Institut für Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik Gußhausstraße 27/351 A-1040 Wien Tel. (01) 588 01

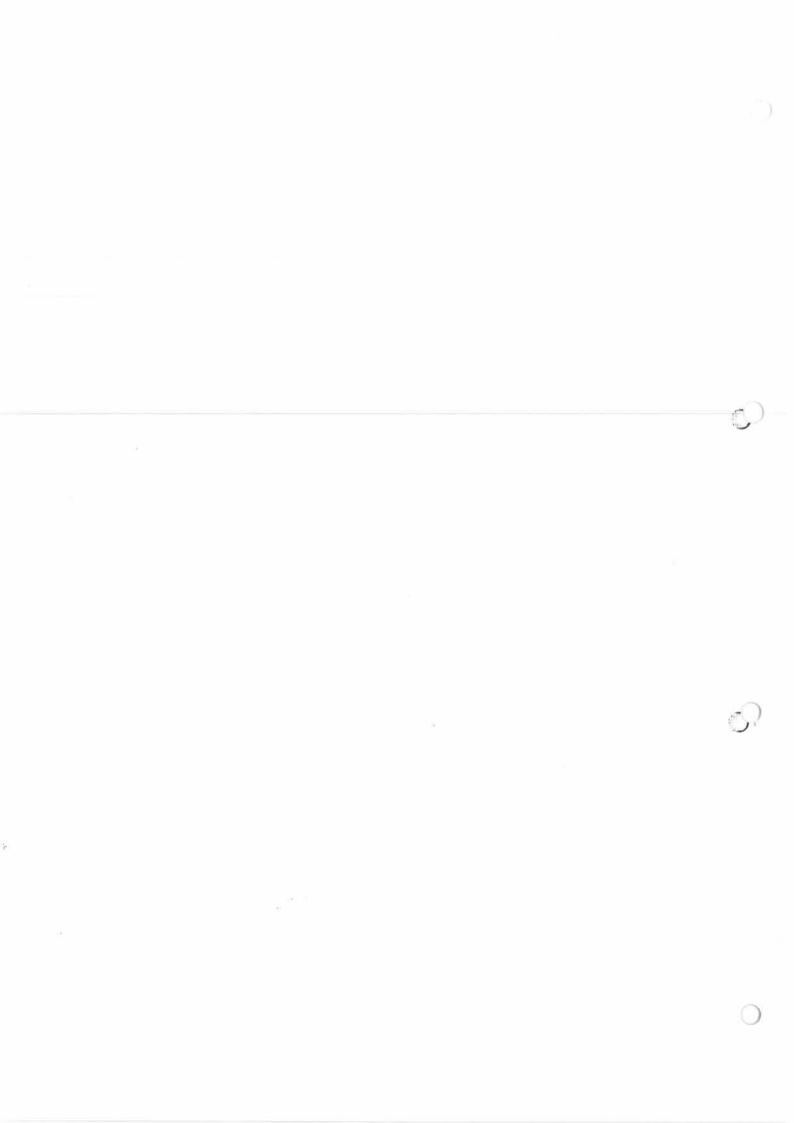


Vorlesungen über

# Signale und Systeme 1

von A. Prechtl

Wien 2004 Alle Rechte vorbehalten



## Inhaltsverzeichnis

	naur ser		1				
1	Zeit	kontinuierliche Signale und Systeme	1				
	1.1	Modellieren von Signalen und Systemen :	5				
	1.2	Determinierte Signale					
	1.3	Zufallssignale	13				
	1.4	Linearität und Zeitinvarianz	18				
	1.5	Das Faltungsintegral	24				
	1.6	Kausalität und Stabilität	29				
	1.7	Zusammenfassung	34				
2	LTI-Systeme im Zeitbereich 35						
	2.1	Aufstellen der System-Differentialgleichung	35				
	2.2	Pole und Nullstellen	37				
	2.3	Homogene Lösungen. Stabilität	39				
	2.4	Partikuläre Lösungen	42				
	2.5	Die vollständige Lösung	47				
	2.6	Sprungantwort und Stoßantwort	54				
	2.7	Zusammenfassung	63				
9	For	rier-Transformation	65				
3	WITH AND DELETED TO THE STATE OF THE STATE O						
	3.1	Grundlegende Eigenschaften	65 72				
	3.2	Symmetrieeigenschaften	77				
	3.3	Faltung und Korrelation	80				
	3.4	Rücktransformation	84				
	3.5		86				
	3.6	Zusammenfassung	00				
4	LTI-Systeme im Frequenzbereich						
	4.1	Systemantworten bei Sinus-Eingängen	88				
	4.2	Der komplexe Frequenzgang	90				
	4.3	Betragsfrequenzgang als Bode-Diagramm	93				
	4.4	Winkelfrequenzgang als Bode-Diagramm	96				
	4.5	Totzeitsysteme	99				
	4.6	Erregung durch Zufallssignale	101				
	4.7	7. ran mmon forguing	106				

5	Fou	rier-Reihen	108				
	5.1	Periodische Signale	108				
	5.2	Grundlegende Eigenschaften	113				
	5.3		116				
	5.4	Faltung und Korrelation	118				
	5.5	Zusammenfassung	121				
6	Oberschwingungen 122						
	6.1	Mischgrößen	122				
	6.2	Wechselgrößen	123				
	6.3	Leistungsgrößen	124				
	6.4	Nichtlineare Systeme	129				
	6.5	Zusammenfassung					
7	Laplace-Transformation 134						
	7.1	Einseitige Laplace-Transformation	134				
	7.2	Partialbruchzerlegungen	137				
	7.3	Grundlegende Eigenschaften	141				
	7.4	Spezielle Sätze	145				
	7.5	Zusammenfassung	146				
8	LTI-Systeme und Laplace-Transformation 148						
	8.1	Anfangswertprobleme	148				
	8.2	Die Sprungantwort	151				
	8.3	Kombinieren von Teilsystemen	156				
	8.4	Zusammenfassung	163				
9	Systeme im Zustandsraum 164						
	9.1	Aufstellen der Zustandsgleichungen	165				
	9.2	Lösung der Zustandsgleichungen	173				
	9.3	그런, 현생님들을 가입하는 현생님,	178				
	9.4	Vektorräume	180				
	9.5	Eigenwerte und Eigenvektoren	184				
	9.6	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	194				
	9.7	Zusammenfassung	198				

### Kapitel 1

# Zeitkontinuierliche Signale und Systeme

Die Theorie der linearen dynamischen Systeme ist ein faszinierendes und äußerst wichtiges Teilgebiet der Technischen Wissenschaften. Faszinierend, weil es sich um eine sehr gut ausgebaute Theorie mit universellen Methoden und weitgehend vollständigen Ergebnissen handelt. Äußerst wichtig, weil es so viele Anwendungen gibt: Die meisten technischen Systeme können – zumindest in Teilaspekten und näherungsweise – durch lineare Systemmodelle erfasst werden.

In diesem ersten Kapitel werden wir den Begriff der Linearität entwickeln, eine Reihe von wichtigen Eigenschaften linearer Systeme kennenlernen und zusätzliche Systemeigenschaften wie Zeitinvarianz, Kausalität und Stabilität behandeln. Die Zeitverläufe physikalischer Größen wie etwa elektrische Ströme und Spannungen, durch die Systeme angeregt werden und mit denen sie antworten, werden meist durch determinierte Signale modellhaft beschrieben, können aber auch Zufallscharakter besitzen.

### 1.1 Modellieren von Signalen und Systemen

Versuchen wir als Erstes, uns eine vorläufige Vorstellung vom Begriff eines dynamischen Systems und von den zu seiner Beschreibung verwendeten Größen zu verschaffen. Um ein konkretes System vor Augen zu haben, nehmen wir als einfaches Beispiel die Schaltung aus Abb.1.1: Am Eingang der Kombination aus zwei widerstandsbehafteten Spulen, einem Kondensator und einem Widerstand liegt eine ideale Spannungsquelle. Der vorgeschriebene Zeitverlauf  $u_{\rm E}(t)$  der Eingangsspannung ist die Eingangsgröße, als Ausgangsgröße wählen wir den Zeitverlauf  $u_{\rm A}(t)$  der Spannung am leerlaufenden Ausgang.

Unser System hat also speziell genau eine skalare Eingangsgröße und eine skalare Ausgangsgröße – wir sprechen deshalb von einem single input – single output oder SISO-System. Ein dynamisches System kann aber auch mehrere Eingangsgrößen und mehrere Ausgangsgrößen besitzen und wird damit zu einem multiple input – multiple output oder MIMO-System. Dazwischen liegen die single input – multiple output oder SIMO-Systeme und die multiple input – single output oder MISO-Systeme.

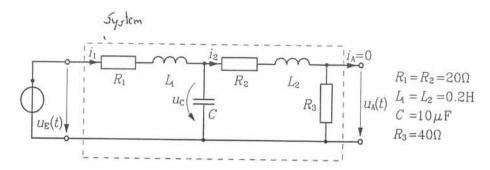


Abb. 1.1 Einfaches Beispiel eines dynamischen Systems. Die Realisierung kann mit den rechts angegebenen Parametern erfolgen.

Neben den Widerständen enthält unsere Schaltung auch energiespeichernde Stromkreiselemente, nämlich die beiden Spulen und den Kondensator. Wie groß der jeweilige Energieinhalt – der Zustand der Speicher – ist, wird bei festen Werten der Induktivitäten und der Kapazität durch die Augenblickswerte der beiden Spulenströme  $i_1(t)$  und  $i_2(t)$  und der Kondensatorspannung  $u_C(t)$  bestimmt. Diese inneren Größen heißen deshalb **Zustandsgrößen**. Enthält ein System keine Energiespeicher, so wird es speicherfrei genannt und ist, genau genommen, gar kein dynamisches System im eigentlichen Sinn.

Kennzeichnend für ein dynamisches System ist also die Existenz und die Anzahl der voneinander unabhängigen Speicherelemente. Dazu gehört die gleiche Anzahl von Zustandsgrößen, deren Augenblickswerte den momentanen Zustand des Systems festlegen. Sind die Werte aller Zustandsgrößen gleich null, so befindet sich das System im Nullzustand.

### Bezogene Größen

Ein wichtiger Punkt: Bei der Beschreibung des Verhaltens dynamischer Systeme erweist es sich meist als hilfreich, die Werte der variablen Größen als Vielfache passend gewählter, konstanter **Bezugswerte** darzustellen. "Passend gewählt" heißt, dass wir den zu beschreibenden Vorgängen möglichst gut angepasste, charakteristische Werte als Bezugsgrößen zuordnen, etwa eine Periodendauer oder eine Zeitkonstante als Bezugsdauer  $T_{\rm B}$ , Maximalwerte oder stationäre Werte als Bezugsspannungen  $U_{\rm EB}$  und  $U_{\rm AB}$  für die Eingangs- bzw. Ausgangsgrößen. Um eine Verwechslung mit den ursprünglichen Variablen zu vermeiden, müssen die so entstehenden bezogenen Variablen als solche klar erkennbar sein, am besten durch die Verwendung eigener Kernbuchstaben. Wir werden hier bevorzugt folgende Bezeichnungen verwenden (t bedeutet die ursprüngliche Zeitvariable),

44 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 ×		rhonst. Berng swort
bezogene Zeitvariablen	$\tau = t/T_{\rm B}$	2.B.: Periodendaker is 15
bezogene Eingangsgrößen	$u=u(\tau),$	sion remoderations. To
	$y = y(\tau),$	-
bezogene Zustandsgrößen	$x = x(\tau)$	

und dieselben Buchstaben auch als allgemeine Symbole für die entsprechenden Funktionen der bezogenen Zeitvariablen benutzen. Für unsere Schaltung aus

Abb.1.1 erhalten wir also nach passender, im Prinzip aber beliebiger Festlegung der Bezugswerte  $T_{\rm B}$ ,  $U_{\rm EB}$  und  $U_{\rm AB}$ 

$$\tau = t/T_{\rm B},$$

$$u(\tau) = u_{\rm E}(\tau T_{\rm B})/U_{\rm EB},$$

$$y(\tau) = u_{\rm A}(\tau T_{\rm B})/U_{\rm AB}$$

$$(1.1)$$

und entsprechend für die bezogenen Zustandsgrößen

$$x_1(\tau) = i_1(\tau T_{\rm B})/I_{1\rm B},$$
  
 $x_2(\tau) = i_2(\tau T_{\rm B})/I_{2\rm B},$  (1.2)  
 $x_3(\tau) = u_{\rm C}(\tau T_{\rm B})/U_{\rm CB}$ 

mit z.B.

$$I_{1B} = I_{2B} = U_{\rm B}/(R_1 + R_2 + R_3), \quad U_{\rm CB} = U_{\rm B}$$
 (1.3)

und einem passenden Wert für UB. Ist etwa die Eingangsspannung speziell eine Sinusspannung

$$u_{\rm E}(t) = \widehat{u}\cos(\omega t)$$

mit der Amplitude 
$$\widehat{u}$$
 und der Kreisfrequenz  $\omega$ , so schreiben wir 
$$u(\tau) = \widehat{u}\cos(\omega\tau T_{\rm B})/U_{\rm EB} = a\cos(\nu\tau) \qquad \alpha = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{\mathcal{Q}}} \qquad \nu \in \omega T_{\mathcal{Q}}$$

mit der bezogenen Amplitude  $a = \hat{u}/U_{EB}$  und der bezogenen Kreisfrequenz  $\nu = \omega T_{\rm B}$ . Falls nicht anderweitig störend, können wir überdies a=1 und  $\nu=1$  wählen, um auf die einfachste Form  $u(\tau)=\cos(\tau)$  zu kommen.

Auf diese Weise von ihren physikalischen Dimensionen aber auch von ihrer konkreten physikalischen Realisierung befreite Größen nennt man meist Signale, also z.B. Eingangssignal oder Ausgangssignal. Die Vorteile der Verwendung bezogener (normierter) Variablen sind offensichtlich: Reduktion der Signalund Systemparameter und damit Konzentration auf die wesentlichen formalen Eigenschaften; Möglichkeit der Wahl systemangepasster Maßstäbe. Überdies entfällt das häufig als lästig empfundene, für das korrekte und sichere technischphysikalische Rechnen sonst unerlässliche Mitschleppen der Einheiten. Es gibt aber auch Nachteile: Die Normierung muss als vorbereitender Schritt für eine rechnerische Systemuntersuchung explizite durchgeführt werden; die Überprüfung der physikalischen Dimensionen bzw. Einheiten steht als begleitende Rechenkontrolle nicht zur Verfügung.

### Systemmodelle

Die wesentliche Forderung an die Eingangsgröße ist, dass ihr Zeitverlauf von außen eingeprägt wird – wir werden sie deshalb immer als im Prinzip bekannt voraussetzen. Dies ist natürlich eine Idealisierung, weil der Verlauf realer physikalischer Größen selten wirklich genau erfasst werden kann. Häufig findet man z.B. einem determinierten Eingangssignal ein zufälliges Rauschen überlagert. Obwohl sich mit der hier zu entwickelnden Theorie linearer Systeme auch die Reaktion auf Zufallsgrößen behandeln lässt, werden wir diesen Gesichtspunkten nur einige ergänzende Abschnitte widmen.



**Abb. 1.2** System mit zeitdiskretem Ausgang. Die Ausgangsgröße wird periodisch (Periode T) abgetastet.

Die wesentliche Forderung an die Ausgangsgröße ist, dass ihr Zeitverlauf im Prinzip messtechnisch direkt erfasst werden kann. Diese Messung oder Registrierung geschieht nicht notwendig kontinuierlich, sie kann auch in einer Reihe von diskreten Zeitpunkten erfolgen – wir sprechen dann von einer zeitdiskreten oder abgetasteten Ausgangsgröße. Sie sehen das schematisch in Abb.1.2.

Zusätzlich zur vorgeschriebenen Eingangsgröße und zur prinzipiell durch Messung erfassbaren Ausgangsgröße gibt es noch die inneren variablen Größen, beispielsweise die Zustandsgrößen, die im Allgemeinen nicht direkt zugänglich sind. Außerdem haben wir noch die Bestimmungsgrößen (Parameter) der Systemelemente, in unserem Beispiel die Werte der Widerstände, der Induktivitäten und der Kapazität. Können die Parameter als konstant angenommen werden, so sprechen wir von einem linearen, zeitinvarianten dynamischen System. Diesen wichtigen Systembegriff werde ich etwas später noch ganz präzise fassen.

Die Elemente eines realen dynamischen Systems stehen über physikalische Beziehungen untereinander in Wechselwirkung – in unserem Beispiel über die Kirchhoff-Regeln und die konstitutiven Gleichungen der Stromkreiselemente. Daraus lässt sich ein mathematisches Modell des Systems ableiten, etwa in der Form einer Differentialgleichung. Wie man solche Modelle findet, damit werden wir uns im Kapitel 2 beschäftigen. Vom Standpunkt des Eingangs-Ausgangs-Verhaltens ist es aber nicht wirklich wichtig zu wissen, wie ein System tatsächlich aufgebaut ist. In der Hauptsache interessiert die Beziehung zwischen den Zeitfunktionen am Eingang und am Ausgang.

Dies führt uns zur weitgehend abstrakten Betrachtungsweise der eigentlichen Systemtheorie: Einem idealisierten Eingangssignal  $u(\tau)$  wird ein ebenfalls idealisiertes Ausgangssignal  $y(\tau)$  zugeordnet, ohne zunächst auf die physikalische Realisierbarkeit dieser Zuordnung einzugehen. Anders ausgedrückt, wir legen ab einem Anfangszeitpunkt  $\tau_0$  an den Eingang eines Systems ein Signal  $u(\tau)$  und untersuchen, mit welchem Signal  $y(\tau)$  das System zu den Zeitpunkten  $\tau > \tau_0$  darauf antwortet. Allerdings wird diese Antwort im Allgemeinen davon abhängen, in welchem Zustand sich das System zum Anfangszeitpunkt gerade befindet, d.h. welche Werte  $x_1(\tau_0), \ldots, x_n(\tau_0)$  die bezogenen Zustandgrößen bei  $\tau_0$  annehmen. Wir fassen diese Anfangswerte in einem n-Tupel

$$\underline{\alpha} = \underline{x}(\tau_0) = (x_1(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0)) \tag{1.4}$$

zusammen und schreiben die Eingangs-Ausgangs-Relation als Abbildung

$$S: (u, \underline{\alpha}) \longmapsto y = S[u; \underline{\alpha}], \tag{1.5}$$

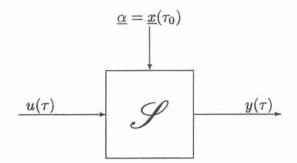


Abb. 1.3 Das Ausgangssignal y eines dynamischen Systems hängt vom Eingangssignal u und vom Anfangszustand  $\alpha$  ab.

die jedem Eingangssignal u und jedem Anfangszustand  $\underline{\alpha} = \underline{x}(\tau_0)$  genau ein Ausgangssignal y zuordnet (Abb.1.3). Die formalen Eigenschaften eines Systems lassen sich dann über die Eigenschaften der Abbildung S vollständig erfassen.

#### 1.2 Determinierte Signale

Der Begriff des Signals entsteht in einem Abstraktionsprozess: Ausgehend vom Verlauf einer konkreten physikalischen Größe gelangen wir nach der Einführung geeigneter Bezugsgrößen zu einer Relation, in der die Signalvariable x mit einer Variablen τ - meist der bezogenen Zeitvariablen - in Beziehung gesetzt wird. Unter einem determinierten Signal soll dann speziell eine Abbildung (Funktion)

 $x: \tau \longmapsto x = x(\tau)$ 

verstanden werden, die jedem  $\tau$  aus einem reellen Definitionsbereich genau einen Wert  $x = x(\tau)$  aus einem näher festzulegenden Wertebereich zuordnet. Wir schließen uns dabei der üblichen Freizügigkeit an und bezeichnen sowohl das Signal selbst wie auch seine Werte mit x und mit  $x(\tau)$  oder auch mit u und  $u(\tau)$ oder y und  $y(\tau)$ , um hervorzuheben, dass es sich speziell um ein Eingangssignal bzw. um ein Ausgangssignal handelt. Die begrifflichen Unterschiede zwischen Funktionen und Funktionswerten sollten damit allerdings nicht verloren gehen.

Ist der Definitionsbereich des Signals (1.6) ein Intervall oder der ganze Bereich der reellen Zahlen, so sprechen wir von einem zeitkontinuierlichen Signal, wobei in der Regel stückweise Stetigkeit vorausgesetzt wird. Je nach Anwendung können Signale reellwertig oder komplexwertig sein. Im Folgenden möchte ich einige spezielle Signale vorstellen, die in der Systemtheorie als elementare Signale häufig benutzt werden.

### Sinussignale

Das wohl wichtigste Elementarsignal ist die Sinusschwingung, die in ihrer Grundform durch die  $2\pi$ -periodische Kosinusfunktion

$$x(\tau) = \cos(\tau) \tag{1.7}$$

dargestellt wird. Eine Variablentransformation  $\tau \longmapsto \tau - \tau_0$  verschiebt das Signal um  $\tau_0$  entlang der  $\tau$ -Achse (Abb.1.4a), und zwar für  $\tau_0>0$  nach rechts (nach Ansgars, Firgery, Zustand

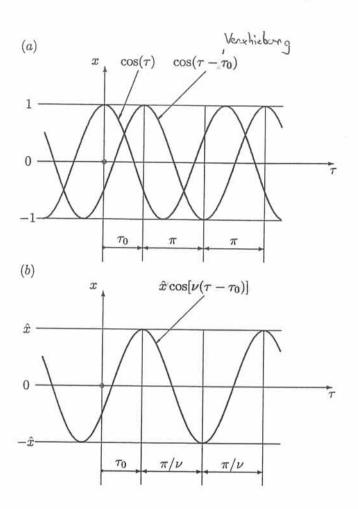


Abb. 1.4 Sinussignale. (a) Grundform und um τ<sub>0</sub> verschobene Grundform der Sinusschwingung. (b) Bezogene Standardform der Sinusschwingung mit der Amplitude  $\widehat{x}$ , der bezogenenen Periodendauer  $2\pi/\nu$  und dem Nullphasenwinkel  $-\nu\tau_0$ .

"später") und für  $\tau_0 < 0$  nach links (nach "früher"). Die Variablentransformation  $\tau \longmapsto \nu(\tau - \tau_0)$  mit  $\nu > 0$ , reell, und die Multiplikation der Funktionswerte mit der reellen Konstanten  $\widehat{x} > 0$  erzeugt aus (1.7) die bezogene, reelle Standardform der Sinusschwingung

$$x(\tau) = \widehat{x}\cos(\nu\tau + \varphi_0). \tag{1.8}$$

Sie besitzt die Amplitude  $\hat{x}$ , die bezogene Periodendauer  $2\pi/\nu$  und den Nullphasenwinkel  $\varphi_0 = -\nu \tau_0$  (Abb.1.4b). Für  $\nu = 2\pi$  ist das Sinussignal speziell 1-periodisch.

