verwenden Sie außerdem $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$ für $\varepsilon \ll 1$. Warum gilt das?

2 Theorie

2.1 Geometrische Reihe, Approximation

Für die geometrische Reihe gilt für $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = \frac{a_0}{1-x}$$

Dies erinnert sehr an $\frac{1}{1+\varepsilon}$. Dies kann durch folgende geometrische Reihe ausgedrückt werden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\varepsilon)^n = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \dots = \frac{1}{1+\varepsilon}$$

Für $\varepsilon \ll 1$ sind Terme höherer Ordnung sehr nahe 0 und der Grenzwert kann über $1 - \varepsilon$ approximiert werden. Zudem werden abhängig von der Maschinengenauigkeit diese Terme zu 0 abgeschnitten.

2.2 Rundungsfehleranalyse: $(1 + \varepsilon)$ -Technik

Rundungsfehler bei den Eingangsdaten und bei der Durchführung von Gleitpunktoperationen können das Ergebnis stark verfälschen. Zur Abschätzung dieses Fehler kann bei jedem Rundungs- oder Abschneideprozess ein $(1 + \varepsilon)$ -Faktor angehängt werden, um eine Fehlerschranke ableiten zu können. Die Fehlerabschätzung ergibt sich durch $|\tilde{y} - y|$, d.h. die Differenz zwischen gestörter und exakter Lösung.

3 Rechenweg

Die angegebene Gleichung besteht aus 4 Operationen, die Rundungsfehler hervorrufen können:

1. $\cos(x) \longrightarrow (1 + \varepsilon_0)$
2. $1 - \cos(x) \longrightarrow (1 + \varepsilon_1)$
3. $x^2 \longrightarrow (1 + \varepsilon_2)$
4. $\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \longrightarrow (1 + \varepsilon_3)$

Es ergeben sich folgende Schritte:

$$\tilde{y} = \frac{(1 - \cos(x)(1 + \varepsilon_0))(1 + \varepsilon_1)}{x^2(1 + \varepsilon_2)}(1 + \varepsilon_3) = \quad (1)$$

$$\frac{(1 - \cos(x) - \cos(x)\varepsilon_0)(1 + \varepsilon_1)}{x^2(1 + \varepsilon_2)}(1 + \varepsilon_3) = \quad (2)$$

$$\frac{(1 - \cos(x) - \cos(x)\varepsilon_0 + \varepsilon_1 - \cos(x)\varepsilon_1 - \cos(x)\varepsilon_0\varepsilon_1)}{x^2(1 + \varepsilon_2)}(1 + \varepsilon_3) = \quad (3)$$

ε -Terme höherer Ordnung (hier: $\cos(x)\varepsilon_0\varepsilon_1$) können laut Angabe vernachlässigt werden. Diese Terme werden daher in den nachfolgenden Schritten weggelassen.

$$\approx \frac{1 - \cos(x) - \cos(x)\varepsilon_0 + \varepsilon_1 - \cos(x)\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \cos(x)\varepsilon_3}{x^2(1 + \varepsilon_2)} \quad (4)$$

Anwendung von $\frac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$:

$$\approx \frac{1 - \cos(x) - \cos(x)\varepsilon_0 + \varepsilon_1 - \cos(x)\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \cos(x)\varepsilon_3}{x^2}(1 - \varepsilon_2) = \quad (5)$$

$$\frac{1 - \cos(x) - \cos(x)\varepsilon_0 + \varepsilon_1 - \cos(x)\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \cos(x)\varepsilon_3 - \varepsilon_2 + \cos(x)\varepsilon_2}{x^2} = \quad (6)$$

$$\frac{1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \cos(x) - \cos(x)\varepsilon_0 - \cos(x)\varepsilon_1 + \cos(x)\varepsilon_2 - \cos(x)\varepsilon_3}{x^2} = \quad (7)$$

$$\frac{1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \cos(x)(1 + \varepsilon_0 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{x^2} \quad (8)$$

Fehlerabschätzung $|\tilde{y} - y|$ mit $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon, i = 0, 1, \dots, 4$:

$$|\tilde{y} - y| \leq \left| \frac{1 + 3\varepsilon_4 - \cos(x)(1 + 4\varepsilon_4)}{x^2} - y \right| \quad (9)$$

$$\leq \left| \frac{1 + \varepsilon - \cos(x)(1 + \varepsilon)}{x^2} - y \right| \quad (10)$$

Anwendung von $1 - \cos(x) \approx \frac{x^2}{2}$ und $y \approx \frac{1}{2}$

$$\approx \left| \frac{x^2(1 + \varepsilon)}{2x^2} + \frac{\varepsilon}{x^2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{x^2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{x^2} \right| \quad (11)$$

Für $x \rightarrow 0$, d.h. für sehr kleine Werte für x , explodiert die Fehlerschranke wegen des von x abhängigen Terms.