Bekanntlich lässt sich die reelle Standardform (1.8) einer Sinusschwingung als Realteil der komplexen Standardform  $x(\tau) = c e^{\mathrm{j} \nu \tau}, \quad c = |c| e^{\mathrm{j} \varphi_0}$ 

$$x(\tau) = c e^{j\nu\tau}, \quad c = |c| e^{j\varphi_0}$$
(1.9)

angeben, wobei die komplexe Konstante c die Rolle der komplexen Amplitude spielt: Ihr Betrag  $|c|=\widehat{x}$  ist die reelle Amplitude, ihr Winkel  $\varphi_0=\mathrm{arc}(c)$  der

Nullphasenwinkel. In der komplexen Ebene entspricht diese Darstellung einem Punkt, der mit der bezogenen Winkelgeschwindigkeit  $\nu$  im Gegenuhrzeigersinn entlang eines Kreises mit dem Radius |c| um den Ursprung läuft.

Eine natürliche, in der linearen Systemtheorie häufig benutzte Verallgemeinerung der komplexen Sinusschwingung (1.9) wird durch die komplexe Exponentialfunktion

$$x(\tau) = c \exp(s\tau) = c e^{s\tau}$$
 for any order abblingance Functionen  $c = |c| e^{-j\nu\tau_0}$ ,  $s = \sigma + j\nu$  (1.10) 6 por abblingance functions of the proportion of

mit dem komplexen Frequenzparameter s und reellen Werten  $\sigma$  und  $\nu$  wiedergegeben. Wegen

$$x(\tau) = |c| e^{-j\nu\tau_0} e^{(\sigma+j\nu)\tau} = |c| e^{\sigma\tau} e^{j\nu(\tau-\tau_0)}$$
  
= |c| e^{\sigma\tau} \{ \cos [\nu(\tau - \tau\_0)] + j \sin [\nu(\tau - \tau\_0)] \} (1.11)

ergibt sich daraus durch Realteilbildung für  $\sigma>0$  ein aufklingend oszillierendes, für  $\sigma<0$  ein abklingend oszillierendes Signal (Abb.1.5). Für  $\sigma=0$  erhalten wir die allgemeine Sinusschwingung und für  $\nu=0$  einen monoton aufklingenden bzw. einen monoton abklingenden Verlauf. Welche Kurven werden durch (1.10) in der komplexen Ebene beschrieben?

### Der Heaviside-Sprung und verwandte Signale

Neben den Sinussignalen sind noch einige andere elementare Signale als Idealisierungen realer Zeitverläufe in häufigem Gebrauch. Vier Grundformen sehen Sie in Abb.1.6, nämlich die Sprungfunktion, auch Heaviside-Sprung genannt,

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0, \\ & \text{für} \\ 1 & \tau > 0, \end{cases}$$
 (1.12)

die Rampenfunktion

$$ramp(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0, \\ & \text{für} \\ \tau & \tau > 0, \end{cases}$$
 (1.13)

die Rechteckfunktion

$$rect(\tau) = \begin{cases} 0 & |\tau| > 1/2, \\ & \text{für} \\ 1 & |\tau| < 1/2 \end{cases}$$
 (1.14)

und die Dreieckfunktion

$$tri(\tau) = \begin{cases} 0 & |\tau| > 1, \\ & \text{für} \\ |1 - |\tau| & |\tau| < 1. \end{cases}$$
 (1.15)

Die zunächst undefinierten Funktionswerte an den Sprungstellen bzw. die Werte der Ableitungen an den Knickstellen werden nach Bedarf festgelegt, für den

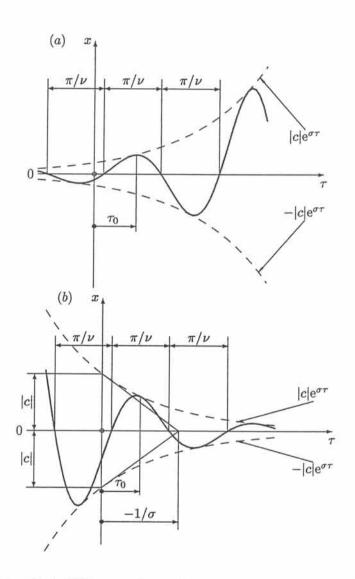


Abb. 1.5 Durch Realteilbildung entsteht aus dem komplexen Exponentialsignal (1.10) bzw. (1.11) für  $\sigma > 0$  das oszillierend aufklingende Signal (a) und für  $\sigma < 0$  das oszillierend abklingende Signal (b).

### 1.2 Determinierte Signale

9

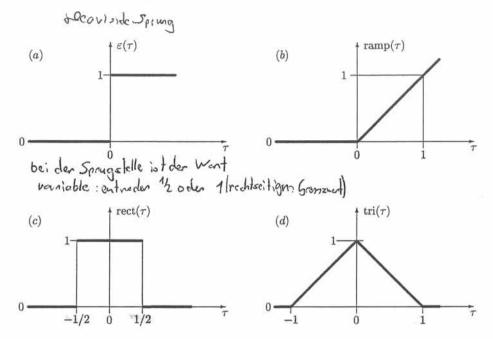


Abb. 1.6 Grundformen häufig gebrauchter Signale. (a) Sprungfunktion (Heaviside-Sprung). (b) Rampenfunktion. (c) Rechteckfunktion. (d) Dreieckfunktion.

Heaviside-Sprung z.B. mit  $\varepsilon(0)=1$  als der rechtsseitige Grenzwert oder mit  $\varepsilon(0)=1/2$  als der Mittelwert des rechtsseitigen und des linksseitigen Grenzwertes an der Sprungstelle.

Offensichtlich sind diese Grundsignale eng miteinander verwandt. So lässt sich etwa die Rampenfunktion durch

funktion durch imananhago: 
$$\operatorname{ramp}(\tau) = \tau \varepsilon(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \varepsilon(\tau') d\tau'$$
 Rampon that = lategral von Javisick Spa

auf den Heaviside-Sprung zurückführen. Weiters können wir mit einer Zeitverschiebung (Translation)  $\tau \longmapsto \tau - \tau_0$  den Heaviside-Sprung in einen beliebigen Zeitpunkt  $\tau_0$  verlegen und damit die Rechteckfunktion auch als

$$\operatorname{rect}(\tau) = \varepsilon(\tau + 1/2) - \varepsilon(\tau - 1/2)$$
 rach links enclosely inschiben : jeneil can  $1/2$ 

angeben. Schließlich sollten Sie sich die Darstellung

Aus den Grundsignalen lassen sich aber auch allgemeinere Signalformen gewinnen. Beispielsweise erhalten wir aus der Rechteckfunktion über die Varia-

blentransformation 
$$\tau \longmapsto (\tau - \tau_0)/b$$
 das Signal 
$$x(\tau) = a \operatorname{rect}\left(\frac{\tau - \tau_0}{b}\right), \quad \text{belieb is grasse breits Rechteclifflit}$$
 (1.16)

einen symmetrisch um  $\tau_0$  gelegenen Rechteckimpuls der bezogenen Dauer |b| und der Größe a (Abb.1.7), der natürlich immer noch eine Idealisierung darstellt. Ob

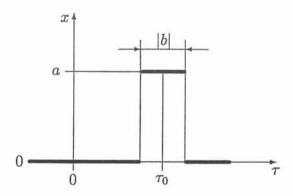


Abb. 1.7 Durch eine Variablentransformation entsteht aus der Rechteckfunktion (1.14) das Signal (1.16), ein symmetrisch um τ<sub>0</sub> gelegener Rechteckimpuls der Dauer |b|.

es sich dabei um ein brauchbares Modell für einen realen Rechteckimpuls handelt, hängt davon ab, ob dessen Anstiegs- und Abfallzeiten als klein gegenüber der Bezugsdauer – unserem systemangepassten Zeitmaßstab – angenommen werden können. Sind diese Randzeiten nicht vernachlässigbar, liefert ein aus der Rampenfunktion leicht erzeugbarer Trapezverlauf möglicherweise ein besseres Modell.

### Der Dirac-Stoß

Ein zur Modellierung kurzer, kräftiger Impulse (Stöße) nützliches Signal ergibt sich aus dem folgenden Abstraktionsprozess. Stellen Sie sich, wie in Abb.1.8a angedeutet, den Heaviside-Sprung  $\varepsilon(\tau)$  als den Grenzfall einer Folge stetiger, zunehmend steiler verlaufender Übergänge vor und sehen Sie sich dann die zugehörigen Änderungsraten (Ableitungen) in Abb.1.8b an: Es entsteht eine Folge immer kürzerer Impulse, die alle die bezogene Zeitsumme ("Signalfläche") 1 besitzen und deshalb immer größer werden. Als Grenze erhalten wir den so genannten **Dirac-Stoß**  $\delta(\tau)$ , intuitiv gekennzeichnet durch die Eigenschaften

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1, \quad \text{Finite 1}$$

$$\delta(0) = \infty; \quad \delta(\tau) = 0 \quad \text{für } \tau \neq 0.$$
(1.17)

Allerdings wird durch (1.17) keine Funktion im gewöhnlichen Sinn beschrieben, weil die angedeuteten Grenzübergänge im Rahmen der klassischen Analysis nicht wirklich ausführbar sind. Mathematisch gesehen gehört der Dirac-Stoß – auch Delta-Funktion genannt – in die Klasse der verallgemeinerten Funktionen oder Distributionen, die als Spezialfall sowohl die gewöhnlichen Funktionen wie auch die Delta-Funktionen umfasst. Die zugehörige Theorie der Distributionen liefert die Rechtfertigung für die im Folgenden eher intuitiv zusammengestellten wesentlichen Eigenschaften.

Die Verwendung des Gleichheitszeichens ist dabei im verallgemeinerten Sinn so aufzufassen: Angenommen,  $x_1(\tau)$  und  $x_2(\tau)$  sind zwei Ausdrücke, die gewöhnliche Funktionen oder  $\delta$ -Funktionen enthalten können. Wir betrachten die beiden Ausdrücke genau dann als gleich und schreiben  $x_1(\tau) = x_2(\tau)$ , wenn für

Unstieg

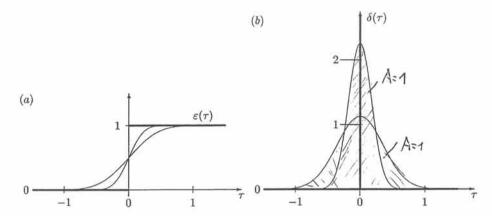


Abb. 1.8 Wird der Heaviside-Sprung  $\varepsilon(\tau)$  als Grenzfall einer Folge stetiger Übergänge aufgefasst (a), so liefert die Folge der zugehörigen Ableitungen im Grenzfall den Dirac-Stoß  $\delta(\tau)$  (b).

alle gewöhnlichen, hinreichend glatten Funktionen  $f(\tau)$  die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) f(\tau) d\tau$$
 (1.18)

besteht, vorausgesetzt, die Integrale existieren. In diesem Sinn führen wir den Dirac-Stoß als Ableitung des Heaviside-Sprungs ein,

$$\delta(\tau) = \varepsilon'(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \varepsilon(\tau). \tag{1.19}$$

Dies lässt sich übrigens ohne Probleme verallgemeinern. Die n-te Ableitung des Heaviside-Sprungs, also die (n-1)-te Ableitung des Dirac-Stoßes,

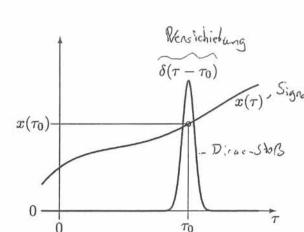
$$\delta^{(n-1)}(\tau) = \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\tau^{n-1}}\delta(\tau) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\tau^n}\varepsilon(\tau), \quad n = 1, 2, \dots,$$
 (1.20)

bezeichnen wir als  $Sto\beta$  n-ter Ordnung. Mit Blick auf Abb.1.8 können Sie sich die Ableitung des Dirac-Stoßes, also den Stoß zweiter Ordnung, als  $Doppelsto\beta$  vorstellen (ein Stoß zuerst in den positiven und daran anschließend in den negativen Bereich), den Stoß dritter Ordnung als  $Dreifachsto\beta$  usw. Weiters haben wir, ganz im Sinn von Abb.1.8b, die  $\delta$ -Funktion als eine gerade Funktion aufzufassen,  $\delta(-\tau) = \delta(\tau)$ . Da aber die Ableitung einer geraden eine ungerade Funktion ist, und umgekehrt, schließen wir

und umgekehrt, schließen wir 
$$\delta^{(n)}(-\tau) = (-1)^n \delta^{(n)}(\tau), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$
 (1.21)

Eine einfache Translation,  $\delta(\tau - \tau_0)$ , verschiebt den Dirac-Stoß vom Zeitnullpunkt in einen beliebigen Zeitpunkt  $\tau_0$ .

Die Schlüsseleigenschaft des Dirac-Stoßes ist die so genannte  ${f Abtasteigenschaft}$ 



\$6(T-T0) x (T0) = x(7)

Abb. 1.9 Mit einem Dirac-Stoß lässt sich über die Abtasteigenschaft (1.22) der Signalwert zu einem festen Zeitpunkt  $\tau_0$  aussieben.

wobei  $x(\tau)$  ein stetiges, sonst aber beliebiges Signal bezeichnet. Der Name dieser Eigenschaft wird klar, wenn wir einen festen Zeitpunkt  $\tau=\tau_0$  ins Auge fassen und die Integrationsvariable anstelle von  $\tau'$  wieder mit  $\tau$  bezeichnen (Abb.1.9): Die Beziehung (1.22) erzeugt dann aus dem Signal  $x(\tau)$  seinen Wert  $x(\tau_0)$  an der Stelle des Dirac-Stoßes. Im Sinne der durch Gl.(1.18) definierten Äquivalenz können wir dies auch in der Form

$$x(\tau)\delta(\tau - \tau_0) = x(\tau_0)\delta(\tau - \tau_0) \tag{1.23}$$

schreiben. Auf der rechten Seite steht dann ein Stoß vom Gewicht  $x(\tau_0)$  an der Stelle  $\tau_0$ .

Eine Erweiterung der Abtasteigenschaft finden wir in

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(\tau - \tau')x(\tau')d\tau' = x^{(n)}(\tau), \qquad (1.24)$$

wobei  $x^{(n)}(\tau)$  die n-te Ableitung des Signals  $x(\tau)$  bedeutet. Ist  $x(\tau)$  nicht nach den klassischen Regeln differenzierbar sondern hat Ableitungen im Bereich der Distributionen, so können wir Gl.(1.24) immer noch im Sinn von (1.18) interpretieren. Solch ein Fall liegt beispielsweise in

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(\tau - \tau') \delta^{(m)}(\tau') d\tau' = \delta^{(n+m)}(\tau)$$
(1.25)

vor.

12

Interessant ist auch die folgende Eigenschaft. Sei  $r(\tau)$  eine Funktion mit einfachen Nullstellen bei  $\tau_1, \tau_2, \dots$  Bezeichnen  $r'(\tau_k)$  die Werte der Ableitungen an diesen Nullstellen, so gilt

$$\delta(r(\tau)) = \sum_{k} \frac{1}{|r'(\tau_k)|} \delta(\tau - \tau_k). \tag{1.26}$$

Es entsteht also eine Summe von Stößen vom Gewicht  $1/|r'(\tau_k)|$  an den Stellen  $\tau_k$ . Als Spezialfall erhalten wir mit einer beliebigen Konstanten a die nützliche Beziehung

$$\delta(a\tau) = \frac{1}{|a|}\delta(\tau),\tag{1.27}$$

die sich auch direkt über eine Variablentransformation in der grundlegenden Normierungsbedingung  $(1.17)_1$  zeigen lässt.

### 1.3 Zufallssignale

Neben den determinierten Signalen, deren Verlauf durch die Angabe einer Abbildung (1.6) wohlbestimmt ist, werden Sie in den Anwendungen immer wieder Signalen eines anderen Typs begegnen, deren Realisierungen von zufällig eintretenden Ereignissen abhängen und die deshalb Zufallssignale genannt werden. Es kann sich dabei z.B. um Nutzsignale handeln, die zur Informationsübertragung verwendet werden und deren künftiger Verlauf deshalb dem Empfänger noch nicht im Detail bekannt ist, oder um Störsignale, etwa das Rauschen elektronischer Bauelemente, Verstärker oder Antennen.

### Zufallsexperimente und Wahrscheinlichkeitsmaße

Für die Behandlung von Zufallssignalen brauchen wir einige Begriffe aus der Wahrscheinlichkeitstheorie, die ich im Folgenden in geraffter Form zusammenstelle.

Ein Experiment (im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie) heißt ein **Zufallsexperiment**, wenn (i) es sich unter gleichen äußeren Bedingungen beliebig oft wiederholen lässt, (ii) bei seiner Durchführung mehrere, sich gegenseitig ausschließende Ergebnisse möglich sind und (iii) sich das Ergebnis nicht mit Sicherheit voraussagen lässt, sondern zufallsbedingt ist. Alle möglichen, sich aber gegenseitig ausschließenden Ergebnisse e fassen wir in einer Menge  $\Omega$  zusammen und nennen sie den **Ergebnisraum** des Zufallsexperiments. Um etwas Konkretes vor Augen zu haben, stellen Sie sich unter dem Ergebnisraum am besten gleich eine nicht abzählbar unendliche Menge vor, etwa die Menge der reellen Zahlen,  $\Omega = \mathbb{R}$ , oder ein Intervall davon. Dies könnten beispielsweise die Ergebnisse der Messungen einer (bezogenen) physikalischen Größe mit kontinuierlichem Wertebereich sein.

Eine Teilmenge  $A \subset \Omega$  des Ergebnisraums nennen wir ein **Ereignis**, und wir sagen, das Ereignis A tritt ein, wenn das Ergebnis e eines Zufallsexperiments zu A gehört,  $e \in A$ . In unserem Beispiel wählen wir etwa ein reelles Intervall als Ereignis aus. Dieses tritt bei unserem Zufallsexperiment – der Messung – dann ein, wenn das Messergebnis im ausgewählen Intervall liegt. Das unmögliche Ereignis ist die leere Menge (weil kein Ergebnis zu  $\emptyset$  gehört), und das sichere Ereignis ist der Ergebnisraum selbst (weil  $\Omega$  alle möglichen Ergebnisse umfasst). Ist A ein Ereignis, so heißt  $\overline{A} = \Omega \setminus A$  das zugehörige Gegenereignis. Weiters ist mit zwei Ereignissen auch deren Vereinigung und deren Durchschnitt wieder ein Ereignis.

Wenn ein Ereignis also immer eine Teilmenge eines Ergebnisraums ist, so finden wir für einen vorgegebenen Ergebnisraum  $\Omega$  alle möglichen Ereignisse in der Potenzmenge  $\mathfrak{P}(\Omega)$  versammelt. Allerdings ist  $\mathfrak{P}(\Omega)$  insbesondere für nicht abzählbar unendliche  $\Omega$  in den meisten Anwendungen viel zu umfangreich, um nützlich zu sein. Wir legen uns deshalb eine kleinere Ereignismenge mit passenden Eigenschaften durch die folgende Konstruktion zurecht: Ein Mengensystem  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$  heißt Ereignisalgebra über  $\Omega$ , wenn (i) das unmögliche Ereignis  $\emptyset$  und das sichere Ereignis  $\Omega$  zu  $\mathfrak{A}$  gehören, (ii) mit jeder abzählbaren Ansammlung  $A_1, A_2, \ldots$  von Ereignissen aus  $\mathfrak{A}$  auch deren Vereinigung  $\bigcup A_i$  und deren Durchschnitt  $\bigcap A_i$  zu  $\mathfrak{A}$  gehören und (iii) mit irgend zwei Ereignissen A, B auch  $A \setminus B$  in  $\mathfrak{A}$  vertreten ist. Die Benennung "Algebra" ist gerechtfertigt, weil die

Elemente von 🎗 zusammen mit den beiden Verknüpfungen ∪ und ∩ und der Komplementbildung eine Boole-Algebra bilden.

Nach diesen Vorbereitungen ist es zumindest formal ganz einfach, einen präzisen Wahrscheinlichkeitsbegriff über die beiden Kolmogoroff-Axiome einzuführen. Unter einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf einer Ereignisalgebra 21 versteht man eine Abbildung  $P: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit den Eigenschaften

(i) 
$$P(\Omega) = 1$$
,

(ii) 
$$P\left(\bigcup A_i\right) = \sum P(A_i)$$
, falls die Mengen  $A_i$  paarweise disjunkt sind.

Daraus folgt, dass dem zu einem Ereignis A gehörenden Gegenereignis  $\overline{A}$  das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$  zugeordnet wird. Das sichere Ereignis erhält demnach den Wert 1, das unmögliche den Wert 0. Für zwei einander ausschließende Ereignisse (disjunkte Mengen)  $A, B \in \mathfrak{A}$  gilt  $P(A \cup B) = P(A) +$ P(B). Wenn sie einander nicht ausschließen, erhalten wir mit den Regeln der Boole-Algebra oder auch ganz anschaulich aus einem Mengendiagramm  $P(A \cup B)$  $= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  oder, äquivalent,  $P(A \setminus B) = P(A \cup B) - P(B)$ . Ist B eine Teilmenge von A, schließen wir daraus weiter  $P(A \setminus B) = P(A) - P(B) \ge 0$ , d.h. aus  $B \subset A$  folgt  $P(B) \leq P(A)$  und somit auch  $0 \leq P(A) \leq 1$  für beliebige Ereignisse  $A \in \mathfrak{A}$  aus unserer Ereignisalgebra.

Die Verbindung des formalen mit dem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff ergibt sich aus der folgenden Überlegung. Wird ein Zufallsexperiment mehrmals, sagen wir n-mal, durchgeführt, so nennt man die Anzahl der Ergebnisse, bei denen ein vorgegebenes Ereignis A eintritt, die absolute Häufigkeit H(A) des Ereignisses A und den Quotienten h(A) = H(A)/n dessen relative Häufigkeit. Mit wachsendem n nähert sich h(A) dem Wert P(A) des Wahrscheinlichkeitsmaßes in dem Sinne, dass größere Abweichungen immer unwahrscheinlicher werden. Dies ist das so genannte Gesetz der großen Zahlen.

### Zufallsgrößen und Verteilungsfunktionen

Stellen Sie sich nun einerseits einen Ergebnisraum  $\Omega$  vor, also die Menge aller möglichen Ergebnisse e eines Zufallsexperiments, andererseits eine umfangreiche, meist nicht abzählbare Menge (Schar, Ensemble) von determinierten Signalen. Unter einem Zufallssignal  $\widetilde{x}_{\tau}$  verstehen wir dann im Wesentlichen eine Abbildung von  $\Omega$  in die Signalmenge, also eine Vorschrift  $z_n$  seden Ergebnis kommteri Sign $\widetilde{x}_{\tau}: e \longmapsto x(\tau; e) = \widetilde{x}_{\tau}(e),$   $\mathcal{R} \longrightarrow Signalmenge,$ 

$$\widetilde{x}_{ au}: e \longmapsto x( au; e) = \widetilde{x}_{ au}(e), \qquad \widetilde{\mathcal{N}} \longrightarrow Signal men (1.28)$$

durch die jedem Element e des Ergebnisraums genau ein gewöhnliches Signal  $x(\tau;e)$  – eine Realisierung – zugeordnet wird. Die Bausteine von Zufallssignalen sind demnach determinierte Signale, und das Zufällige liegt nicht etwa in einem unsicheren Verlauf einer bestimmten Realisierung, sondern in deren zufälligen Auswahl durch das Ergebnis eines Zufallsexperiments (Abb.1.10).

Fassen wir einen beliebigen aber festen Zeitpunkt  $\tau_1$  ins Auge, so können wir die Werte  $x(\tau_1;e) \in \mathbb{R}$  der Realisierungen des Zufallssignals als die Werte einer Zufallsgröße im gewöhnlichen Sinn auffassen. Ausgehend vom Ergebnisraum  $\Omega$ und einer zugehörigen Ereignisalgebra 21 legen wir fest: Eine Abbildung

$$\widetilde{x}_{\tau_1}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ durch } e \longmapsto x(\tau_1; e) = \widetilde{x}_{\tau_1}(e),$$
 (1.29)

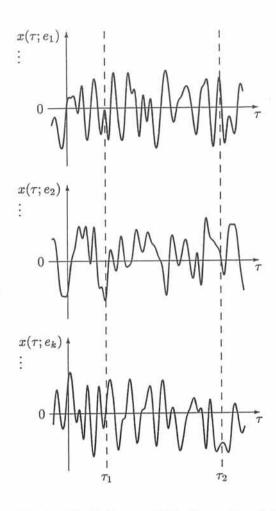


Abb. 1.10 Zufallssignal. Durch die Ergebnisse  $e_1,e_2,...$  eines Zufallsexperiments werden aus einer Schar von determinierten Signalen gewisse Realisierungen ausgewählt. Die Signalwerte zu irgendeinem festen Zeitpunkt  $\tau_1$  sind die Werte einer Zufallsgröße.

die den Ergebnisraum  $\Omega$  in die reellen Zahlen abbildet und damit jedem Ergebnis e genau einen Wert  $x(\tau_1;e)$  zuordnet, ist eine **Zufallsgröße** der Ereignisalgebra  $\mathfrak A$  über  $\Omega$ , wenn die Urbilder jeder Zahl und jedes Intervalls aus  $\mathbb R$  zu  $\mathfrak A$  gehören. Ist  $x\in\mathbb R$  solch eine Zahl, so schreibt man die Urbildmenge  $\{e\mid \widetilde x_{\tau_1}(e)=x\}$  üblicherweise kurz als  $\widetilde x(\tau_1)=x$  und entsprechend die Urbildmenge  $\{e\mid \widetilde x_{\tau_1}(e)\leqslant x\}$  als  $\widetilde x(\tau_1)\leqslant x$ . Als Elemente von  $\mathfrak A$  beschreiben die Ausdrücke  $\widetilde x(\tau_1)=x$  und  $\widetilde x(\tau_1)\leqslant x$  in diesem Zusammenhang also Ereignisse, die Zufallsgröße  $\widetilde x_{\tau_1}$  wird mit  $\widetilde x(\tau_1)$  und das Zufallssignal  $\widetilde x_{\tau}$  selbst mit  $\widetilde x(\tau)$  bezeichnet.

Über dem Ergebnisraum  $\Omega$  und der zugehörigen Ereignisalgebra  $\mathfrak A$  sei nun auch ein Wahrscheinlichkeitsmaß P definiert<sup>1</sup>. Unserer Zufallsgröße  $\widetilde{x}(\tau_1)$  lässt sich dann eine monoton steigende **Verteilungsfunktion** 

$$F: \mathbb{R} \longrightarrow (0;1) \text{ durch } x \longmapsto F(x;\tau_1) = P(\widetilde{x}(\tau_1) \leqslant x)$$
 (1.30)

zuordnen; sie liefert den Wert des Wahrscheinlichkeitsmaßes – kurz, die Wahrscheinlichkeit – dafür, dass ein aus unserer Schar durch das zugrundeliegende Zufallsexperiment willkürlich ausgewähltes Signal zum Zeitpunkt  $\tau_1$  den Schwellen-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Man nennt das Tripel (Ω, A, P) dann einen Wahrscheinlichkeitsraum.

wert x nicht überschreitet. Die Zufallsgröße heißt stetig, wenn ihre Verteilungsfunktion stetig ist. Können wir überdies voraussetzen, dass die Verteilungsfunktion fast überall differenzierbar ist, so gibt es für unsere Zufallsgröße  $\widetilde{x}(\tau_1)$  auch eine so genannte **Dichtefunktion**  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit Werten  $f(x; \tau_1)$  und der Eigenschaft

eine so genannte Dichtefunktion  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit Werten  $f(x; \tau_1)$  und der Eigenschaft  $F(x; \tau_1) = \int_{-\infty}^x f(\xi; \tau_1) d\xi, \tag{1.31}$ 

d.h.,  $f(x;\tau_1)\Delta x$  gibt für kleine  $\Delta x$  näherungsweise die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Signalwert zwischen x und  $x+\Delta x$  liegt. Wegen  $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$  gilt stets  $\int_{-\infty}^{\infty}f(x;\tau_1)\mathrm{d}x=1$ .

### Scharmittelwert und Varianz

Mit der Angabe ihrer Verteilungsfunktion oder ihrer Dichtefunktion ist eine Zufallsgröße – in unserem Fall die Verteilung der Werte eines Zufallssignals zu einem festen Zeitpunkt – vollständig festgelegt. In der statistischen Beschreibung begnügt man sich jedoch häufig mit einigen charakterisierenden Zahlenwerten, den Erwartungswerten, die eine Zufallsgröße zwar nicht vollständig, für manche Zwecke aber ausreichend genau erfassen.

Die wichtigste Kennzahl einer stetigen (bezogenen, reellwertigen) Zufallsgröße  $\widetilde{x}(\tau_1)$  ist ihr Scharmittelwert  $m_x(\tau_1)$ , definiert als Erwartungswert

$$m_x(\tau_1) = E[\widetilde{x}(\tau_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x; \tau_1) dx, \qquad (1.32)$$

wobei  $f(x;\tau_1)$  die zu  $\widetilde{x}(\tau_1)$  gehörende Dichtefunktion bezeichnet. Eine weitere Kennzahl erfasst die Abweichungen vom Mittelwert. Um dabei größere Abweichungen besonders wirksam zu berücksichtigen, verwenden wir den Erwartungswert der quadrierten Differenz. Dies ist die **Varianz** 

$$\sigma_x^2(\tau_1) = E[(\widetilde{x}(\tau_1) - m_x(\tau_1))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x(\tau_1))^2 f(x; \tau_1) dx.$$
 (1.33)

Der Wert  $\sigma_x(\tau_1) = \sqrt{\sigma_x^2(\tau_1)}$  heißt **Standardabweichung** oder **Streuung** unserer Zufallsgröße  $\widetilde{x}(\tau_1)$ . Manchmal wird auch der so genannte quadratische Scharmittelwert

$$E[\widetilde{x}(\tau_1)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x; \tau_1) dx$$
 (1.34)

eingeführt, wobei offensichtlich der Zusammenhang

$$E[\widetilde{x}(\tau_1)^2] = m_x(\tau_1)^2 + \sigma_x^2(\tau_1)$$

besteht. Auf ähnliche Weise lassen sich auch Momente höherer Ordnung definieren.

### Korrelation und Kovarianz

Bei der Betrachtung von Zufallssignalen ist es häufig interessant zu wissen, wie die Signalwerte zu unterschiedlichen Zeitpunkten miteinander verknüpft sind. Wir fassen deshalb zwei beliebige aber feste bezogene Zeitpunkte  $\tau_1$  und  $\tau_2$  ins Auge (Abb.1.10) und definieren in Erweiterung von (1.30) eine Verteilungsfunktion zweiter Ordnung oder Verbundverteilung

$$F(x_1, x_2; \tau_1, \tau_2) = P(\widetilde{x}(\tau_1) \leqslant x_1, \widetilde{x}(\tau_2) \leqslant x_2)$$

$$(1.35)$$

als Verbundwahrscheinlichkeit dafür, dass ein aus unserer Schar durch das zugrundeliegende Zufallsexperiment willkürlich ausgewähltes Signal zum Zeitpunkt  $\tau_1$  den Schwellenwert  $x_1$  und zum Zeitpunkt  $\tau_2$  den Schwellenwert  $x_2$  nicht überschreitet. Zu jeder stetigen, fast überall differenzierbaren Verbundverteilung gibt es dann eine **Dichtefunktion zweiter Ordnung** oder **Verbunddichte**  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_0^+$  mit den Werten  $f(x_1, x_2; \tau_1, \tau_2)$  und der Eigenschaft

$$F(x_1, x_2; \tau_1, \tau_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(\xi_1, \xi_2; \tau_1, \tau_2) d\xi_1 d\xi_2.$$
 (1.36)

Wir interpretieren dies so: Für kleine  $\Delta x_1$  und  $\Delta x_2$  gibt  $f(x_1, x_2; \tau_1, \tau_2) \Delta x_1 \Delta x_2$  die Verbundwahrscheinlichkeit dafür an, dass bei  $\tau_1$  der Signalwert zwischen  $x_1$  und  $x_1 + \Delta x_1$  und bei  $\tau_2$  der Signalwert zwischen  $x_2$  und  $x_2 + \Delta x_2$  liegt.

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich für unser Zufallssignal  $\widetilde{x}(\tau)$  nun auch statistische Kenngrößen zweiter Ordnung einführen. Beispielsweise heißt der Erwartungswert des Produkts der beiden Zufallsgrößen  $\widetilde{x}(\tau_1)$  und  $\widetilde{x}(\tau_2)$  die Autokorrelationsfunktion

$$r_{xx}(\tau_1, \tau_2) = E[\widetilde{x}(\tau_1)\widetilde{x}(\tau_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; \tau_1, \tau_2) dx_1 dx_2, \quad (1.37)$$

die zunächst getrennt von beiden Beobachtungszeitpunkten  $\tau_1$  und  $\tau_2$  abhängt. Werden vor der Produktbildung die jeweiligen Scharmittelwerte subtrahiert, ergibt sich die **Autokovarianzfunktion** 

$$c_{xx}(\tau_1, \tau_2) = E[(\widetilde{x}(\tau_1) - m_x(\tau_1))(\widetilde{x}(\tau_2) - m_x(\tau_2))]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x(\tau_1))(x_2 - m_x(\tau_2))f(x_1, x_2; \tau_1, \tau_2) dx_1 dx_2,$$
(1.38)

und es gilt der Zusammenhang

$$r_{xx}(\tau_1, \tau_2) = m_x(\tau_1)m_x(\tau_2) + c_{xx}(\tau_1, \tau_2).$$

Grundsätzlich könnten wir auch Verknüpfungen zwischen Signalwerten zu jeweils drei oder noch mehr Zeitpunkten herstellen und dann neben den Statistiken erster und zweiter Ordnung solche höherer Ordnung einführen.

### Stationäre Zufallssignale

Die mathematische Behandlung von Zufallssignalen lässt sich erheblich vereinfachen, wenn sie eine spezielle, für die Anwendungen außerordentlich wichtige

Eigenschaft besitzen: Stationarität. Wir nennen ein Zufallssignal (im strengen Sinn) stationär, wenn sich seine statistischen Eigenschaften bei einer beliebigen zeitlichen Verschiebung nicht ändern. Daraus folgt einerseits, dass die Dichtefunktion wegen  $f(x;\tau_1)=f(x;\tau_1+\tau')$  für beliebige  $\tau'$  überhaupt nicht von der Zeitvariablen abhängen kann; wir schreiben deshalb kurz f(x). Andererseits muss dann auch die Verbunddichte für beliebige  $\tau'$  die Beziehung  $f(x_1,x_2;\tau_1,\tau_2)=f(x_1,x_2;\tau_1+\tau',\tau_2+\tau')$  erfüllen, ihre Werte können also nur von der Differenz  $\tau=\tau_2-\tau_1$  der beiden Beobachtungszeitpunkte abhängen; dies wird mit  $f(x_1,x_2;\tau)$  notiert. Für ein stationäres Zufallssignal sind demnach der Scharmittelwert  $m_x$ , der quadratische Scharmittelwert (und damit die Varianz  $\sigma_x^2$ ) und alle anderen Momente der Statistik erster Ordnung konstant, während die Autokorrelationsfunktion

$$r_{xx}(\tau) = E[\widetilde{x}(\tau')\widetilde{x}(\tau'+\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2$$
 (1.39)

und die Autokovarianzfunktion

$$c_{xx}(\tau) = r_{xx}(\tau) - m_x^2$$
 (1.40)

Funktionen nur der Differenz  $\tau=\tau_2-\tau_1$  sind.

In den meisten Anwendungen steht für die statistische Charakterisierung eines Zufallssignals nicht eine ganze Schar, sondern nur eine kleine Anzahl von Realisierungen (determinierte Signale)  $x(\tau;e_k)=x_k(\tau)$  zur Verfügung. Können wir aus der Beobachtung des Zeitverlaufs einzelner Realisierungen typische Eigenschaften des Zufallssignals als Ganzes gewinnen? Mit der speziellen Eigenschaft der Ergodizität ist dies tatsächlich möglich: Wir nennen ein stationäres Zufallssignal (im strengen Sinn) ergodisch, wenn alle seine Erwartungswerte mit den entsprechenden zeitlichen Mittelwerten der Realisierungen übereinstimmen ("Zeitmittel = Scharmittel"). Insbesondere sind dann die linearen Zeitmittelwerte

$$\overline{x_k(\tau)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_k(\tau) d\tau$$
 (1.41)

für jede Realisierung gleich dem linearen Scharmittelwert zu setzen,

$$m_x = \overline{x_k(\tau)}$$
 für alle  $k$ . (1.42)

Auch die Autokorrelationsfunktion (1.39) lässt sich im ergodischen Fall über

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_k(\tau') x_k(\tau' + \tau) d\tau'$$
 (1.43)

aus einer beliebigen Realisierung  $x_k(\tau)$  des Zufallssignals  $\widetilde{x}(\tau)$  berechnen.

### 1.4 Linearität und Zeitinvarianz

Sehen wir uns nun etwas näher an, wie unser System auf ein Eingangssignal reagiert. Formal wird die Eingangs-Ausgangs-Relation durch (1.5) als Abbildung

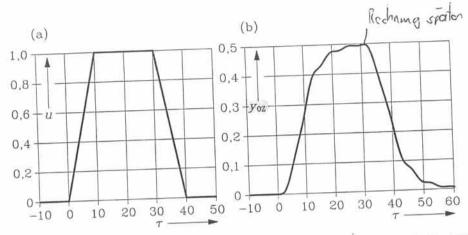


Abb. 1.11 Spezieller Verlauf der bezogenen Eingangsspannung (a) und zugehörige Nullzustandsantwort (b) (bezogene Ausgangsspannung) der Schaltung aus Abb.1.1 mit den dort angegebenen Parametern. Als Bezugswerte in den Gln.(1.1) wurden  $T_{\rm B}=1\,{\rm ms}$  und  $U_{\rm EB}=U_{\rm AB}=U_{\rm B}={\rm max}\,|u_{\rm E}(t)|$  angenommen.

 ${\mathcal S}$ erfasst, die jedem Eingangssignal u und jedem Anfangszustand  $\underline{\alpha}=\underline{x}(\tau_0)$ genau ein Ausgangssignal

$$y = S[u; \underline{\alpha}] \tag{1.44}$$

zuordnet. Die Menge der Eingangssignale bildet einen linearen Raum über den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  oder, falls nötig, über den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ , d.h. mit irgend zwei Eingangssignalen  $u_1$  und  $u_2$  und irgend zwei Zahlen  $c_1$  und  $c_2$  ist auch die Linearkombination  $c_1u_1+c_2u_2$  ein mögliches Eingangssignal. Entsprechendes setzen wir für die Menge der Ausgangssignale voraus. Für die Anfangszustände nehmen wir ebenfalls lineare Kombinierbarkeit an, fassen sie demnach als Elemente eines Vektorraums  $\mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$  über  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  auf.

### Die Nullzustandsantwort Mulligrel

Angenommen, an unserer Schaltung aus Abb.1.1 liegt ab dem Anfangszeitpunkt  $t_0$  die Eingangsspannung  $u_{\rm E}(t)=0$  für  $t\geqslant t_0$  (Eingangssignal  $u(\tau)=0$  für  $\tau\geqslant\tau_0$ ) und außerdem seien bei  $t_0$  auch die beiden Spulenströme und die Kondensatorspannung gleich Null (bezogene Zustandsgrößen  $x_k(\tau_0)=0, k=1,2,3$ ). Offensichtlich ist dann die Ausgangsspannung  $u_{\rm A}(t)=0$  für  $t\geqslant t_0$  (Ausgangssignal  $y(\tau)=0$  für  $\tau\geqslant\tau_0$ ), d.h. die Eingangs-Ausgangs-Relation (1.44) hat für unser Beispielsystem die Eigenschaft  $\mathcal{S}[0;\underline{0}]=0$ . Diese Beobachtung nehmen wir zum Anlass für die folgende, allgemeine Benennung: Ein Zustand  $\underline{x}(\tau)=\underline{\theta}$  heißt Nullzustand des Systems  $\mathcal{S}$ , wenn  $\mathcal{S}[0;\underline{\theta}]=0$ . Gleichzeitig setzen wir die Existenz und die Eindeutigkeit solch eines Nullzustands für jedes System voraus und können dann ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit gleich  $\underline{\theta}=0$  annehmen.

Den Verlauf des Ausgangssignals als Reaktion auf einen vorgegebenen Verlauf  $u(\tau)$  des Eingangssignals, ausgehend vom Nullzustand, nennen wir allgemein die

City + Citz Ausgangigail

{ a = x (To) } b. Iden Veltonoum

Riocan E"uber IR cidy + Czoiz

nelinensioneler Reun

zu  $u(\tau)$  gehörende Nullzustandsantwort  $y_{0\mathrm{Z}}(\tau)$  des Systems, formal

$$S_{igogicasions} = S[u; \underline{0}].$$

$$y_{0z} = S[u; \underline{0}].$$
Antengazioand (1.45)

Für unser Beispielssystem sehen Sie das in Abb.1.11: Bis zum Anfangszeitpunkt  $\tau=\tau_0$  – wir wählen speziell  $\tau_0=0$  – befindet sich das System im Nullzustand und anschließend verläuft das Eingangssignal  $u(\tau)$  z.B. trapezförmig. Am Ausgang erscheint dann die zu diesem Eingangssignal gehörende Nullzustandsantwort. Methoden für deren Berechnung werden Sie später kennen lernen.

### Die Nulleingangsantwort

Wie reagiert ein System S, wenn sein Eingangssignal ab dem Anfangszeitpunkt verschwindet,  $u(\tau) = 0$  für  $\tau \ge \tau_0$ , das System sich aber anfänglich nicht im Nullzustand, sondern in einem allgemeinen Anfangszustand  $\underline{\alpha} = \underline{x}(\tau_0) = (x_1(\tau_0), \dots, x_n(\tau_0))$  befindet? Mit der **Nulleingangsantwort**  $y_{0E}(\tau)$ , formal

$$y_{0E} = S[0; \underline{\alpha}]. \tag{1.46}$$

Die Nulleingangsantwort  $y_{0E}(\tau)$  ist demnach die Reaktion des Systems allein auf den Anfangszustand  $\underline{\alpha}$ , wobei die Eingangsgröße während des ganzen Vorgangs den Wert Null besitzt. Abb.1.12 zeigt ein Beispiel für unsere Schaltung aus Abb.1.1. Der Anfangszeitpunkt ist dabei wieder mit  $\tau_0=0$  angenommen, und der Nulleingang wird durch den Kurzschluss der beiden Eingangsklemmen für  $\tau \geqslant 0$  erreicht. Mit den Bezeichnungen aus (1.2) und den gleichen Bezugswerten wie in Abb.1.11 liegt diesem Verlauf der Anfangszustand  $\underline{\alpha}=(1;1;0,75)$  zugrunde. Auch für diese Form der Systemantwort werden Sie später Berechnungsverfahren kennen lernen.

### Die vollständige Antwort

Nehmen wir nun an, unser System besitze einen Anfangszustand gemäß den Angaben in Abb.1.12 und außerdem verlaufe die Eingangsgröße für  $\tau \geqslant 0$  wie in Abb.1.11. Lässt sich dann bei Kenntnis der Nulleingangsantwort  $y_{0\rm E}(\tau)$  und der Nullzustandsantwort  $y_{0\rm Z}(\tau)$  irgend eine Aussage über den Verlauf des Ausgangssignals  $y(\tau)$  in diesem kombinierten Fall machen?

Ja, wenn es sich wie in unserem Beispiel um ein lineares System handelt. Für lineare Systeme gilt nämlich immer

$$y(\tau) = y_{0E}(\tau) + y_{0Z}(\tau), \qquad (1.47)$$

d.h. die vollständige Systemantwort ergibt sich als Summe der zum Anfangszustand gehörenden Nulleingangsantwort und der zum Verlauf des Eingangssignals gehörenden Nullzustandsantwort (Abb.1.13). Nichtlineare Systeme haben diese Eigenschaft im Allgemeinen nicht.

### Linearität

Die Möglichkeit der additiven Zerlegung der vollständigen Antwort in die Nulleingangsantwort und die Nullzustandsantwort ist nur eine von drei Forderungen,

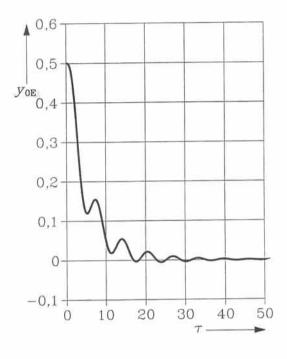


Abb. 1.12 Nulleingangsantwort (bezogene Ausgangsspannung) der Schaltung aus Abb.1.1 mit den dort angegebenen Parametern für den Anfangszustand (s. Gln.(1.2))  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 1$ ,  $x_3(0) = 0$ , 75. Die Bezugswerte in den Gln.(1.2) werden wie in Abb.1.11 gewählt.

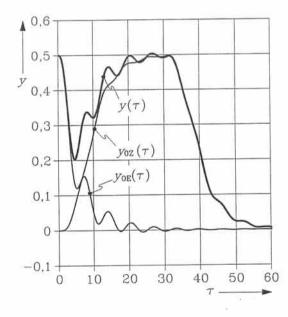


Abb. 1.13 Die vollständige Antwort (bezogene Ausgangsspannung)  $y(\tau)$  der Schaltung aus Abb.1.1 ist die Summe der Nulleingangsantwort  $y_{0\rm E}(\tau)$  (Abb.1.12) und der Nullzustandsantwort  $y_{0\rm Z}(\tau)$  (Abb.1.11).

die alle erfüllt sein müssen, damit wir ein System *linear* nennen können. Als Vorbereitung zur Formulierung der beiden anderen Forderungen benötigen wir den Begriff der *Linearität einer Abbildung*.

Stellen Sie sich zwei lineare Räume V und W über den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  oder über den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  vor, d.h. zwei Mengen mit Elementen  $v_1, v_2, \ldots$ , bzw.  $w_1, w_2, \ldots$ , die jeweils linear kombiniert werden können. Sind also  $v_1$  und  $v_2$  irgendwelche Elemente aus V und sind  $c_1$  und  $c_2$  zwei beliebige Zahlen, so ist auch  $c_1v_1+c_2v_2$  in V enthalten. Gleiches gilt für W. Lineare Räume dieser Art dienen beispielsweise zur Zusammenfassung aller möglichen Eingangs- oder Ausgangssignale, aber auch als Menge aller möglichen Zustände eines Systems. Eine Abbildung (einen Operator)

directlet\_

$$L: V \longrightarrow W \text{ durch } v \longmapsto w = L[v]$$
 (1.48)

nennen wir linear, wenn sie Linearkombinationen respektiert, d.h. wenn jede Linearkombination zweier beliebiger Elemente  $v_1$  und  $v_2$  auf eine Linearkombination von  $w_1 = L[v_1]$  und  $w_2 = L[v_2]$  mit den gleichen Koeffizienten abgebildet wird, also

$$L[c_1v_1 + c_2v_2] = c_1L[v_1] + c_2L[v_2]$$
(1.49)

für alle  $v_1, v_2 \in V$  und alle  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

Die Relationen (1.45) und (1.46) sind tatsächlich Abbildungen zwischen linearen Räumen. So wird durch (1.45) jedem Element u aus dem linearen Raum der Eingangssignale genau ein Element aus dem linearen Raum der Ausgangssignale zugeordnet, nämlich die zugehörige Nullzustandsantwort  $y_{0Z}$ . Ähnlich bildet (1.46) jedes Element  $\underline{\alpha}$  aus dem linearen Raum der Zustände auf genau ein Element aus dem linearen Raum der Ausgangssignale ab, auf die zugehörige Nulleingangsantwort  $y_{0E}$ . Wir fordern nun, dass diese beiden Abbildungen linear sind.

Ein System ist linear, wenn es drei Eigenschaften besitzt:

- (i) Die Nullzustandsantwort  $y_{0\mathrm{Z}}(\tau)$  ist linear bezüglich des Eingangssignals  $u(\tau)$ .
- (ii) Die Nulleingangsantwort  $y_{0E}(\tau)$  ist linear bezüglich des Anfangszustands  $\underline{\alpha} = \underline{x}(\tau_0)$ .
- (iii) Die vollständige Systemantwort  $y(\tau)$  ist die Summe aus der Nulleingangsantwort  $y_{0E}(\tau)$  und der Nullzustandsantwort  $y_{0Z}(\tau)$ .

Etwas formaler lässt sich all dies durch die Abbildung S ausdrücken:

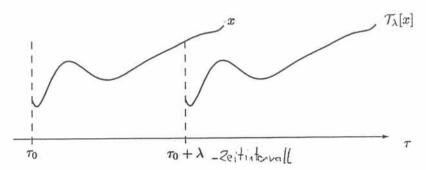
Sei  $\mathcal{S}$  ein System, beschrieben durch die Abbildung (Eingangs-Ausgangs-Relation)

$$S: (u,\underline{\alpha}) \longmapsto y = S[u;\underline{\alpha}], \tag{1.50}$$

die jedem Eingangssignal u und jedem Anfangszustand  $\underline{\alpha} = \underline{x}(\tau_0)$  genau ein Ausgangssignal y zuordnet. Das System  $\mathcal{S}$  ist genau dann linear, wenn es die folgenden drei Eigenschaften besitzt:

### (i) Nullzustandslinearität

$$S[c_1u_1 + c_2u_2; \underline{0}] = c_1S[u_1; \underline{0}] + c_2S[u_2; \underline{0}], \tag{1.51}$$



**Abb. 1.14** Durch die Anwendung des Translationsoperators  $\mathcal{T}_{\lambda}$  entsteht aus einem Signal  $x(\tau)$  das zeitverschobene Signal  $x(\tau - \lambda)$ . Für  $\lambda > 0$  erfolgt die Verschiebung nach rechts (nach "später"), für  $\lambda < 0$  nach links (nach "früher").

### (ii) Nulleingangslinearität

$$S[0; c_1\underline{\alpha}_1 + c_2\underline{\alpha}_2] = c_1S[0; \underline{\alpha}_1] + c_2S[0; \underline{\alpha}_2], \tag{1.52}$$

### (iii) Zerlegungseigenschaft

$$S[u;\underline{\alpha}] = S[0;\underline{\alpha}] + S[u;\underline{0}], \tag{1.53}$$

gültig für alle Eingangssignale  $u, u_1, u_2$ , für alle Anfangszustände  $\underline{\alpha}, \underline{\alpha}_1, \underline{\alpha}_2$  und für alle reellen oder komplexen Zahlen  $c_1, c_2$ . Ein System, das nicht alle drei Eigenschaften besitzt, heißt definitionsgemäß nichtlinear.

Haben wir ein mathematisches Modell unseres Systems zur Verfügung, so lässt sich i.A. leicht feststellen, ob es sich um ein lineares oder um ein nichtlineares System handelt. Eine Entscheidung auf experimenteller Grundlage ist dagegen meist viel schwerer. Bei hinreichend genauer Messung müssen wir nämlich erkennen, dass sich nahezu alle realen Systeme nichtlinear verhalten. Es ist dann zu entscheiden, ob und in welchem Bereich der Eingangsgrößen und der Zustandsgrößen ein lineares Modell zur Systembeschreibung ausreicht.

### Zeitinvarianz

Neben der Linearität gibt es noch eine weitere Eigenschaft von Systemen, die, wenn sie vorliegt, die Behandlung wesentlich vereinfacht: Zeitinvarianz. Zur Vorbereitung führen wir den **Translationsoperator** (die Zeitverschiebung)  $\mathcal{T}_{\lambda}$  als Abbildung

 $T_{\lambda}: x(\tau) \longmapsto T_{\lambda}[x] = x(\tau - \lambda)$  (1.54)

für alle Signale x und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein, die einem Signal  $x(\tau)$  das zeitverschobene Signal  $x(\tau-\lambda)$  zuweist (Abb.1.14). Wie sich an Hand der Eigenschaft (1.49) leicht nachweisen lässt, ist die Translation  $\mathcal{T}_{\lambda}$  für festes  $\lambda$  eine lineare Operation.<sup>2</sup>

Ein System S, charakterisiert durch die Eingangs-Ausgangs-Relation (1.5), heißt genau dann **zeitinvariant**, wenn sich für eine beliebige Zeitverschiebung

 $<sup>^2</sup>$ Übrigens bildet die Menge aller Translationsoperatoren  $\{\mathcal{T}_{\lambda} \mid -\infty < \lambda < \infty\}$  wegen  $\mathcal{T}_{\lambda}\mathcal{T}_{\mu} = \mathcal{T}_{\mu}\mathcal{T}_{\lambda} = \mathcal{T}_{\lambda+\mu}$  und  $\mathcal{T}_{\lambda}\mathcal{T}_{-\lambda} = \mathcal{T}_0$  eine Abel-Gruppe mit dem neutralen Element  $\mathcal{T}_0$ .

 $T_{\lambda}$  des Eingangssignals das Ausgangssignal in gleicher Weise verschiebt, vorausgesetzt, der Anfangszustand wird mitgenommen:  $\mathcal{S}[\mathcal{T}_{\lambda}[u];\underline{\alpha}] = \mathcal{T}_{\lambda}[\mathcal{S}[u;\underline{\alpha}]]$ 

$$S[T_{\lambda}[u]; \underline{\alpha}] = T_{\lambda}[S[u; \underline{\alpha}]]$$
(1.55)

für alle  $u, \underline{\alpha}$  und alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Liefert also ein zeitinvariantes System zum Eingang  $u(\tau)$  und zum Anfangszustand  $\underline{\alpha}$  (bei  $\tau = \tau_0$ ) den Ausgang  $y(\tau)$ , so gehört zum Eingang  $u(\tau - \lambda)$  und zum selben Anfangszustand  $\alpha$  (bei  $\tau = \tau_0 + \lambda$ ) der Ausgang  $y(\tau - \lambda)$ . Ein System, das diese Eigenschaft nicht besitzt, heißt definitionsgemäß zeitvariant.

Liegt ein geeignetes Modell des Systems vor, etwa in der Form einer (Ersatz-) Schaltung wie Abb.1.1, so lässt sich meistens leicht feststellen, ob Zeitinvarianz gegeben ist oder nicht: Die Parameter  $(R, L, C, \ldots)$  dürfen nicht explizit von einer absoluten Zeitvariablen abhängen. Zwar kann in nichtlinearen, zeitinvarianten Systemen eine implizite Zeitabhängigkeit der Parameter etwa über die Zustandsgrößen bestehen, extern gesteuerte Parameterwerte zerstören jedoch i.A. die Zeitinvarianz.

Linearität und Zeitinvarianz sind voneinander unabhängige Systemeigenschaften: Ein nichtlineares System kann zeitinvariant sein, und ein lineares System zeitvariant. Wenn ein System jedoch linear und zeitinvariant ist, stehen für seine Analyse besonders wirksame Methoden zur Verfügung. Wir sprechen dann von einem LTI-System (Linear Time Invariant system).

#### 1.5 Das Faltungsintegral

Halten wir nochmals fest: Die Antwort eines linearen Systems kann nach Gl.(1.47) additiv in die beiden Anteile  $y_{0E}(\tau)$  und  $y_{0Z}(\tau)$  aufgespalten werden, wobei  $y_{0E}(\tau)$  die Antwort allein auf den Anfangszustand (der Energiespeicher) und  $y_{0\mathrm{Z}}( au)$  die Antwort allein auf den Verlauf der Eingangsgröße (ausgehend vom Nullzustand der Energiespeicher) darstellt. Es ist auch wichtig, dass  $y_{0E}(\tau)$  vom Satz der Anfangszustände linear abhängt - davon werden wir später ausgiebig Gebrauch machen. In diesem Abschnitt wollen wir uns vorwiegend auseinandersetzen mit den Konsequenzen des linearen Zusammenhangs zwischen der Nullzustandsantwort und dem Eingangssignal.

### Das Superpositionsprinzip

Die Bedeutung dieser Linearität liegt in Folgendem: Wenn ein lineares System vom Nullzustand aus mit einem Eingangssignal  $u(\tau)$  angeregt wird und wenn sich  $u(\tau)$  als Linearkombination anderer, meist einfacherer Eingangssignale  $u_i(\tau)$ mit Koeffizienten ci in der Form

$$u(\tau) = \sum_{i=1}^{N} c_i u_i(\tau), \quad \tau \geqslant \tau_0, \tag{1.56}$$

darstellen lässt, dann ist die Nullzustandsantwort ebenfalls als Linearkombination mit den selben Koeffizienten ci angebbar,

$$y_{0Z}(\tau) = \sum_{i=1}^{N} c_i y_{0Zi}(\tau), \quad \tau \geqslant \tau_0,$$
 (1.57)

wobei die Funktionen  $y_{0Zi}(\tau)$ ,  $i=1,\ldots,N$ , die Nullzustandsantworten für jedes der einzelnen Eingangssignale  $u_i(\tau)$  sind. Diese grundlegende Eigenschaft linearer Systeme nennen wir das *Prinzip der linearen Überlagerung* oder das Superpositionsprinzip. Beachten Sie: Das Superpositionsprinzip gilt in der angeschriebenen Form nur für den Nullzustandsteil der Antwort.

Abb.1.15 zeigt, wie sich das Superpositionsprinzip in unserem System aus Abb.1.1 auswirkt. Ausgehend vom Nullzustand werden Eingangsspannungen in der Form von Rechteckimpulsen der Dauer 10 ms angelegt. Ihre Überlagerung liefert eine Treppenkurve, eine grobe Näherung des Trapezverlaufs aus Abb.1.11(a). Wenn wir nun die Nullzustandsantworten aller Einzelimpulse addieren, ergibt sich die Nullzustandsantwort auf diese Treppenkurve, eine Näherung des Verlaufs aus Abb.1.11(b). Intuitiv ist klar: Durch das Aneinanderlegen einer größeren Anzahl entsprechend kürzerer Impulse lässt sich die Näherung verbessern. Diese Beobachtung führt uns zu einer Integraldarstellung der Nullzustandsantwort.

### Das Superpositionsintegral

Angenommen, ein lineares, nicht notwendig zeitinvariantes System reagiert auf einen Rechteckimpuls der bezogenen Größe 1, der zu einem beliebigen aber festen Zeitpunkt  $\tau_i$  an den Eingang gelegt wird und die (kleine) bezogene Dauer  $\Delta \tau_i$  besitzt, mit der Nullzustandsantwort  $g(\tau,\tau_i)\Delta \tau_i$ . Wenn wir nun ein Eingangssignal  $u(\tau)$  näherungsweise als eine Reihe von aneinander gelegten Rechteckimpulsen der Größen  $u(\tau_i)$  und Dauern  $\Delta \tau_i$  nach dem Muster eines Treppenverlaufs darstellen, liefert das Superpositionsprinzip die genäherte Nullzustandsantwort

stellen, liefert das Superpositionsprinzip die genäherte Nullzustandsantwort 
$$y_{0\mathrm{Z}}(\tau) \approx \sum u(\tau_i)g(\tau,\tau_i)\Delta\tau_i \qquad \text{for } > \int$$

und im Grenzfall  $\Delta \tau_i \longrightarrow 0$  das exakt gültige Superpositionsintegral

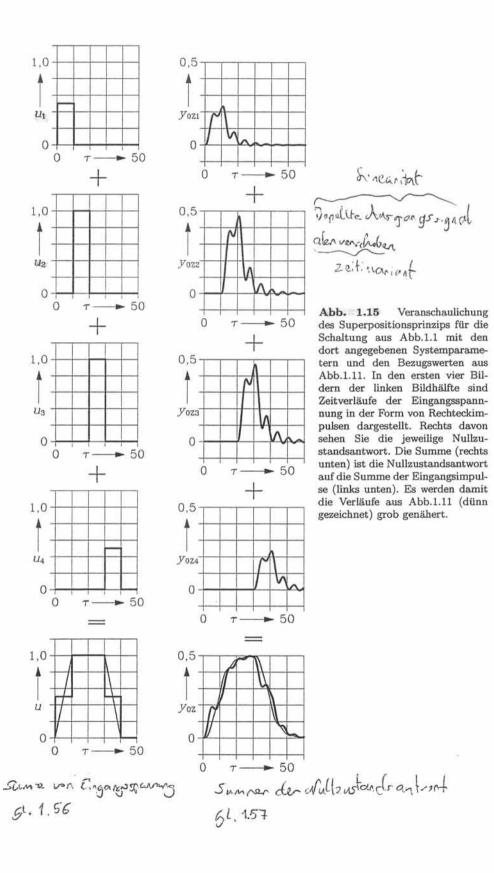
$$y_{0\mathbf{Z}}(\tau) = \mathcal{S}[u(\tau); \underline{0}] = \int_{\tau_0}^{\tau} g(\tau, \tau') u(\tau') d\tau'.$$
(1.58)

Für lineare Systeme haben wir damit eine formale Darstellung der linearen Abbildung Gl.(1.45) gewonnen, aus der wir im Prinzip für jedes Eingangssignal  $u(\tau)$  die zugehörige Nullzustandsantwort  $y_{0Z}(\tau)$  berechnen können. Was aber haben wir uns unter  $g(\tau, \tau')$  vorzustellen?

Tatsächlich hat der Kern  $g(\tau, \tau')$  des Superpositionsintegrals eine einfache Interpretation. Legen wir nämlich an den Eingang in einem Zeitpunkt  $\tau_1 \geqslant \tau_0$  einen Dirac-Stoß, setzen in Gl.(1.58) also speziell  $u(\tau') = \delta(\tau_1 - \tau')$ , dann folgt mit der Abtasteigenschaft Gl.(1.22)

$$y_{0\mathrm{Z}}(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} g(\tau,\tau') \delta(\tau_1 - \tau') \mathrm{d}\tau' = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } \tau < \tau_1, \\ g(\tau,\tau_1) & \text{für } \tau > \tau_1. \end{array} \right.$$

Die Funktion  $g(\tau,\tau')$  ist demnach die Nullzustandsantwort auf einen Dirac-Stoß, der zum Zeitpunkt  $\tau'$  an den Systemeingang gelegt wird. Sie heißt deshalb die Stoßantwort des Systems. Wie Sie in Gl.(1.58) sehen, ist  $g(\tau,\tau')$  im Wesentlichen ein Gewichtsfaktor, der beschreibt, wie stark frühere Werte der Eingangsgröße  $u(\tau'),\tau'\leqslant \tau$ , die gegenwärtige Ausgangsgröße  $y_{\rm OZ}(\tau)$  beeinflussen. Daher wird die Stoßantwort häufig Gewichtsfunktion genannt, manchmal auch



Gedächtnisfunktion des linearen Systems. In der Eigenschaft  $g(\tau,\tau')=0$  für  $\tau<\tau'$  ("Keine Stoßantwort vor dem Stoß!") zeigt sich eine stillschweigend vorausgesetzte Systemeigenschaft, nämlich Kausalität. Darauf komme ich später zurück.

### Das Faltungsintegral

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, wenn das lineare System zusätzlich zeitinvariant ist. Die Anwendung der Invarianzforderung (1.55) auf die Darstellung (1.58) der Nullzustandsantwort für beliebige Eingangssignale liefert zusammen mit einer einfachen Variablentransformation die Bedingung  $g(\tau-\lambda,\tau')=g(\tau,\tau'+\lambda)$  für die Stoßantwort, die für jedes  $\lambda$  erfüllt sein muß. Wir schließen daraus, dass die Stoßantwort  $g(\tau,\tau')$  eines linearen, zeitinvarianten Systems tatsächlich nur von der Differenz  $\tau-\tau'$  des Beobachtungszeitpunkts  $\tau$  und des Stoßzeitpunkts  $\tau'$  abhängen kann und schreiben dies ohne Einführung eines neuen Funktionssymbols als

$$g(\tau, \tau') = g(\tau - \tau'). \tag{1.59}$$

Das Superpositionsintegral (1.58) reduziert sich damit auf das für LTI-Systeme gültige Faltungsintegral

$$y_{0Z}(\tau) = \mathcal{S}[u(\tau); \underline{0}] = \int_{\tau_0}^{\tau} g(\tau - \tau') u(\tau') d\tau'.$$
(1.60)

Anstelle einer Funktion  $g(\tau,\tau')$  von zwei Variablen ist hier also eine Funktion einer einzigen Variablen zur Charakterisierung des Systems ausreichend: Die Stoßantwort  $g(\tau)$  als die Nullzustandsantwort auf einen Dirac-Stoß zum Zeitnullpunkt. Beachten Sie: Bei kausalen LTI-Systemen gilt  $g(\tau)=0$  für  $\tau<0$ .

Wir können hier einige interessante Überlegungen anschließen. Da  $g(\tau - \tau')$  für  $\tau' > \tau$  ohnehin verschwindet, lässt sich die obere Integrationsgrenze  $\tau$  in Gl.(1.60) nach  $\infty$  verschieben. Wählen wir für den Anfangszeitpunkt überdies  $\tau_0 = 0-$  (wir schreiben 0- um mögliche Sprünge und Stöße im Nullpunkt eindeutig zuzuordnen), so gilt

$$y_{0Z}(\tau) = \int_{0_{-}}^{\infty} g(\tau - \tau')u(\tau')d\tau'.$$
 (1.61)

Wir können den Anfangszeitpunkt aber auch nach  $\tau_0 = -\infty$  verlegen, sofern der Verlauf des Eingangssignals  $u(\tau')$  für  $-\infty < \tau \leqslant \tau$  bekannt ist. Unter der Voraussetzung, dass sich dann ein beliebiger Anfangszustand im Beobachtungszeitpunkt nicht mehr auswirkt, erhalten wir gleich die vollständige Systemantwort

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - \tau') u(\tau') d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau') u(\tau - \tau') d\tau'.$$
 (1.62)

Das zweite Gleichheitszeichen folgt nach einer einfachen Variablentransformation. Schließlich ist auch noch die Aufspaltung des Integrationsintervalls möglich,

$$y(\tau) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0-} g(\tau - \tau') u(\tau') d\tau'}_{y_{\text{OE}}(\tau)} + \underbrace{\int_{0-}^{\infty} g(\tau - \tau') u(\tau') d\tau'}_{y_{\text{OZ}}(\tau)}.$$
 (1.63)

Da das zweite Integral wegen Gl.(1.61) die Nullzustandsantwort für den Anfangszeitpunkt  $\tau_0 = 0$ – repräsentiert, liefert das erste Integral aufgrund der Zerlegungseigenschaft Gl.(1.53) eine Darstellung der Nulleingangsantwort. Daraus ziehen wir einen wichtigen Schluss: Die Kenntnis des Anfangszustands ersetzt vollständig die frühere Geschichte des Eingangssignals.

Fassen wir zusammen: Ist von einem linearen zeitinvarianten System die Stoßantwort  $g(\tau)$  bekannt, so lässt sich mit dem Faltungsintegral (1.60) die zu einem Eingangssignal  $u(\tau'), \tau_0 \leqslant \tau' \leqslant \tau$ , gehörende Nullzustandsantwort  $y_{0\mathrm{Z}}(\tau)$  berechnen. Ist das Eingangssignal  $u(\tau')$  für  $-\infty < \tau' \leqslant \tau$  gegeben, liefern die Faltungsdarstellungen (1.62) sogar die vollständige Systemantwort  $y(\tau)$ .

Methoden zur rechnerischen Bestimmung der Stoßantwort aus einem vorliegenden Systemmodell werden Sie in den folgenden Kapiteln kennenlernen. Für unsere Schaltung aus Abb.1.1 mit den dort festgelegten Parameterwerten ergibt sich z.B. mit den Bezugswerten  $U_{\rm EB}=U_{\rm AB}=U_{\rm B}$  für die Spannungen und  $T_{\rm B}=1\,{\rm ms}$  für die Zeit die Stoßantwort

$$g(\tau) = \{0, 10093 e^{-0,202\tau} + 0, 10147 e^{-0,099\tau} \cos[0, 990(\tau - 3, 069)]\} \varepsilon(\tau),$$
(1.64)

graphisch dargestellt in Abb.1.16. Damit lässt sich zu irgend einem Eingang  $u(\tau)$  mit dem Faltungsintegral (1.62) der Ausgang berechnen, hier also

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} \{0, 10093 e^{-0.202(\tau - \tau')} + 0, 10147 e^{-0.099(\tau - \tau')} \cos[0, 990(\tau - \tau' - 3, 068)]\} u(\tau') d\tau'.$$

Lineare zeitinvariante Systeme besitzen häufig Faltungsintegrale dieses Typs.

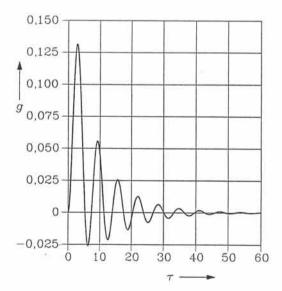


Abb. 1.16 Stoßantwort (Impulsantwort, Gewichtsfunktion) der Schaltung aus Abb.1.1 mit den dort angegebenen Parametern. Als Bezugswerte in den Gln.(1.1) wurden  $T_{\rm B}=1$  ms und  $U_{\rm EB}=U_{\rm AB}=U_{\rm B}$  angenommen.

Wir können dann weiter umformen,

$$\begin{split} y(\tau) &= 0,10093 \, \mathrm{e}^{-0,202\tau} \! \int_{-\infty}^{\tau} \! \mathrm{e}^{0,202\tau'} u(\tau') \mathrm{d}\tau' \\ &+ 0,10147 \, \mathrm{e}^{-0,099\tau} \cos[0,990(\tau-3,069)] \! \int_{-\infty}^{\tau} \! \mathrm{e}^{0,099\tau'} \cos(0,990\tau') u(\tau') \mathrm{d}\tau' \\ &+ 0,10147 \, \mathrm{e}^{-0,099\tau} \sin[0,990(\tau-3,069)] \! \int_{-\infty}^{\tau} \! \mathrm{e}^{0,099\tau'} \sin(0,990\tau') u(\tau') \mathrm{d}\tau', \end{split}$$

und solche Integrale lassen sich in der Regel ohne grundsätzliche Schwierigkeiten auswerten. Eine Rampenfunktion

$$u(\tau) = \operatorname{ramp}(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0, \\ & \text{für} \\ \tau & \tau \geqslant 0 \end{cases}$$

liefert beispielsweise

$$y(\tau) = \{-2,57500 + 0,50006\tau + 2,47297 e^{-0,202\tau} + 0,10249 e^{-0,099\tau} \cos[0,990(\tau - 0,096)]\varepsilon(\tau).$$

Bei der Nachrechnung dieses Ergebnisses werden Sie bemerken, dass solche Auswertungen recht mühsam sein können, besonders dann, wenn Sie sich nicht der komplexen Rechnung bedienen. Wir werden deshalb in der Folge direktere Methoden zur expliziten Berechnung von Systemantworten entwickeln.

### 1.6 Kausalität und Stabilität

Neben der Linearität und der Zeitinvarianz gibt es noch weitere Eigenschaften, nach denen sich Systeme klassifizieren lassen. So habe ich beispielsweise die Kausalität schon kurz erwähnt ("Keine Stoßantwort vor dem Stoß!"). Ein ganz wichtiger Begriff der Systemtheorie ist die Stabilität, die im Wesentlichen beschränkte Ausgänge für beschränkte Eingänge fordert. Im Folgenden werden wir diese Eigenschaften für LTI-Systeme etwas präziser fassen.

### Kausalität

Wir betrachten ein lineares, zeitinvariantes System und verlegen den Anfangszeitpunkt  $\tau_0$  nach  $-\infty$ . Das System heißt kausal, wenn für einen beliebigen Zeitpunkt  $\tau_1$  der Zustand des Systems und damit auch der Wert  $y(\tau_1)$  des Ausgangssignals unabhängig ist vom Verlauf des Eingangssignals  $u(\tau)$  für  $\tau > \tau_1$ . Der Eingang kann also nur in der Gegenwart und in die Zukunft, nicht aber in die Vergangenheit wirken.

Zur Herleitung einer formalen Bedingung spalten wir die Faltungsdarstellung (1.62) der Systemantwort, die in dieser Form auch für nicht kausale LTI-Systeme gilt, für den Zeitpunkt  $\tau=\tau_1$  in zwei Teilintegrale auf,

$$y(\tau_1) = \int_{-\infty}^{\tau_1} g(\tau_1 - \tau) u(\tau) d\tau + \int_{\tau_1}^{\infty} g(\tau_1 - \tau) u(\tau) d\tau.$$

Unsere Definition der Kausalität ist dann gleichbedeutend mit der Forderung

$$\int_{\tau_1}^{\infty} g(\tau_1 - \tau) u(\tau) d\tau = 0$$

für beliebige Eingangssignale  $u(\tau)$ , und daraus folgt³  $g(\tau_1 - \tau) = 0$  für  $\tau > \tau_1$ , d.h.

$$g(\tau) = 0 \quad \text{für} \quad \tau < 0. \tag{1.65}$$

Ein LTI-System ist also genau dann kausal, wenn seine Stoßantwort für alle negativen Zeiten verschwindet. Die unmittelbare Konsequenz sind zwei weitere Varianten des allgemeinen Faltungsintegrals (1.62), nämlich

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} g(\tau - \tau') u(\tau') d\tau' = \int_{0-}^{\infty} g(\tau') u(\tau - \tau') d\tau'$$
 (1.66)

als die vollständige Antwort eines kausalen LTI-Systems auf das Eingangssignal  $u(\tau')$  für  $-\infty < \tau' \leqslant \tau$ .

Die Forderung der Kausalität realer dynamischer Systeme erscheint ganz selbstverständlich, wenn unsere Zeitvariable  $\tau$  die Echtzeit repräsentiert. Trotzdem kann es in der Systemtheorie vorteilhaft sein, auch nichtkausale Systeme zuzulassen, also Systeme, für die  $g(\tau)$  für  $\tau < 0$  nicht notwendig verschwindet. Es können sich dadurch erhebliche Vereinfachungen in der Modellbildung ergeben. Beispielsweise stellt ein idealer Tiefpass ein nichtkausales System dar. Repräsentiert  $\tau$  nicht die Echtzeit, so lässt sich die Forderung nach Kausalität physikalisch nicht begründen.

### Die Sprungantwort

Die Stoßantwort  $g(\tau)$  eines LTI-Systems ist die Nullzustandsantwort auf den Dirac-Stoß  $\delta(\tau)$  im Zeitnullpunkt. Ihre Bedeutung für die Systemtheorie ergibt sich aus ihrem Auftreten als Kern im Faltungsintegral, weil sie dort das Systemverhalten vollständig charakterisiert. In der Systemtheorie werden aber auch noch andere charakterisierende Funktionen verwendet. Die wichtigste davon ist die Sprungantwort  $h(\tau)$  von LTI-Systemen, definiert als deren Nullzustandsantwort auf den Heaviside-Sprung  $\varepsilon(\tau)$  im Zeitnullpunkt.

Für die formale Berechnung dieses speziellen Ausgangssignals haben wir lediglich im Faltungsintegral (1.62) die Eingangsfunktion  $u(\tau)$  dem in Gl.(1.12) definierten Heaviside-Sprung  $\varepsilon(\tau)$  gleichzusetzen. Da  $\varepsilon(\tau)$  für  $\tau < 0$  verschwindet und für  $\tau \geqslant 0$  gleich Eins ist<sup>4</sup>, erhalten wir

$$h(\tau) = \int_0^\infty g(\tau - \tau') d\tau' = \int_{-\infty}^\tau g(\tau') d\tau'$$
(1.67)

und speziell für kausale LTI-Systeme

$$h(\tau) = \int_0^{\tau} g(\tau - \tau') d\tau' = \int_{0-}^{\tau} g(\tau') d\tau'$$
 (1.68)

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Streng genommen ist diese Folgerung nur dann zulässig, wenn  $g(\tau)$  für  $\tau < 0$  bis auf  $\delta$ -Anteile stückweise stetig ist und die Werte an den Sprungstellen endlich definiert sind. Diese Einschränkung ist jedoch praktisch immer erfüllt.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Der Wert an der Sprungstelle wird hier als rechtsseitiger Grenzwert festgelegt.

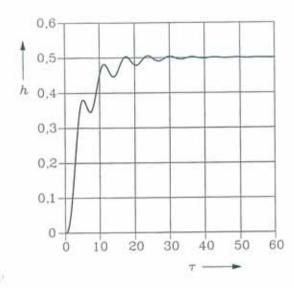


Abb. 1.17 Die Sprungantwort der Schaltung aus Abb.1.1 mit den dort angegebenen Parametern. Als Bezugswerte in den Gln.(1.1) wurden  $T_B = 1$  ms und  $U_{EB} = U_{AB} =$  $U_B$  angenommen.

als Zusammenhang zwischen der Stoßantwort (Gewichtsfunktion)  $g(\tau)$  und der Sprungantwort (Übergangsfunktion)  $h(\tau)$ . Die Sprungantwort lässt sich demnach als bestimmtes Integral der Stoßantwort berechnen. Daraus folgt umgekehrt die Beziehung

$$g(\tau) = h'(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}h(\tau), \qquad (1.69)$$

d.h. die Stoßantwort ist die Ableitung der Sprungantwort, wobei die Differentiation gegebenenfalls im verallgemeinerten Sinn der Distributionen aufzufassen ist.

Die Sprungantwort unserer Schaltung aus Abb.1.1,

$$h(\tau) = \{-0, 49959 e^{-0,202\tau} -0, 10198 e^{-0,099\tau} \cos[0, 990(\tau - 1, 583)] + 0, 5\}\varepsilon(\tau),$$
(1.70)

sehen Sie in Abb.1.17. Sie lässt sich z.B. über Gl.(1.68) aus der Stoßantwort (1.64) berechnen.

### Stabilität

Qualitativ ähnlich wie unsere Schaltung aus Abb.1.1 verhalten sich viele LTI-Systeme, wenn an den Eingang ein Sprung gelegt wird. Betrachten wir z.B. in Abb.1.18 typische Sprungantworten und die zugehörigen Stoßantworten dreier hypothetischer Systeme! In allen drei Fällen strebt die Sprungantwort nach ausreichend langer Zeit gegen einen konstanten Wert (hier gleich 1) – der Übergangsprozess ist abgeschlossen. Im Fall 1 erfolgt die Annäherung an den stationären Endwert schwingend (oszillierend), wir sprechen dann von einem schwach gedämpften System. Kennzeichnend dafür ist ein relativ starkes Überschwingen und eine lange Setzzeit (d.i. der Zeitabschnitt, nach dem der stationäre Endwert im Rahmen einer vorgegebenen Genauigkeit erreicht wird). Im Fall 3 ist das System stark gedämpft; der Übergangsprozess verläuft dann nicht schwingend, sondern kriechend (monoton). Es findet zwar kein Überschwingen statt,

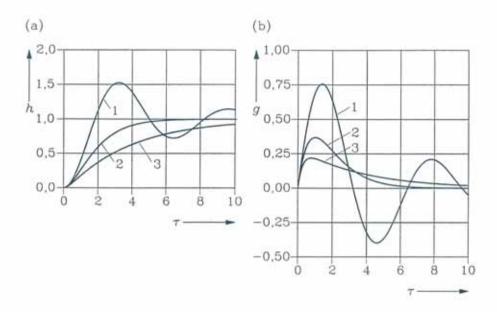


Abb. 1.18 Typische Sprungantworten (a) und zugehörige Stoßantworten (b) stabiler linearer zeitinvarianter Systeme. Das System ist schwach (Kurven 1), normal (Kurven 2) und stark (Kurven 3) gedämpft.

die Setzzeit ist aber u.U. ebenfalls lang. Dazwischen liegt der Fall 2 eines Systems mit normaler Dämpfung. Erwünscht ist häufig ein Systemverhalten, das rasche Reaktion und kleine Setzzeit zeigt. Leichtes Überschwingen wird dabei in Kauf genommen.

Die im Wesentlichen gleiche Information betreffend das Schwingungsverhalten und die Setzzeiten können Sie auch aus den Stoßantworten entnehmen, nicht aber den konstanten Endwert. Zur anschaulichen Charakterisierung des Verhaltens linearer Systeme ist deshalb die Sprungantwort in der Regel besser geeignet.

Die Sprungantworten in Abb.1.18(a) nehmen nach hinreichend langer Zeit einen endlichen, konstanten Wert an – sie gehören zu stabilen, linearen, zeitinvarianten Systemen. Eine andere Art von linearem Systemverhalten sehen Sie in Abb.1.19. So führt beispielsweise im Fall der Kurven 1 ein Sprung oder Stoß am Eingang ähnlich wie in Abb.1.18 zu einer Schwingung der Ausgangsgröße; die Schwingung nimmt aber nicht ab, sondern zu. Die Kurven 2 zeigen sogar monotones Anwachsen des Betrags der Ausgangsgröße. Systeme dieser Art nennen wir instabil.

Instabile Vorgänge sind häufig unerwünscht und sind selten mit linearen Modellen zu beschreiben, weil in realen Systemen in der Regel nichtlineare Begrenzungen das unbeschränkte Anwachsen von Zustandsgrößen verhindern. Ob und unter welchen Bedingungen sich ein System stabil oder instabil verhält – offensichtlich eine sehr wichtige Frage – kann zwar nicht immer, meistens jedoch mit linearen Methoden beantwortet werden.

Eine präzisere Fassung des Stabilitätsbegriffs geht von der anschaulichen Forderung aus, dass (ab  $\tau_0 = -\infty$ ) beschränkte Eingangssignale immer auch zu beschränkten Ausgangssignalen führen (Bounded Input – Bounded Output oder

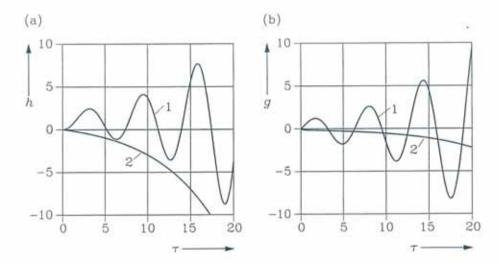


Abb. 1.19 Typische Sprungantworten (a) und zugehörige Stoßantworten (b) instabiler linearer zeitinvarianter Systeme.

BIBO- Eigenschaft). Ist also ein Eingangssignal  $u(\tau)$  beschränkt, d.h. gibt es eine endliche Konstante  $M_u$  so, dass

$$|u(\tau)| < M_u < \infty$$
 für alle  $\tau$ , (1.71)

dann nennen wir ein System (BIBO-) stabil, wenn auch eine endliche Konstante  $M_y$  mit

$$|y(\tau)| < M_y < \infty$$
 für alle  $\tau$  (1.72)

existiert. Ausgehend vom Faltungsintegral (1.62) erhalten wir aus Gl.(1.71)

$$|y(\tau)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau') u(\tau - \tau') d\tau' \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau')| |u(\tau - \tau')| d\tau'$$

$$< M_u \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau')| d\tau'.$$

Gilt nun

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau)| d\tau < M_g < \infty, \qquad (1.73)$$

d.h. ist die Stoßantwort absolut integrierbar, so ist auch die Bedingung (1.72) mit  $M_y = M_u M_g$  erfüllt. Umgekehrt lässt sich zeigen, dass sich zu einer nicht absolut integrierbaren Stoßantwort  $g(\tau)$  immer ein Eingangssignal  $u(-\tau) = g(\tau)/|g(\tau)|$  angeben lässt, das zwar wegen  $|u(\tau)| = 1$  beschränkt ist, das aber mit Gl.(1.62) für  $\tau = 0$  wegen

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau') u(-\tau') d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau')^2}{|g(\tau')|} d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\tau')| d\tau'$$

die Bedingung (1.72) verletzt. Wir schließen daraus: Ein lineares, zeitinvariantes, nicht notwendig kausales System ist genau dann (BIBO-) stabil, wenn seine

Sto eta antwort absolut integrierbar ist, wenn also die Bedingung (1.73) mit einer endlichen Konstanten  $M_g$  erfüllt ist. Beschränkte Eingänge erzeugen dann stets beschränkte Ausgänge.

## 1.7 Zusammenfassung

Zeitkontinuierliche Signale dienen zur modellhaften Beschreibung des Zeitverlaufs physikalischer Größen. Wird dabei jedem Zeitpunkt aus einem vorgegebenen Intervall genau ein Signalwert zugeordnet, so sprechen wir von einem determinierten Signal. In der Regel ist es von Vorteil, statt mit den originalen physikalischen Variablen mit bezogenen Variablen zu arbeiten. Als Bausteine werden elementare Signale wie Sinussignale und Exponentialsignale, der Heaviside-Sprung und der Dirac-Stoß eingeführt. Haben wir von einer ganzen Schar determinierter Signale auszugehen und lassen sich über die konkrete Auswahl nur wahrscheinliche Angaben machen, so sprechen wir von einem Zufallssignal. Die Charakterisierung erfolgt dann mit statistischen Methoden durch diverse Erwartungswerte, wobei für die Anwendungen spezielle Signaleigenschaften wie z.B. die Ergodizität ("Zeitmittel = Scharmittel") besonders hilfreich sind.

Auch die formale Beschreibung des Eingangs-Ausgangs-Verhaltens von zeitkontinuierlichen Systemen geschieht am besten durch Abbildungen: Jedem Eingangssignal und jedem Anfangszustand wird genau ein Ausgangssignal, die Systemantwort, zugewiesen. Einerseits reagiert ein System, ausgehend vom Nullzustand, auf ein Eingangssignal mit der Nullzustandsantwort, andererseits ergibt sich als Reaktion auf den Anfangszustand bei verschwindendem Eingang die Nulleingangsantwort. Ein dynamisches System nennen wir dann ein lineares System, wenn seine Nullzustandsantwort linear (homogen und additiv) vom Eingangssignal abhängt, und wenn die Nulleingangsantwort linear vom Anfangszustand abhängt, und wenn sich im kombinierten Fall die vollständige Antwort einfach als Summe der Nulleingangsantwort und der Nullzustandsantwort angeben lässt. Liegt als zusätzliche Systemeigenschaft noch Zeitinvarianz vor, d.h. ergibt sich überdies bei beliebiger Zeitverschiebung des Eingangssignals und mitgenommenem Anfangszustand ein genau gleich verschobenes Ausgangssignal, so sprechen wir kurz von einem LTI-System.

Das konsequente Ausnützen der Nullzustandslinearität führt bei LTI-Systemen auf eine Reihe überaus nützlicher Faltungsdarstellungen von Systemantworten zu beliebigen Eingängen. Als Kern im Faltungsintegral finden wir die Stoßantwort, d.i. die Nullzustandsantwort auf einen Dirac-Stoß im Zeitnullpunkt. Wenn diese, das System vollständig charakterisierende Funktion für alle negativen Zeiten verschwindet, nennen wir das LTI-System kausal ("Keine Stoßantwort vor dem Stoß!"). Eine weitere charakterisierende Funktion haben wir in der Sprungantwort kennengelernt, also in der Nullzustandsantwort des LTI-Systems auf einen Heaviside-Sprung im Zeitnullpunkt. Sie gestattet eine anschauliche Darstellung des dynamischen Verhaltens als Reaktion auf sprungartige Änderungen des Eingangssignals und damit auch z.B. des Dämpfungsverhaltens bei Einschwingvorgängen oder der Stabilität. Wir nennen ein LTI-System stabil, wenn beschränkte Eingangssignale immer auch auf beschränkte Ausgangssignale führen.

# Kapitel 2

# LTI-Systeme im Zeitbereich

In Kapitel 1 blieben einige wichtige Fragen offen. Zwar haben wir die Bedeutung etwa der Sprungantwort und der Stoßantwort für die Charakterisierung des dynamischen Verhaltens von LTI-Systemen erkannt, wie aber werden sie tatsächlich berechnet? Dies ist das Hauptthema dieses Kapitels. Daneben werden Sie noch weitere zentrale Begriffe kennen lernen, z.B. die Pol-Nullstellen-Struktur eines Systems und deren Einfluss auf das Verhalten im Zeitbereich.

## 2.1 Aufstellen der System-Differentialgleichung

Die modellmäßige Erfassung des Zusammenhangs der bezogenen Ausgangsgröße  $y(\tau)$  und der bezogenen Eingangsgröße  $u(\tau)$  eines linearen, zeitinvarianten dynamischen Systems mit konzentrierten Parametern und ohne Totzeiten lässt sich durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_mu^{(m)} + \dots + b_0u$$
 (2.1)

mit konstanten Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  angeben, wobei die oberen Indizes in Klammern die Ordnung der Ableitungen nach der bezogenen Zeitvariablen  $\tau$  kennzeichnen. Wir schreiben also

$$y' = y^{(1)} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} \;, \quad y'' = y^{(2)} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\tau^2} \;, \quad \dots, \quad y^{(i)} = \frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}\tau^i} \;, \quad \dots$$

für die Ableitungen des Ausgangssignals und analog für das Eingangssignal. Da die Koeffizienten voraussetzungsgemäß konstant sind, kann  $a_n$  ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich Eins gesetzt werden. Die Differentialgleichung (2.1) liefert zu einem Eingangssignal  $u(\tau)$  und zu einem Satz von Anfangsbedingungen oder Periodizitätsbedingungen als eindeutige Lösung die zugehörige Systemantwort  $y(\tau)$ . Wie finden wir aber für ein gegebenes System solch ein Differentialgleichungsmodell?

Physikalische Systeme, wie wir sie hier betrachten, sind aus bestimmten Elementen aufgebaut, die nach gewissen physikalischen Regeln untereinander in Wechselwirkung stehen. Unsere Schaltung aus Abb.1.1 enthält beispielsweise eine Reihe von Stromkreiselementen, und die physikalischen Regeln lassen sich

in den Kirchhoff-Regeln und den Elementegleichungen zusammenfassen. In mechanischen Systemen gibt es dafür kinematische und kinetische Beziehungen, etwa die Bewegungsgleichungen von Körpern und die Zusammenhänge zwischen Kräften und Verschiebungen an elastischen Elementen.

Bleiben wir bei unserem Beispiel aus Abb.1.1! Maschenregel und Knotenregel liefern, wenn wir wie üblich die Elementegleichungen sofort einbauen,

$$u_{\rm E} = R_1 i_1 + L_1 di_1/dt + u_{\rm C},$$
  
 $0 = (R_2 + R_3)i_2 + L_2 di_2/dt - u_{\rm C},$   
 $u_{\rm A} = R_3 i_2,$   
 $0 = -i_1 + i_2 + C du_{\rm C}/dt.$ 

Aus diesen vier unabhängigen Gleichungen werden die drei inneren Variablen  $i_1, i_2$  und  $u_{\rm C}$  eliminiert. Übrig bleibt eine Differentialgleichung dritter Ordnung, nämlich

$$\frac{L_1 L_2 C}{R_3} \cdot \frac{\mathrm{d}^3 u_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t^3} + \frac{R_1 L_2 C + (R_2 + R_3) L_1 C}{R_3} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L_1 + L_2 + R_1 (R_2 + R_3) C}{R_3} \cdot \frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_3} \cdot u_{\mathrm{A}} \qquad (2.2)$$

$$= u_{\mathrm{E}}.$$

Nun kommt die Normierung: Wir wechseln in Gl.(2.2) von den Originalvariablen  $u_{\rm A}, u_{\rm E}$  und t zu den bezogenen Variablen y, u und  $\tau$  gemäß den Gln.(1.1) mit zunächst allgemeinen Bezugswerten  $U_{\rm AB}, U_{\rm EB}$  und  $T_{\rm B}$ , setzen also

$$u_{\rm A} = U_{\rm AB} \cdot y, \quad u_{\rm E} = U_{\rm EB} \cdot u, \quad t = T_{\rm B} \cdot \tau$$
 (2.3)

ein und erhalten

$$\begin{split} &\frac{L_1L_2C}{R_3} \cdot \frac{U_{\text{AB}}}{T_{\text{B}}^3} \cdot \frac{\text{d}^3y}{\text{d}\tau^3} + \frac{R_1L_2C + (R_2 + R_3)L_1C}{R_3} \cdot \frac{U_{\text{AB}}}{T_{\text{B}}^2} \cdot \frac{\text{d}^2y}{\text{d}\tau^2} \\ &+ \frac{L_1 + L_2 + R_1(R_2 + R_3)C}{R_3} \cdot \frac{U_{\text{AB}}}{T_{\text{B}}} \cdot \frac{\text{d}y}{\text{d}\tau} + \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_3} \cdot U_{\text{AB}} \cdot y \\ &= U_{\text{EB}} \cdot u. \end{split}$$

Division der ganzen Gleichung durch den Koeffizienten von  ${\rm d}^3y/{\rm d}\tau^3$ stellt schließlich die gewünschte Form

$$y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = b_0u (2.4)$$

her mit den Koeffizienten

$$\begin{split} a_2 &= \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2 + R_3}{L_2}\right) T_{\rm B}, \quad a_1 = \left(\frac{1}{L_1 C} + \frac{1}{L_2 C} + \frac{R_1}{L_1} \frac{R_2 + R_3}{L_2}\right) T_{\rm B}^2, \\ a_0 &= \left(\frac{R_1}{L_1} \frac{1}{L_2 C} + \frac{R_2 + R_3}{L_2} \frac{1}{L_1 C}\right) T_{\rm B}^3, \quad b_0 = \frac{R_3 T_{\rm B}^3}{L_1 L_2 C} \cdot \frac{U_{\rm EB}}{U_{\rm AB}} \;, \end{split}$$

die natürlich alle die physikalische Dimension Eins haben müssen. Für die Parameter aus Abb.1.1 und die Bezugswerte  $U_{\rm EB}=U_{\rm AB}=U_{\rm B},\,T_{\rm B}=1\,{\rm ms}$  ergibt sich z.B. der (exakte) Koeffizientensatz

$$a_2 = 0, 4$$
;  $a_1 = 1,03$ ;  $a_0 = 0, 2$ ;  $b_0 = 0, 1$ ; (2.5)

der den meisten Auswertungen in Kapitel 1 zu Grunde liegt.

In Gl.(2.4) haben wir die Standardform (2.1) unserer System-Differentialgleichung mit n=3 und m=0 gefunden. Die Ordnung n der Differentialgleichung wird auch die **Ordnung des Systems** genannt; sie entspricht der Anzahl der unabhängigen Energiespeicher.

#### 2.2 Pole und Nullstellen

Bei der Konstruktion von Lösungen für Differentialgleichungen des Typs (2.1) spielt die Exponentialfunktion (1.10) eine herausragende Rolle. Wird nämlich als Eingangssignal speziell  $\exp(s\tau)$  gewählt, so lässt sich – abgesehen von einer multiplikativen Konstanten – die Gleichung mit derselben Funktion als Ausgangssignal erfüllen, d.h.

$$u(\tau) = e^{s\tau} \longmapsto y(\tau) = G e^{s\tau}$$
 (2.6)

mit einer beliebigen, aber festen komplexen Zahl s und einem dazu passend gewählten komplexen Übertragungsfaktor G bildet ein Lösungspaar. In diesem Sinn sind die komplexen Exponentialfunktionen Eigenfunktionen von LTI-Systemen.

Um die Bedeutung der Eigenfunktionen zu erkennen, brauchen wir lediglich die Ausdrücke (2.6) in unsere System-Differentialgleichung (2.1) einzusetzen. Nach Ausführung der Differentiationen und Zusammenfassung folgt

$$(s^{n} + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_{1}s + a_{0})Ge^{s\tau}$$

$$= (b_{m}s^{m} + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_{1}s + b_{0})e^{s\tau},$$
(2.7)

es ergeben sich also auf natürliche Weise zwei Polynome, in denen die Struktur der Differentialgleichung vollständig erfasst wird: Das der linken Seite zugeordnete charakteristische Polynom

$$P(s) = s^{n} + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_{1}s + a_{0}$$
  
=  $(s - p_{1})(s - p_{2}) \cdots (s - p_{n})$  (2.8)

und das der rechten Seite zugeordnete Nullstellenpolynom

$$Q(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0$$
  
=  $b_m (s - q_1)(s - q_2) \dots (s - q_m)$  (2.9)

mit i.A. komplexen Wurzeln  $p_i$  bzw.  $q_i$ . Der Quotient Q(s)/P(s) ist eine rationale Funktion und heißt Übertragungsfunktion des Systems,

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$= b_m \frac{(s - q_1)(s - q_2) \cdots (s - q_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}.$$
(2.10)

Wie aus Gl.(2.7) ersichtlich, gibt G(s) zu jedem gewählten s den in (2.6) eingeführten komplexen Übertragungsfaktor G an. Überdies liefert die Auswertung

der Übertragungsfunktion auf der imaginären Achse,  $G(j\nu)$ , den komplexen Frequenzgang des Systems. Davon werden wir in Kapitel 4 ausgiebig Gebrauch machen.

Die Wurzeln  $p_i, i = 1, ..., n$ , des charakteristischen Polynoms P(s) sind Pole der Übertragungsfunktion und werden deshalb allgemein die Pole des Systems genannt. Sie spielen eine wichtige Rolle bei der Charakterisierung des Übergangsverhaltens und im Speziellen der Stabilität. Die Wurzeln  $q_i, i = 1, ..., m$ , des Nullstellenpolynoms Q(s) sind auch Nullstellen der Übertragungsfunktion und heißen deshalb die Nullstellen des Systems. Wie wir später sehen werden, sind auch die Nullstellen wichtig für das dynamische Verhalten.

Das charakteristische Polynom und das Nullstellenpolynom der Differentialgleichung (2.4) mit den Koeffizienten (2.5) sind

$$P(s) = s^{3} + 0, 4s^{2} + 1,03s + 0, 2$$
  
=  $(s + 0, 202)(s + 0,099 - j0,990)(s + 0,099 + j0,990),$  (2.11)  
$$Q(s) = 0, 1.$$

Unser Beispielsystem besitzt also die drei Pole

$$p_1 = -0,202;$$
  $p_2 = -0,099 + j0,990;$   $p_3 = -0,099 - j0,990$  (2.12)

und keine Nullstelle, wobei ein Pol reell ist und die beiden anderen Pole als konjugiert komplexes Paar auftreten. Dies ist natürlich kein Zufall: Jedes Polynom vom Grad  $n \geqslant 1$  mit reellen oder komplexen Koeffizienten besitzt bekanntlich genau n i.A. komplexe Wurzeln, die Vielfachheiten entsprechend gezählt. Sind die Koeffizienten wie in unserem Fall reell, so kommen komplexe Wurzeln immer als konjugiert komplexe Paare vor. Die Übertragungsfunktion unseres Systems ist

$$G(s) = \frac{0,1}{s^3 + 0, 4s^2 + 1, 03s + 0, 2}$$

$$= \frac{0,1}{(s+0,202)(s+0,099 - j0,990)(s+0,099 + j0,990)}.$$
 (2.13)

Es ist manchmal hilfreich, die Lage der Pole und der Nullstellen eines Systems in der komplexen Ebene zu markieren. Für die Übertragungsfunktion (2.13) sehen Sie das in Abb.2.1(a), und für ein anderes Beispiel, dargestellt durch die Differentialgleichung und die zugehörige Übertragungsfunktion

$$y''' + 4y'' + 9y' + 10y = 5u'' + 20u' + 25u,$$

$$G(s) = \frac{5(s^2 + 4s + 5)}{s^3 + 4s^2 + 9s + 10} = \frac{5(s + 2 - j)(s + 2 + j)}{(s + 2)(s + 1 - j2)(s + 1 + j2)}$$
(2.14)

in Abb.2.1(b). Dieses System besitzt im Gegensatz zum System (2.13) zwar Nullstellen, die Pole und Nullstellen liegen aber alle wieder in der linken Halbebene, d.h. sie haben alle negative Realteile. Dies muss nicht immer so sein, wie das Beispiel des Systems

$$y''' + y' - 10y = 5u'' - 20u' + 25u,$$

$$G(s) = \frac{5(s^2 - 4s + 5)}{s^3 + s - 10} = \frac{5(s - 2 - j)(s - 2 + j)}{(s - 2)(s + 1 - j2)(s + 1 + j2)}$$
(2.15)

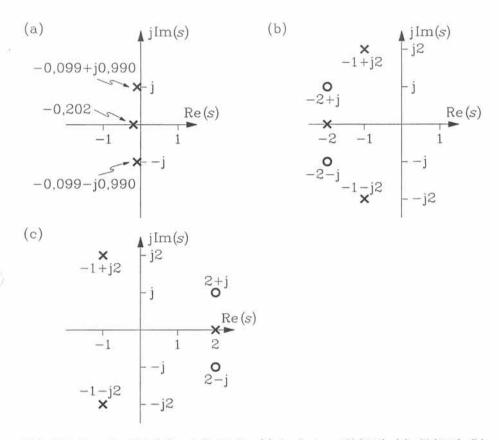


Abb. 2.1 Lage der Pole ( $\times$ ) und Nullstellen (o) des Systems Gl.(2.13): (a), Gl.(2.14): (b) und Gl.(2.15): (c).

zusammen mit Abb.2.1(c) zeigt.

Welche Bedeutung es hat, ob die Pole in der linken oder in der rechten Halbebene liegen, werden wir im nächsten Abschnitt genauer untersuchen. Die Auswirkungen der Lage der Nullstellen sind etwas schwerer zu erkennen. Diese werden wir uns an mehreren Stellen erarbeiten.

# 2.3 Homogene Lösungen. Stabilität

Das traditionelle Lösungsverfahren für Differentialgleichungen des Typs (2.1) geht bekanntlich aus von einer Darstellung der Gesamtlösung  $y(\tau)$  als Summe zweier Funktionen, der homogenen Lösung  $y_h(\tau)$  und einer partikulären Lösung  $y_p(\tau)$ ,

$$y(\tau) = y_{\rm h}(\tau) + y_{\rm p}(\tau). \tag{2.16}$$

Dies sieht zwar ähnlich aus wie die Aufspaltung (1.47) der vollständigen Systemantwort in die Nulleingangsantwort  $y_{0\rm E}(\tau)$  und die Nullzustandsantwort  $y_{0\rm Z}(\tau)$ , ist aber i.A. eine andere Form der additiven Zerlegung. Eine partikuläre Lösung ist irgend eine Funktion  $y_{\rm p}(\tau)$ , die ab dem Anfangszeitpunkt  $\tau_0$  für eine

vorgegebene Eingangsfunktion  $u(\tau), \tau \geqslant \tau_0$ , die Differentialgleichung erfüllt. Sie braucht weder den in der Regel zusätzlich vorgeschriebenen Anfangsbedingungen (entsprechend dem Anfangszustand) zu genügen, noch ist sie eindeutig, d.h. es gibt zur selben Eingangsfunktion zunächst nicht nur eine partikuläre Lösung. Meist unterscheiden sich die partikulären Lösungen um flüchtige Anteile, die mit fortschreitender Zeit verschwinden, so dass letztlich zu einer bestimmten Eingangsfunktion doch wieder eine eindeutige Antwort gehört. Dies gilt zumindest für stabile Systeme, die ihren Anfangszustand im Lauf der Zeit "vergessen".

Wie man partikuläre Lösungen für die wichtigste Klasse von Eingangssignalen findet, soll im nächsten Abschnitt behandelt werden. In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Bestimmung des homogenen Lösungsanteils beschäftigen. Er beschreibt – unabhängig von einem speziellen Eingangssignal – die Eigendynamik des Systems.

#### Die homogene Lösung

Die so genannte homogene Lösung  $y_h(\tau)$  ist erklärt als die allgemeine Lösung der unserer ursprünglichen Gleichung (2.1) zugeordneten homogenen Differentialgleichung

$$y_{\rm h}^{(n)} + a_{n-1}y_{\rm h}^{(n-1)} + \dots + a_1y_{\rm h}^{(1)} + a_0y_{\rm h} = 0,$$
 (2.17)

d.h. sie wird durch die allgemeine Linearkombination von n linear unabhängigen Funktionen gebildet, von denen jede für sich der Gl.(2.17) genügen muss.

Es ist nahe liegend, die Basisfunktionen der homogenen Lösung in der Klasse der Eigenfunktionen der LTI-Systeme zu vermuten. Tatsächlich erhalten wir nach Einsetzen von  $\exp(s\tau)$  für  $y_{\rm h}(\tau)$  aus (2.17) die für alle  $\tau$  zu erfüllende Bedingung

$$P(s) e^{s\tau} = 0,$$

worin P(s) das in (2.8) definierte charakteristische Polynom bedeutet. Jeder Pol $s = p_i, i = 1, ..., n$ , des Systems liefert also wegen  $P(p_i) = 0$  eine Basisfunktion  $\exp(p_i\tau)$ . Sind alle Pole unterschiedlich, was wir vorerst annehmen wollen, so haben wir in der Linearkombination

$$y_h(\tau) = c_1 e^{p_1 \tau} + c_2 e^{p_2 \tau} + \dots + c_n e^{p_n \tau}$$
(2.18)

bereits die gesuchte homogene Lösung gefunden. Die Koeffizienten (freien Konstanten)  $c_1, c_2, \ldots, c_n$  sind mit Hilfe der Anfangsbedingungen festzulegen, aber erst nach der Bildung der vollständigen Lösung. Wie man dabei vorgeht, werden wir im Abschnitt 2.5 besprechen.

Der Gleichung (2.4) mit den Koeffizienten (2.5) unserer Schaltung aus Abb.1.1 ist die homogene Gleichung

$$y_{\rm h}^{\prime\prime\prime} + 0, 4y_{\rm h}^{\prime\prime} + 1,03y_{\rm h}^{\prime} + 0, 2y_{\rm h} = 0 \tag{2.19}$$

zugeordnet. Mit den bereits berechneten, in (2.12) angegebenen Polen ergibt sich die homogene Lösung

$$y_h(\tau) = c_1 e^{-0.202\tau} + c_2 e^{(-0.099+j0.990)\tau} + c_3 e^{(-0.099-j0.990)\tau}$$
 (2.20)

für beliebige Zahlen  $c_1, c_2, c_3$ . Sie können das durch Einsetzen in Gl.(2.19) leicht nachprüfen.

Das Auftreten komplexer Pole in konjugiert komplexen Paaren ermöglicht andere, äquivalente Schreibweisen der homogenen Lösung. Wir können nämlich fordern, dass eine homogene Gleichung (2.17) mit reellen Koeffizienten auch eine reelle Lösung  $y_h(\tau)$  besitzt. Dann muss z.B. in Gl.(2.20)  $c_1$  reell sein und  $c_2$  muss mit  $c_3$  ein konjugiert komplexes Paar bilden,  $c_2 = c_2' + \mathrm{j} c_2''$ ,  $c_3 = c_2' - \mathrm{j} c_2''$ . Für das Polpaar  $p_2 = p_2' + \mathrm{j} p_2''$ ,  $p_3 = p_2' - \mathrm{j} p_2''$  fassen wir die entsprechenden Terme zusammen,

$$\begin{split} c_2 \, \mathrm{e}^{p_2 \tau} + c_3 \, \mathrm{e}^{p_3 \tau} &= (c_2' + \mathrm{j} c_2'') \, \mathrm{e}^{(p_2' + \mathrm{j} p_2'') \tau} + (c_2' - \mathrm{j} c_2'') \, \mathrm{e}^{(p_2' - \mathrm{j} p_2'') \tau} \\ &= \mathrm{e}^{p_2' \tau} [c_2' (\mathrm{e}^{\mathrm{j} p_2'' \tau} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j} p_2'' \tau}) + \mathrm{j} c_2'' (\mathrm{e}^{\mathrm{j} p_2'' \tau} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j} p_2'' \tau})] \\ &= \mathrm{e}^{p_2' \tau} [(2c_2') \cos(p_2'' \tau) + (-2c_2'') \sin(p_2'' \tau)], \end{split}$$

und erhalten mit den neuen, reellen, sonst aber beliebigen Konstanten  $a_2=2c_2'$  und  $a_3=-2c_2''$ 

$$y_h(\tau) = c_1 e^{-0.202\tau} + a_2 e^{-0.099\tau} \cos(0.990\tau) + a_3 e^{-0.099\tau} \sin(0.990\tau).$$
 (2.21)

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit ergibt sich aus der Identität

$$a_2 \cos(p_2''\tau) + a_3 \sin(p_2''\tau) = b_2 \cos(p_2''\tau + \varphi_2)$$
 mit  $b_2 = \sqrt{a_2^2 + a_3^2}$ ,  $\cos(\varphi_2) = a_2/b_2$ ,  $\sin(\varphi_2) = -a_3/b_2$ ,

in unserem Beispiel also

$$y_h(\tau) = c_1 e^{-0.202\tau} + b_2 e^{-0.099\tau} \cos(0.990\tau + \varphi_2).$$
 (2.22)

Wieder stehen drei reelle Konstanten,  $c_1, b_2$  und  $\varphi_2$ , zur Anpassung der vollständigen Lösung an die Anfangsbedingungen zur Verfügung.

#### Mehrfache Pole

Die Situation ist nicht viel komplizierter, wenn die Pole nicht alle unterschiedlich sind, wenn also Wurzeln des charakteristischen Polynoms mehrfach vorkommen. Sie brauchen nur der einfachen Regel zu folgen: Für die k-te Wiederholung des Pols  $p_i$  ist der Term  $\tau^k \exp(p_i \tau)$  in die homogene Lösung aufzunehmen. Z.B. liefert das charakteristische Polynom

$$P(s) = s^3(s+5)^2(s+7)$$

drei Pole,  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -5$  und  $p_3 = -7$ , wobei aber  $p_1$  dreimal und  $p_2$  zweimal vorkommen. Die homogene Lösung ist daher

$$y_h(\tau) = c_1 + c_2\tau + c_3\tau^2 + c_4 e^{-5\tau} + c_5\tau e^{-5\tau} + c_6 e^{-7\tau}$$

Komplexe Pole werden in gleicher Weise behandelt. So gehört etwa zu dem charakteristischen Polynom

$$P(s) = (s+1+i2)^2(s+1-i2)^2$$

die homogene Lösung

$$\begin{aligned} y_{\rm h}(\tau) &= c_1 \, {\rm e}^{(-1-{\rm j}2)\tau} + c_2 \, {\rm e}^{(-1+{\rm j}2)\tau} + c_3 \tau \, {\rm e}^{(-1-{\rm j}2)\tau} + c_4 \tau \, {\rm e}^{(-1+{\rm j}2)\tau}, \\ y_{\rm h}(\tau) &= a_1 \, {\rm e}^{-\tau} \cos(2\tau) + a_2 \, {\rm e}^{-\tau} \sin(2\tau) + a_3 \tau \, {\rm e}^{-\tau} \cos(2\tau) + a_4 \tau \, {\rm e}^{-\tau} \sin(2\tau), \\ y_{\rm h}(\tau) &= b_1 \, {\rm e}^{-\tau} \cos(2\tau + \varphi_1) + b_2 \tau \, {\rm e}^{-\tau} \cos(2\tau + \varphi_2). \end{aligned}$$

Diese drei Formen sind äquivalent.

#### Stabilität

Die n Pole des Systems (Wurzeln des charakteristischen Polynoms) bestimmen die wesentlichen Eigenschaften der homogenen Lösung und erfassen damit – unabhängig vom speziellen Verlauf der Eingangsgröße – die Eigendynamik des Systems. Auf dieser Grundlage nennen wir ein System stabil, wenn alle seine Pole in der linken Halbebene liegen, also negative Realteile aufweisen: Jeder Term der homogenen Lösung klingt dann mit wachsender Zeit gegen Null ab. Dagegen nennen wir ein System instabil, wenn mindestens einer seiner Pole in der rechten Halbebene liegt: Die homogene Lösung wächst dann mit zunehmender Zeit unbeschränkt an.

Besitzt ein System einfache Pole auf der imaginären Achse und keine Pole in der rechten Halbebene, dann wird es grenzstabil genannt. Dazu gehört ein einfacher Pol im Ursprung – der entsprechende Term in der homogenen Lösung ist eine Konstante – oder ein konjugiertes Paar rein imaginärer Pole, die eine Sinusschwingung konstanter Amplitude repräsentieren. Mehrfache Pole auf der imaginären Achse führen dagegen wegen der mit Potenzen von  $\tau$  multiplizierten Terme in der homogenen Lösung auf instabiles Verhalten.

Die hier verwendeten Benennungen stimmen mit dem in Abschnitt 1.6 eingeführten Stabilitätsbegriff überein. Wir werden nämlich noch sehen, dass in den expliziten Darstellungen der Sprungantwort und der Stoßantwort von LTI-Systemen ohne Totzeiten genau die Exponentialterme  $\exp(p_i\tau)$  der homogenen Lösung auftreten.

# 2.4 Partikuläre Lösungen

Der zweite, partikuläre Teil  $y_p(\tau)$  in der Lösungsdarstellung (2.16) muss der vollständigen Differentialgleichung (2.1) mit der speziell vorliegenden Eingangsfunktion  $u(\tau)$  genügen, muss aber nicht auch schon die Anfangsbedingungen erfüllen.  $y_p$  ist also irgend eine Funktion, für die

$$y_{\mathbf{p}}^{(n)} + a_{n-1}y_{\mathbf{p}}^{(n-1)} + \dots + a_1y_{\mathbf{p}}^{(1)} + a_0y_{\mathbf{p}} = b_m u^{(m)} + \dots + b_0u$$
 (2.23)

gilt. Es gibt mehrere Methoden zum Auffinden partikulärer Lösungen für Gleichungen unseres Typs. Ich werde hier nur eine davon entwickeln, die besonders einfach zu handhaben ist und die sich für unsere Art von Problemen bestens eignet.

### Eine spezielle Klasse von Eingangsfunktionen

Betrachten wir dazu eine Menge von Funktionen X(s) der Variablen s, die zusammen einen linearen Raum über  $\mathbb{R}$  darstellen, d.h. wir können beliebige Line-

	$u(\tau)$	=	$L\left[\mathrm{e}^{s\tau}\right]$
1	k	=	$[ke^{s\tau}]_{s=0}$
2	$ke^{a\tau}$	=	$[ke^{s\tau}]_{s=a}$
3	kτ	=	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[ k \mathrm{e}^{s\tau} \right]_{s=0}$
4	kTe <sup>aT</sup>	=	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[ k \mathrm{e}^{s\tau} \right]_{s=a}$
5	$k\cos(\nu\tau + \varphi_{\mathrm{u}})$	=	Re $\left[k \mathrm{e}^{\mathrm{j} \varphi_u} \mathrm{e}^{s \tau}\right]_{s=\mathrm{j} \nu}$

Tab. 2.1 Gebräuchliche Eingangsfunktionen, durch lineare Operationen an  $\exp(s\tau)$  erzeugt.  $k, a, \nu$  und  $\varphi_{\rm u}$  sind reelle Konstanten.

arkombinationen  $k_1X_1(s) + k_2X_2(s)$  mit reellen Koeffizienten  $k_1,k_2$  bilden und erhalten wieder Elemente der Menge. Auf dieser Menge seien lineare Operationen L definiert, also Abbildungen mit der Eigenschaft

$$L[k_1X_1(s) + k_2X_2(s)] = k_1L[X_1(s)] + k_2L[X_2(s)].$$
 (2.24)

Eine spezielle Klasse von Eingangssignalen wird nun durch Funktionen  $u(\tau)$  gebildet, die sich durch die Anwendung solcher linearer Operationen auf  $\exp(s\tau)$ , betrachtet als Funktion von s, erzeugen lassen,

$$u(\tau) = L\left[e^{s\tau}\right]. \tag{2.25}$$

Wenn wir uns zunächst auf diese Klasse beschränken, so stellt dies keine gravierende Einschränkung dar: Die meisten, bei rechnerischen Untersuchungen linearer Systeme üblicherweise verwendeten Eingangsfunktionen werden damit erfasst. Einige einfache Beispiele sehen Sie in Tab.2.1. Überzeugen Sie sich, dass es sich dabei tatsächlich um lineare Operationen mit der Eigenschaft (2.24) handelt! So haben wir etwa für den Operator in der Zeile 4, wenn  $X_1(s)$  und  $X_2(s)$  irgend welche differenzierbaren Funktionen von s sind,

$$\begin{split} L\left[k_1X_1(s) + k_2X_2(s)\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[k(k_1X_1(s) + k_2X_2(s))\right]_{s=a} \\ &= k_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[kX_1(s)\right]_{s=a} + k_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[kX_2(s)\right]_{s=a} \\ &= k_1L\left[X_1(s)\right] + k_2L\left[X_2(s)\right]. \end{split}$$

Analoges gilt für andere Einträge. Die Tabelle lässt sich nahezu beliebig erweitern.

#### Die zugehörigen partikulären Lösungen

Das hier vorgestellte Konstruktionsverfahren für partikuläre Lösungen stützt sich auf die folgende Eigenschaft. Lässt sich die Eingangsfunktion  $u(\tau)$  durch Anwendung einer linearen Operation auf  $\exp(s\tau)$ , betrachtet als Funktion der Variablen s, erzeugen, so ergibt sich eine partikuläre Lösung  $y_p(\tau)$  durch Anwendung der selben linearen Operation auf  $G(s) \exp(s\tau)$ ,

$$u(\tau) = L\left[e^{s\tau}\right] \longmapsto y_{p}(\tau) = L\left[G(s)e^{s\tau}\right], \qquad (2.26)$$

wobei G(s) die Übertragungsfunktion des Systems bedeutet. Dies ist leicht einzusehen: Wenn (2.26) ein Lösungspaar von Gl.(2.23) bilden soll, muss

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\tau^n} L\left[G(s)\,\mathrm{e}^{s\tau}\right] + a_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\tau^{n-1}} L\left[G(s)\,\mathrm{e}^{s\tau}\right] + \dots + a_0 L\left[G(s)\,\mathrm{e}^{s\tau}\right]$$

$$= b_m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\tau^m} L\left[\mathrm{e}^{s\tau}\right] + \dots + b_0 L\left[\mathrm{e}^{s\tau}\right]$$

identisch in  $\tau$  erfüllt sein. Nun ist aber L eine lineare Operation an Funktionen von s und vertauscht daher mit den Ableitungen nach  $\tau$ , die lineare Operationen an Funktionen von  $\tau$  darstellen,

$$L[G(s)s^{n} e^{s\tau}] + a_{n-1}L[G(s)s^{n-1} e^{s\tau}] + \dots + a_{0}L[G(s) e^{s\tau}]$$
  
=  $b_{m}L[s^{m} e^{s\tau}] + \dots + b_{0}L[e^{s\tau}].$ 

Die Linearität von L erlaubt überdies die Zusammenfassung

$$L\left[G(s)P(s)\operatorname{e}^{s\tau}\right]=L\left[Q(s)\operatorname{e}^{s\tau}\right],$$

wobei das charakteristische Polynom P(s) aus Gl.(2.8) und das Nullstellenpolynom Q(s) aus Gl.(2.9) benutzt wurden. Wegen G(s) = Q(s)/P(s) sind die beiden Seiten tatsächlich identisch.

#### Einfache Beispiele

Als erstes Beispiel nehmen wir die Differentialgleichung und die Eingangsfunktion

$$y' + 5y = u$$
,  $u(\tau) = 3e^{2\tau}$ .

Die zugehörige Übertragungsfunktion ist

$$G(s) = 1/(s+5).$$

Da sich die Eingangsfunktion nach dem Muster von Zeile 2 in Tab.2.1 bilden lässt, ergibt sich eine partikuläre Lösung zu

$$y_{\rm p}(\tau) = [3G(s) e^{s\tau}]_{s=2} = 3G(2) e^{2\tau} = \frac{3}{7} e^{2\tau},$$

was sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung leicht nachprüfen lässt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left( \frac{3}{7} \,\mathrm{e}^{2\tau} \right) + 5\frac{3}{7} \,\mathrm{e}^{2\tau} = 3 \,\mathrm{e}^{2\tau}.$$

Im zweiten Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung und die Eingangsfunktion

y'' + 3y' + 2y = u' + 3u,  $u(\tau) = k e^{a\tau}$ .

Die Übertragungsfunktion des Systems,

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \ ,$$

weist eine Nullstelle bei -3 und je einen Pol bei -1 und -2 auf. Als partikuläre Lösung erhalten wir

$$y_{\mathbf{p}}(\tau) = [kG(s) e^{s\tau}]_{s=a} = kG(a) e^{a\tau} = k \frac{a+3}{(a+1)(a+2)} e^{a\tau},$$

vorausgesetzt,  $a \neq -1$  und  $a \neq -2$ . Auch dies lässt sich leicht nachprüfen. Was passiert, wenn a mit einer Nullstelle des Systems zusammenfällt, in unserem Beispiel also a = -3 ist? Aus G(-3) = 0 folgt dann  $y_p(\tau) = 0$ , die Gesamtlösung besteht allein aus dem homogenen Teil; der Exponentialverlauf am Eingang schlägt nicht zum Ausgang durch. Interessant ist noch der Fall a = 0, also  $u(\tau) = k$ . Es stellt sich auch für die partikuläre Lösung eine Konstante ein, in unserem Beispiel  $y_p(\tau) = G(0)k = k3/2$ , nämlich der zum konstanten Eingang gehörende konstante Endwert am Ausgang (vorausgestzt, das System ist stabil).

Wir fassen verallgemeinernd zusammen: Kennen wir von einem linearen, zeitinvarianten System die Übertragungsfunktion G(s) und besitzt die Eingangsgröße den Zeitverlauf

$$u(\tau) = \sum_{i=1}^{N} k_i e^{a_i \tau}, \qquad (2.27)$$

ist also eine Linearkombination natürlicher Exponentialfunktionen, wobei keines der  $a_i$  mit einem Pol von G(s) zusammenfällt, dann enthält die Systemantwort den partikulären Teil

$$y_{\rm p}(\tau) = \sum_{i=1}^{N} G(a_i) k_i \,\mathrm{e}^{a_i \tau}.$$
 (2.28)

Ist irgend eines der  $a_i$  gleich einer Nullstelle von G(s), so kommt die entsprechende Komponente in der Partikulärlösung  $y_p(\tau)$  und damit auch in der vollständigen Systemantwort  $y(\tau)$  nicht vor. Übrigens: Für die Berechnung von  $G(a_i)$  muss die Übertragungsfunktion nicht in die faktorisierte Form gebracht werden. Sie brauchen die Pole und Nullstellen dafür also nicht zu berechnen.

Als drittes **Beispiel** berechnen wir für die Differentialgleichung des zweiten Beispiels,

$$y'' + 3y' + 2y = u' + 3u$$
,  $G(s) = \frac{s+3}{s^2 + 3s + 2}$ ,

die zur Eingangsfunktion

$$u(\tau) = \cos(2\tau + \pi/4) = \operatorname{Re}\left[e^{j\pi/4} e^{s\tau}|_{s=j2}\right]$$

(vgl. Zeile 5 in Tab.2.1) gehörende partikuläre Lösung. Wir erhalten

$$y_{\rm p}(\tau) = \text{Re}\left[e^{j\pi/4}G(s)\,e^{s\tau}\,|_{s=j2}\right] = \text{Re}\left[\frac{3+j2}{-2+j6}\,e^{j(2\tau+\pi/4)}\right]$$
  
=  $\text{Re}\left[0,570\,e^{-j1,305}\,e^{j(2\tau+\pi/4)}\right] = 0,570\cos(2\tau-0,519).$ 

Überprüfen Sie auch dieses Ergebnis direkt!

#### Sonderfälle

Wie gehen wir vor, wenn bei Eingangsfunktionen des Typs (2.27) eine der Konstanten  $a_i$  mit einem Pol der Übertragungsfunktion zusammenfällt? Offensichtlich versagt dann die Vorschrift (2.28) zur Berechnung von  $y_p$ .

Angenommen,  $p_i$  ist ein einfacher Pol. Dann lässt sich eine Eingangsfunktion  $k \exp(p_i \tau)$  auch als

$$u(\tau) = k e^{p_i \tau} = k \frac{d}{ds} [(s - p_i) e^{s\tau}]_{s=p_i}$$
 (2.29)

darstellen. Bei der Anwendung dieser linearen Operation nach dem Schema (2.26),

$$y_{p}(\tau) = k \frac{d}{ds} [(s - p_{i})G(s) e^{s\tau}]_{s=p_{i}},$$
 (2.30)

kürzt sich der die Probleme verursachende Faktor  $(s-p_i)$  im Nenner von G(s) heraus und damit wird die Auswertung an der Stelle  $s=p_i$  möglich. Bei mehrfachen, sagen wir, r-fachen Polen brauchen Sie lediglich an Stelle von  $(s-p_i)$  den Faktor  $(s-p_i)^r/r!$  zusammen mit der r-ten Ableitung nach s vorzusehen. Diese Methode können Sie generell immer dann anwenden, wenn der lineare Operator an einem Pol der Übertragungsfunktion auszuwerten ist.

Dazu ein Beispiel: Es ist eine partikuläre Lösung für

$$y'' + 6y' + 5y = 2e^{-\tau}, \quad G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}$$

zu finden. Dies entspricht dem eben behandelten Fall mit einem einfachen Pol $p_1=-1.\ {\rm Gl.}(2.30)$  liefert sofort

$$y_{\rm p}(\tau) = 2\frac{\rm d}{{\rm d}s} \left[ \frac{(s+1)\,{\rm e}^{s\tau}}{(s+1)(s+5)} \right]_{s=-1} = \frac{\rm d}{{\rm d}s} \left[ \frac{2\,{\rm e}^{s\tau}}{s+5} \right]_{s=-1} = \frac{4\tau-1}{8}\,{\rm e}^{-\tau}.$$

Ein weiteres Beispiel: Das System

$$y'' + y = u$$
,  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ 

besitzt die Pole  $p_1 = j$  und  $p_2 = -j$ . Zu der Eingangsfunktion

$$u(\tau) = \cos(\tau) = \operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{s\tau}\left|_{s=\mathrm{j}}\right.\right] = \operatorname{Re}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\left(s-\mathrm{j}\right)\mathrm{e}^{s\tau}\right]_{s=\mathrm{j}}\right\}$$

gehört daher die partikuläre Lösung

$$\begin{split} y_{\mathbf{p}}(\tau) &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[ (s - \mathbf{j}) G(s) \, \mathrm{e}^{s\tau} \right]_{s = \mathbf{j}} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[ \frac{\mathrm{e}^{s\tau}}{s + \mathbf{j}} \right]_{s = \mathbf{j}} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left[ \cos(\tau) + 2\tau \sin(\tau) \right]. \end{split}$$

Hier liegt der Resonanzfall in einem ungedämpften, schwingungsfähigen System vor.

### 2.5 Die vollständige Lösung

Nachdem wir die allgemeine Lösung  $y_h$  des homogenen Teils und eine partikuläre Lösung  $y_p$  für unsere Gleichung (2.1) gefunden haben, kann die vollständige Lösung in ihrer allgemeinen Form als

$$y(\tau) = y_h(\tau) + y_p(\tau) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{p_i \tau} + y_p(\tau)$$
 (2.31)

geschrieben werden, einfache Pole vorausgesetzt. Bei mehrfachen Polen ist die Summe entsprechend zu modifizieren. Es verbleibt nun die Aufgabe, die Werte der n freien Konstanten  $c_1, c_2, \ldots, c_n$  zu bestimmen.

#### Anfangsbedingungen

Einer analogen Situation sind wir bereits in Kapitel 1 begegnet: Um die vollständige Antwort eines Systems zu bestimmen, muss der Systemzustand zum Anfangszeitpunkt  $\tau_0$  bekannt sein. Die gleiche Information steckt im Wert  $y(\tau_0^+)$  der Ausgangsgröße zusammen mit den n-1 Werten  $y'(\tau_0^+), y''(\tau_0^+), \dots, y^{(n-1)}(\tau_0^+)$  der Zeitableitungen außteigender Ordnung. Wenn wir unsere allgemeine Lösung zwingen, diese als bekannt vorausgesetzten Werte anzunehmen (Anfangsbedingungen, etwas allgemeiner: Randbedingungen), ergibt sich ein System von n linearen Gleichungen zur Bestimmung der n Unbekannten  $c_i$ .

Dass wir hier  $\tau_0^+$  anstelle von  $\tau_0$  schreiben, hat folgende Bedeutung: Die Anpassung an die Anfangsbedingungen wird bei diesem Lösungsverfahren immer nach einer eventuell bei  $\tau_0$  auftretenden Unstetigkeit der Eingangsgröße (z.B. Sprung oder Stoß) vorgenommen. Dies ist wichtig, weil solche Unstetigkeiten zwischen  $\tau_0^-$  und  $\tau_0^+$  häufig auf die Ausgangsgröße oder ihre Ableitungen durchschlagen. Wir werden diesen Punkt später nochmals aufgreifen. Hier setzen wir voraus, dass die Anfangsbedingungen bei  $\tau_0^+$  bekannt sind.

Beginnen wir mit dem einfachen Beispiel

$$y' + 5y = u$$
,  $u(\tau) = 2e^{-3\tau}$ ,  $\tau_0 = 0, 1$ ;  $y(0, 1+) = 4$ .

Es ist die vollständige Lösung für  $\tau > \tau_0$  zu bestimmen. Wegen G(s) = 1/(s+5) folgt für die homogene und für die partikuläre Lösung

$$y_h(\tau) = c_1 e^{-5\tau}, \quad y_p(\tau) = 2G(-3) e^{-3\tau} = e^{-3\tau}.$$

Die vollständige Lösung muss für  $\tau_0 = 0, 1$  den Wert 4 annehmen,

$$y(0,1) = c_1 e^{-0.5} + e^{-0.3} = 0,607c_1 + 0,741 = 4 \implies c_1 = 5,373.$$

Damit ist die eindeutige, vollständige Lösung

$$y(\tau) = 5,373 e^{-5\tau} + e^{-3\tau}, \quad \tau > \tau_0 = 0,1.$$

Sie erfüllt sowohl die Differentialgleichung mit der gegebenen Eingangsfunktion wie auch die vorgeschriebene Anfangsbedingung. Beachten Sie: Die partikuläre Lösung allein erfüllt natürlich auch die Differentialgleichung mit der gegebenen Eingangsfunktion, i.A. aber nicht die Anfangsbedingungen.

In einem System zweiter Ordnung haben wir zwei freie Konstanten zu bestimmen, und dazu müssen entweder die Werte der Ausgangsgröße zu zwei Zeitpunkten oder, wie wir hier annehmen, der Wert der Ausgangsgröße und der Wert ihrer ersten Ableitung zu einem Zeitpunkt bekannt sein. Sie sehen das im nächsten Beispiel:

$$y'' + y' + y = u' + 2u$$
,  $u(\tau) = 3 + 5\tau$ ,  $y(\pi/4+) = 0$ ,  $y'(\pi/4+) = 2$ .

Mit der Übertragungsfunktion des Systems

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1} = \frac{s+2}{(s+1/2-j\sqrt{3}/2)(s+1/2+j\sqrt{3}/2)}$$

finden wir die beiden Lösungskomponenten<sup>1</sup>

$$y_h(\tau) = c_1 e^{-\tau/2} \cos(\tau \sqrt{3}/2) + c_2 e^{-\tau/2} \sin(\tau \sqrt{3}/2),$$
  
 $y_p(\tau) = 3G(0) + 5[(1-2) + 2\tau] = 1 + 10\tau,$ 

und haben daher die allgemeine Lösung und ihre Zeitableitung,

$$y(\tau) = c_1 e^{-\tau/2} \cos(\tau \sqrt{3}/2) + c_2 e^{-\tau/2} \sin(\tau \sqrt{3}/2) + 1 + 10\tau,$$

$$y'(\tau) = -\frac{1}{2} \left[ c_1 e^{-\tau/2} \cos(\tau \sqrt{3}/2) + c_2 e^{-\tau/2} \sin(\tau \sqrt{3}/2) \right]$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ c_2 e^{-\tau/2} \cos(\tau \sqrt{3}/2) - c_1 e^{-\tau/2} \sin(\tau \sqrt{3}/2) \right] + 10$$
(2.32)

an die Anfangsbedingungen anzupassen:

$$y(\pi/4) = 0,525c_1 + 0,425c_2 + 8,854 = 0,$$
  
 $y'(\pi/4) = -0,630c_1 + 0,242c_2 + 10 = 2.$ 

Dies sind zwei lineare algebraische Gleichungen für  $c_1$  und  $c_2$  mit der Lösung

$$c_1 = 3,171; \quad c_2 = -24,769.$$

Die vollständige Lösung folgt durch Einsetzen dieser Konstanten in Gl.(2.32). Ein drittes Beispiel soll die Systematik unterstreichen:

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 2u' + 8u, \quad u(\tau) = 3e^{-4\tau}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0+) = 1;$$
  $y'(0+) = -2;$   $y''(0+) = 3$ 

und der Übertragungsfunktion des Systems

$$G(s) = \frac{2(s+4)}{s^3 + 2s^2 - s - 2} = \frac{2(s+4)}{(s+1)(s-1)(s+2)} .$$

Wegen des Pols  $p_2=1$  in der rechten Halbebene ist das System <br/> instabil. Die allgemeine Lösung besitzt die Form

$$y(\tau) = c_1 e^{-\tau} + c_2 e^{\tau} + c_3 e^{-2\tau} + 3G(-4) e^{-4\tau},$$
 (2.33)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Sie können die partikuläre Lösung natürlich auch etwas direkter über einen Ansatz  $y_p(\tau) = a + b\tau$  finden.

wobei aber der letzte Term wegen G(-4) = 0 identisch verschwindet. Anpassen an die Anfangsbedingungen führt auf das lineare algebraische Gleichungssystem

$$y(0) = c_1 + c_2 + c_3 = 1, y'(0) = -c_1 + c_2 - 2c_3 = -2, y''(0) = c_1 + c_2 + 4c_3 = 3,$$
 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, (2.34)$$

das wir für die Bestimmung der drei Konstanten lösen müssen.

#### Das Lösen linearer algebraischer Gleichungssysteme

Bei dieser Gelegenheit möchte ich einige Ergebnisse über das Lösen linearer algebraischer Gleichungssysteme zusammenfassen. Wie in Gl.(2.34) werden wir häufig vor der Aufgabe stehen, aus einem linearen Gleichungssystem der Form

$$\underline{M} \underline{x} = \underline{d} \tag{2.35}$$

mit der  $n \times n$  - Koeffizientenmatrix  $\underline{M}$  und der  $n \times 1$  - Datenmatrix  $\underline{d}$  der "rechten Seite" die Elemente der  $n \times 1$  - Lösungsmatrix  $\underline{x}$  zu ermitteln. Es gibt viele Verfahren zur Lösung dieses Problems. Ich werde hier eine klassische Methode verwenden, die sich für Handrechnungen eignet, die aber in ihren Varianten auch die Grundlage einer Reihe von Algorithmen für die Behandlung großer Systeme bildet.

Die Lösungsstrategie ist einfach: Wir hängen zuerst die Datenmatrix an die Koeffizientenmatrix, bilden also die  $n \times (n+1)$  - Matrix  $[\underline{M},\underline{d}]$ . An dieser erweiterten Matrix werden dann systematisch elementare Zeilenoperationen durchgeführt mit dem Ziel, daraus die Form  $[\underline{E},\underline{d'}]$  mit der Einsmatrix  $\underline{E}$  (Diagonalmatrix mit lauter Einsern in der Hauptdiagonale) herzustellen. Die Lösungsmatrix ist dann  $\underline{x} = \underline{d'}$ . Elementare Zeilenoperationen sind:

- Die Vertauschung von irgend zwei Zeilen.
- Die Multiplikation irgend einer Zeile mit einer Konstanten ungleich Null.
- Die Addition des Vielfachen (ungleich Null) irgend einer Zeile zu irgend einer anderen Zeile.

Zur Illustration bearbeiten wir das System (2.34). Wir bilden die erweiterte Matrix und – in einem ersten Schritt – addieren die erste Zeile zur zweiten und subtrahieren die erste Zeile von der dritten. In einem zweiten Schritt wird die zweite Zeile durch 2 und die dritte Zeile durch 3 dividiert:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right]$$

( $\sim$  bedeutet "äquivalent"). Sie ersehen daraus eine i.A. vorteilhafte Strategie: Durch elementare Zeilenoperationen den  $\underline{M}$  - Teil der erweiterten Matrix in eine obere Dreieckform bringen (alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen gleich Null) und in der Hauptdiagonalen Einsern herstellen. Nach dem klassischen Eliminationsverfahren von Gauß könnte man das System jetzt durch Rückeinsetzen von unten her aufrollen. Für andere, später folgende Anwendungen ist es aber

günstiger, die elementaren Zeilenoperationen fortzusetzen, bis anstelle des  $\underline{M}$ -Teils tatsächlich die Einsmatrix steht: Addieren von 1/2- mal die dritte Zeile zur zweiten Zeile und Subtrahieren der dritten Zeile von der ersten; Subtrahieren der zweiten Zeile von der ersten

$$\sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1/2 \\ -1/6 \\ 2/3 \end{array}\right].$$

Dies sind die gesuchten Konstanten, und wir können damit die Lösung (2.33) vervollständigen,

 $y(\tau) = \frac{1}{2} e^{-\tau} - \frac{1}{6} e^{\tau} + \frac{2}{3} e^{-2\tau}.$ 

In welcher Reihenfolge Sie die einzelnen Schritte ausführen, ist belanglos – überhaupt ist die ganze Prozedur nicht eindeutig vorgegeben. Aber: Das Ergebnis ist eindeutig und hängt nicht von der Art und der Reihenfolge der ausgeführten elementaren Zeilenoperationen ab.

Sehen wir uns noch an, warum dieses Verfahren überhaupt funktioniert: Grundsätzlich ist das Ausführen elementarer Zeilenoperationen oder einer Kombination solcher Operationen an der erweiterten Matrix  $[\underline{M},\underline{d}]$  gleichbedeutend mit der Multiplikation von links der beiden Seiten der Gleichung (2.35) durch eine reguläre Matrix  $\underline{N}$ ,

$$\underline{N}\underline{M}\underline{x} = \underline{N}\underline{d}. \tag{2.36}$$

Wegen der Regularität von  $\underline{N}$  haben die Gln.(2.35) und (2.36) die selbe Lösung. Wird  $\underline{N}$  im Speziellen so komponiert, dass  $\underline{N} \, \underline{M} = \underline{E} \, (\underline{E} \,$  ist die Einsmatrix), dann ist mit  $\underline{N} \, \underline{M} \, \underline{x} = \underline{E} \, \underline{x} = \underline{N} \, \underline{d}$  natürlich  $\underline{x} = \underline{N} \, \underline{d}$  die Lösung. Es bleibt noch zu veranschaulichen, dass jede der angeführten elementaren Zeilenoperationen tatsächlich der Multiplikation von links mit einer regulären Matrix  $\underline{N}$  entspricht. Wir betrachten dazu das lineare algebraische System

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}. \tag{2.37}$$

Bilden der erweiterten Matrix und Multiplikation von links wie angegeben,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix},$$

vertauscht die beiden ersten Zeilen. Weiters,

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix},$$

multipliziert die erste Zeile mit 1/2. Schließlich,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$

subtrahiert das Dreifache der ersten Zeile von der dritten. Das Ergebnis ist natürlich direkt aus Gl.(2.37) abzulesen. Aus diesem Beispiel wird deutlich: Die Kombination der angeführten elementaren Zeilenoperationen ist als Matrix das Produkt der einzelnen Matrizen,

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}.$$
(2.38)

Dass damit  $\underline{N}\underline{M} = \underline{E}$  gilt und  $\underline{N}\underline{d}$  wieder die Lösung darstellt, können Sie selbst leicht überprüfen. Bei der Anwendung des Verfahrens brauchen Sie die Einzelmatrizen und auch deren Kombination  $\underline{N}$  nicht zu berechnen, weil die Zeilenoperationen direkt ausgeführt werden.

Die selbe Prozedur ist übrigens auch für die Berechnung der Inversen einer Matrix  $\underline{M}$  brauchbar.  $\underline{M}$  wird dazu mit der Einsmatrix  $\underline{E}$  zur  $n \times 2n$  - Matrix  $[\underline{M},\underline{E}]$  erweitert und diese durch elementare Zeilenoperationen in die Form  $[\underline{E},\underline{N}]$  gebracht. Dann gilt  $\underline{M}^{-1}=\underline{N}$ . Ausgehend von der Koeffizientenmatrix aus Gl.(2.37) erhalten wir z.B.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/2 & 1 \end{bmatrix}, \ \underline{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{bmatrix},$$

was mit dem Ergebnis (2.38) übereinstimmt.

Dieses einfache Beispiel führt uns zu einem wichtigen Thema. Es zeigt, warum es rechentechnisch in der Regel viel einfacher ist, die Lösung von  $\underline{M} \, \underline{x} = \underline{d}$  über elementare Zeilenoperationen an  $[\underline{M},\underline{d}]$  zu berechnen, als erst die Inversion  $\underline{M}^{-1}$  auszuführen und dann  $\underline{x} = \underline{M}^{-1}\underline{d}$  zu bilden: Die Inversion erfordert Zeilenoperationen an einer  $n \times 2n$  - Matrix  $[\underline{M},\underline{E}]$  statt an einer  $n \times (n+1)$  - Matrix  $[\underline{M},\underline{d}]$ . Trotzdem gehört dieses Inversionsverfahren (oder Abwandlungen davon) zu den leistungsfähigsten. Rechentechnisch besonders ungünstig für Matrizen größer  $3 \times 3$  ist die Cramer-Regel: Zur Inversion einer  $10 \times 10$  - Matrix nach der Cramer-Regel müssen etwa 36 Millionen Multiplikationen und eine ähnlich große Anzahl von Additionen ausgeführt werden! Die selbe Aufgabe mit elementaren Zeilenoperationen gelöst benötigt etwa 1925 Multiplikationen und 1770 Additionen. Um  $\underline{M} \, \underline{x} = \underline{d}$  mit einer  $10 \times 10$  - Matrix  $\underline{M}$  nach dem hier beschriebenen Verfahren nach  $\underline{x}$  aufzulösen, sind ungefähr 600 Multiplikationen und etwa die gleiche Anzahl von Additionen erforderlich.

# Der Unterschied zwischen $\tau_0^+$ und $\tau_0^-$

Wir haben bisher sorgfältig darauf geachtet, die Anfangsbedingungen für Zeitpunkte nach einer eventuellen Unstetigkeit der Eingangsfunktion zu spezifizieren und dies durch die Schreibweise  $\tau_0^+$  ausgedrückt. Solch eine Unstetigkeit kann beispielsweise durch einen Heaviside-Sprung zur Zeit  $\tau_0$  am Eingang,

$$u(\tau) = \varepsilon(\tau - \tau_0) = \begin{cases} 0 & \tau < \tau_0 ,\\ & \text{für} \\ 1 & \tau > \tau_0 , \end{cases}$$
 (2.39)

oder Ähnliches zustande kommen. Die Ausgangsfunktion und ihre Ableitungen (im verallgemeinerten Sinn) zeigen dann i.A. bei  $\tau_0$  ebenfalls unstetiges Verhalten.

Angenommen, eine Funktion x besitzt an der Stelle  $\tau_0$  eine Sprungunstetigkeit endlicher Größe, die wir unter Verwendung des Sprungsymbols  $\llbracket \cdot \rrbracket$ 

$$[x] = x(\tau_0^+) - x(\tau_0^-) = \lim_{\eta \to 0} [x(\tau_0 + \eta) - x(\tau_0 - \eta)], \quad \eta > 0$$
 (2.40)

quantifizieren. Ist x stetig differenzierbar, ausgenommen natürlich in  $\tau_0$ , dann lässt sich die Ableitung von x im verallgemeinerten Sinn der Distributionen als

$$x' = \{x'\} + \llbracket x \rrbracket \varepsilon' \tag{2.41}$$

erklären, wobei  $\{x'\}$  die Ableitung von x im gewöhnlichen Sinn für  $\tau \neq \tau_0$  bedeutet und  $\varepsilon'$  die Ableitung des Heaviside-Sprungs  $\varepsilon(\tau - \tau_0)$  in  $\tau_0$  angibt, die wir im Zusammenhang mit Gl.(1.19) bereits als Dirac-Stoß  $\delta(\tau - \tau_0)$  in  $\tau_0$  identifiziert haben (Für den Heaviside-Sprung  $x = \varepsilon$  selbst ist  $\{\varepsilon'\} = 0$  und  $[\![\varepsilon]\!] = 1$ ). Auch höhere Ableitungen von x lassen sich auf diese Weise erklären,

$$x^{(k)} = \left\{ x^{(k)} \right\} + [x] \varepsilon^{(k)} + [x^{(1)}] \varepsilon^{(k-1)} + \dots + [x^{(k-1)}] \varepsilon^{(1)}, \tag{2.42}$$

vorausgesetzt, die Sprünge existieren.

Im Gegensatz zu unserer bisherigen Annahme sind in der Regel die Anfangsbedingungen *vor* einem eventuellen Sprung oder Stoß der Eingangsgröße bekannt. Für unser Lösungsverfahren brauchen wir aber die Anfangsbedingungen *nach* der Unstetigkeit, wir müssen also die Sprünge der Ausgangsgröße und ihrer Ableitungen berechnen. Wie man dabei vorgehen kann, soll die Behandlung des Systems

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b_1 u' + b_0 u (2.43)$$

mit zwei Polen (System zweiter Ordnung) und einer Nullstelle der Übertragungsfunktion zeigen. u besitze bei  $\tau_0$  eine Sprungunstetigkeit, die wir dann i.A. auch für y oder dessen Ableitungen erwarten müssen. Bekannt seien die Anfangswerte  $y(\tau_0^-)$  und  $y'(\tau_0^-)$ , bestimmt werden sollen  $y(\tau_0^+)$  und  $y'(\tau_0^+)$ . Einsetzen der Darstellungen (2.42) in Gl.(2.43) liefert

$$\{y'' + a_1y' + a_0y - b_1u' - b_0u\} + \|y\|\varepsilon'' + (\|y'\| + a_1\|y\| - b_1\|u\|)\varepsilon' = 0.$$

Die Erfüllung dieser Gleichung im verallgemeinerten Sinn der Distributionen erfordert, dass die zusammengefassten Terme unterschiedlicher Ordnung der Unstetigkeiten (unterschiedlicher Ableitungen von  $\varepsilon$ ) jeweils für sich verschwinden müssen, neben der Gleichung (2.43) für  $\tau \neq \tau_0$  also auch die Beziehungen

$$[\![y]\!] = 0, \quad [\![y']\!] + a_1[\![y]\!] - b_1[\![u]\!] = 0$$

bestehen müssen. Daraus folgen die gesuchten Anfangsbedingungen in  $\tau_0^+$  zu

$$y(\tau_0^+) = y(\tau_0^-), \quad y'(\tau_0^+) = y'(\tau_0^-) + b_1[u(\tau_0^+) - u(\tau_0^-)].$$

Sie sehen: y ist diesem Fall zwar stetig, aber die erste Ableitung y' springt für  $b_1 \neq 0$  zusammen mit u.

Als konkrete Beispiele untersuchen wir die drei Systeme zweiter Ordnung

(i) 
$$y'' + 7y' + 10y = u$$
,

(ii) 
$$y'' + 7y' + 10y = u' + 3u$$
,

(iii) 
$$y'' + 7y' + 10y = u'' + 2u' - 3u$$

mit jeweils gleichem Eingang

$$u(\tau) = 2\cos(4\tau)\varepsilon(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau < 0, \\ & \text{für} \\ 2\cos(4\tau) & \tau > 0 \end{cases}$$
 (2.44)

und jeweils gleichen, linksseitigen Anfangsbedingungen

$$y(0-) = 0, \quad y'(0-) = 0.$$
 (2.45)

Die Systeme befinden sich also anfänglich im Nullzustand, und es wird ab  $\tau = 0$  an ihre Eingänge sprungartig das Signal  $2\cos(4\tau)$  gelegt.

In allen drei Fällen ist das charakteristische Polynom

$$P(s) = s^2 + 7s + 10 = (s+2)(s+5)$$

und damit die allgemeine Form der homogenen Lösung

$$y_h(\tau) = c_1 e^{-2\tau} + c_2 e^{-5\tau}$$
.

Wegen der unterschiedlichen rechten Seiten haben wir aber unterschiedliche Übertragungsfunktionen und damit unterschiedliche partikuläre Lösungen

$$y_{\mathbf{p}}(\tau) = \operatorname{Re}\left[G(4\mathbf{j})2e^{\mathbf{j}4\tau}\right],$$

nämlich

(i) 
$$y_p(\tau) = \text{Re}\left\{\frac{1}{(4j)^2 + 28j + 10} 2\left[\cos(4\tau) + j\sin(4\tau)\right]\right\} = -\frac{3}{205}\cos(4\tau) + \frac{14}{205}\sin(4\tau),$$

(ii) 
$$y_p(\tau) = \text{Re}\left\{\frac{4j+3}{(4j)^2+28j+10} 2\left[\cos(4\tau) + j\sin(4\tau)\right]\right\} = \frac{47}{205}\cos(4\tau) + \frac{54}{205}\sin(4\tau),$$

(iii) 
$$y_p(\tau) = \text{Re}\left\{\frac{(4j)^2 + 8j - 3}{(4j)^2 + 28j + 10} 2\left[\cos(4\tau) + j\sin(4\tau)\right]\right\} = \frac{169}{205}\cos(4\tau) - \frac{242}{205}\sin(4\tau).$$

Die vollständigen Lösungen sind als Summen der homogenen und der partikulären Teile zu bilden, und dann sind die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  zu bestimmen. Dazu müssen wir y(0+) und y'(0+) aus y(0-)=0 und y'(0-)=0 (Gl.(2.45) finden, wobei  $\llbracket u \rrbracket = 2$  und  $\llbracket u' \rrbracket = 0$  gilt (Gl.(2.44)). Die angegebene Prozedur liefert für die drei Fälle

- (i)  $[\![y]\!] = 0$ ,  $[\![y']\!] + 7[\![y]\!] = 0$ , d.h. y(0+) = 0, y'(0+) = 0. Die Funktion y und ihre Ableitung sind demnach stetig.
- (ii)  $[\![y]\!] = 0$ ,  $[\![y']\!] + 7[\![y]\!] = [\![u]\!]$ , d.h. y(0+) = 0, y'(0+) = 2. Die Funktion y ist auch hier stetig, aber ihre Ableitung weist zusammen mit u einen Sprung auf.
- (iii) [y] = [u], [y'] + 7[y] = [u'] + 2[u], d.h. y(0+) = 2, y'(0+) = -10.Sowohl y wie auch ihre Ableitung springen jetzt zusammen mit u.

Mit den Anfangswerten für 0+ können nun die Lösungen vervollständigt werden, die in allen drei Fällen die Form

$$y(\tau) = c_1 e^{-2\tau} + c_2 e^{-5\tau} + a\cos(4\tau) + b\sin(4\tau)$$

mit unterschiedlichen Konstanten  $c_1, c_2, a, b$  besitzen. Wir erhalten je zwei Gleichungen

$$y(0+) = c_1 + c_2 + a,$$
  
 $y'(0+) = -2c_1 - 5c_2 + 4b,$ 

im Speziellen

(i) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/205 \\ -56/205 \end{bmatrix},$$

(ii) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47/205 \\ 194/205 \end{bmatrix},$$

(iii) 
$$\left[ \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -2 & -5 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 241/205 \\ -1082/205 \end{array} \right],$$

und mit deren Lösungen schließlich

(i) 
$$y(\tau) = -0.0667 \,\mathrm{e}^{-2\tau} + 0.0813 \,\mathrm{e}^{-5\tau} - 0.0146 \cos(4\tau) + 0.0683 \sin(4\tau)$$
,

(ii) 
$$y(\tau) = -0.0667 \,\mathrm{e}^{-2\tau} - 0.1626 \,\mathrm{e}^{-5\tau} + 0.2293 \cos(4\tau) + 0.2634 \sin(4\tau)$$

(iii) 
$$y(\tau) = 0,2000 \,\mathrm{e}^{-2\tau} + 0,9756 \,\mathrm{e}^{-5\tau} + 0,8244 \cos(4\tau) - 1,1805 \sin(4\tau),$$

gültig für  $\tau > 0$ . Überprüfen Sie die Einhaltung der Anfangsbedingungen!

Verallgemeinernd halten wir fest: Angenommen, ein lineares, zeitinvariantes System ohne Totzeiten besitzt m Nullstellen und n Pole, und das Eingangssignal enthalte einen Stoß k-ter Ordnung². Dann gilt für das Ausgangssignal y und seine Ableitungen

y enthält einen Stoß (m-n+k)-ter Ordnung, y' enthält einen Stoß (m-n+k+1)-ter Ordnung, y'' enthält einen Stoß (m-n+k+2)-ter Ordnung,

ISW.

Ein System mit m=n, also mit der gleichen Anzahl von Polen und Nullstellen, liefert zu einem Stoß k-ter Ordnung im Eingangssignal wieder einen Stoß k-ter Ordnung im Ausgangssignal. Systeme dieser Art werden deshalb auch Systeme mit direktem Durchgriff genannt.

# 2.6 Sprungantwort und Stoßantwort

In Kapitel 1 haben wir die Sprungantwort oder Übergangsfunktion h als ein Objekt zur anschaulichen Charakterisierung des Verhaltens linearer, zeitinvarianter Systeme kennengelernt. Wir werden dafür jetzt die Beziehung zu den Differentialgleichungsmodellen herstellen, und zwar für Systeme erster und zweiter Ordnung.

 $<sup>^2</sup>$ entsprechend der k-ten verallgemeinerten Ableitung des Heaviside-Sprungs (s.Gl.(1.20) und den nachfolgenden Text). Ein Stoß 0-ter Ordnung ist der Heaviside-Sprung selbst. Ein Stoß -1-ter Ordnung ist das Integral des Heaviside-Sprungs, also die Rampenfunktion, usw.

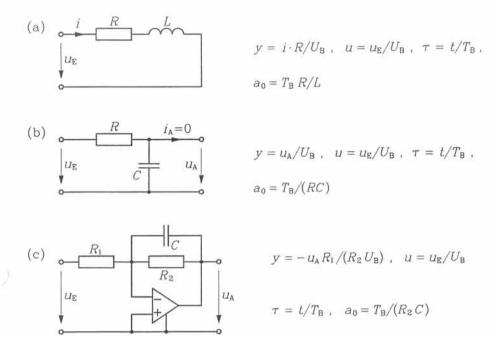


Abb. 2.2 Einfache elektrische Realisierungsbeispiele für ein System mit der Differentialgleichung (2.46)<sub>1</sub>.  $T_{\rm B}$  ist eine Bezugsdauer,  $U_{\rm B}$  eine Bezugsspannung. (a) Eingangsgröße ist die Eingangsspannung  $u_{\rm E}$ , Ausgangsgröße der aufgenommene Strom i. (b) Eingangsgröße und Ausgangsgröße sind die Eingangsspannung bzw. die Spannung am leerlaufenden Ausgang. (c) Rückwirkungsfreie Realisierung mit idealem Operationsverstärker: Der Ausgang kann frei beschaltet werden. Zur Ermittlung der Sprungantwort wird an den Eingang die Spannung  $u_{\rm E} = U_{\rm B} \varepsilon(\tau)$  gelegt.

#### System erster Ordnung ohne Nullstelle

Wir betrachten zuerst ein System erster Ordnung (die Übertragungsfunktion besitzt genau einen Pol) ohne Nullstelle, dargestellt durch die Differentialgleichung und die zugehörige Übertragungsfunktion

$$y' + a_0 y = a_0 u, \quad G(s) = \frac{a_0}{s + a_0}.$$
 (2.46)

Die Koeffizientengleichheit  $b_0=a_0$  lässt sich durch passende Wahl der Bezugswerte immer erreichen. Einfache Realisierungen solch eines Systems durch elektrische Schaltungen mit idealen Stromkreiselementen sehen Sie in Abb.2.2. Für einen Heaviside-Sprung am Eingang,  $u(\tau)=\varepsilon(\tau)$ , erhalten wir die partikuläre Lösung  $y_{\rm p}(\tau)=G(0)=1$ , und damit wegen des einzigen Pols  $p_1=-a_0$  die allgemeine Lösung  $y(\tau)=c_1\exp(-a_0\tau)+1$ . Da die Übertragungsfunktion keine Nullstelle besitzt, gilt  $[\![y]\!]=0$ , d.h. y(0+)=y(0-)=0, und die Sprungantwort  $y(\tau)=h(\tau)$  ist schließlich

$$h(\tau) = \left[1 - e^{-a_0 \tau}\right] \varepsilon(\tau). \tag{2.47}$$

Zugehörige Verläufe sehen Sie in Abb.2.3. Beachten Sie: Je weiter der Pol in der linken Halbebene liegt (je größer  $a_0 > 0$  ist), desto rascher reagiert das System,

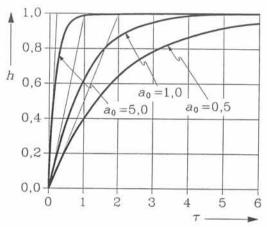


Abb. 2.3 Sprungantworten (Übergangsfunktionen) Gl.(2.47) für Systeme, beschrieben durch Gl.(2.46), mit unterschiedlichen Werten  $a_0$ .

desto schneller wird der stationäre Endzustand erreicht. Liegt der Pol dagegen in der rechten Halbebene ( $a_0 < 0$ ), wird kein Endzustand angestrebt: Das System ist instabil. Die in Abb.2.2 angegebenen Systeme sind alle stabil.

#### System erster Ordnung mit Nullstelle

Besitzt die Übertragungsfunktion des System erster Ordnung eine Nullstelle, so ändert sich zwar der Charakter der allgemeinen Lösung für Sprungeingänge nicht, die Anfangsbedingungen sind aber andere. Nehmen wir z.B.

$$y' + y = -u'/q_1 + u$$
,  $G(s) = -\frac{s - q_1}{q_1(s+1)}$ , (2.48)

realisierbar etwa durch die Schaltungen in Abb.2.4. Die partikuläre Lösung für einen Heaviside-Sprung am Eingang,  $u(\tau) = \varepsilon(\tau)$ , ergibt sich wie für das System ohne Nullstelle zu  $y_p(\tau) = G(0) = 1$ . Wegen der Nullstelle bei  $q_1$  sind jedoch die Anfangswerte für unstetige Eingänge ebenfalls unstetig, nämlich

$$[y] = -[u]/q_1 = -1/q_1$$
, d.h.  $y(0+) = -1/q_1$ .

Wir erhalten damit die Lösung  $y(\tau) = h(\tau)$  für die Sprungantwort

$$h(\tau) = [1 - (1 + 1/q_1) e^{-\tau}] \varepsilon(\tau),$$
 (2.49)

dargestellt in Abb.2.5 mit unterschiedlichen Lagen der Nullstelle des Systems. In allen Fällen ist das System stabil, gleichgültig, ob die Nullstelle in der linken oder in der rechten Halbebene liegt: Die Stabilität wird allein durch die Lage des Pols bestimmt. Trotzdem hat, wie Sie sehen, die Nullstelle einen starken Einfluss auf die Art der Systemantwort – besonders ausgeprägt, wenn sie relativ nahe der imaginären Achse zu liegen kommt.

Interessant ist Folgendes: Immer, wenn die Nullstelle in der rechten Halbebene liegt  $(q_1 > 0)$ , zeigt das System eine Anfangsreaktion mit dem umgekehrten Vorzeichen des stationären Endwerts. Dieses Verhalten ist typisch für Nicht-Minimalwinkelsysteme – wir kommen in Kapitel 4 darauf zurück<sup>3</sup>.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Vom regelungstechnischen Standpunkt aus gesehen sind Nicht-Minimalwinkelsysteme schwerer zu beherrschen als Minimalwinkelsysteme. Stellen Sie sich z.B. vor, Sie müssten ein Auto lenken, das, wenn Sie das Lenkrad nach rechts drehen, immer zuerst nach links fährt und sich erst allmählich nach rechts wendet.

$$y = i \cdot R_1 / U_B , \quad u = u_E / U_B ,$$

$$\tau = t / (R_2 C) , \quad q_1 = -R_2 / (R_1 + R_2) \le 0$$

$$U_{E} = \begin{bmatrix} R_{1} & C & C \\ I_{A} = 0 & R_{3} \end{bmatrix}$$

$$y = u_A(R_1 + R_2)/(R_2 U_B)$$
,  $u = u_E/U_B$ ,

$$\tau = t/(R_3C)$$
,  $q_1 = R_2/R_1 \ge 0$ 

Abb. 2.4 Beispiele für ein System mit der Differentialgleichung (2.48)<sub>1</sub>.  $U_{\rm B}$  ist eine Bezugsspannung. Zur Ermittlung der Sprungantwort wird an den Eingang die Spannung  $u_{\rm E} = U_{\rm B} \epsilon(\tau)$  gelegt.

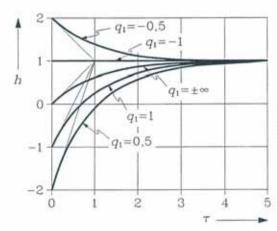


Abb. 2.5 Sprungantworten (Übergangsfunktionen) Gl.(2.49) für Systeme, beschrieben durch Gl.(2.48), mit unterschiedlichen Werten  $q_1$ .

In dem eben behandelten Beispiel gilt m=n, also der Grad m des Zählerpolynoms der Übertragungsfunktion des Systems ist gleich dem Grad n des Nennerpolynoms. Deshalb erscheint eine Sprungunstetigkeit (Stoß 0-ter Ordnung) am Eingang auch am Ausgang als Sprungunstetigkeit. Eine sprungartige Eingangsänderung macht sich sofort am Ausgang bemerkbar, ohne irgendwelche Verzögerungen: Es handelt sich um ein System mit direktem Durchgriff. Übertragungsfunktionen mit  $m \ge n$  werden manchmal unechte Übertragungsfunktionen genannt, solche mit m < n echte Übertragungsfunktionen<sup>4</sup>.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>In diesen Fällen ist die Übertragungsfunktion eine *unecht* gebrochene bzw. eine *echt* gebrochene rationale Funktion.

#### System zweiter Ordnung ohne Nullstelle

Wir untersuchen nun, wie Systeme zweiter Ordnung, zunächst ohne Nullstellen,

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = a_0 u, \quad G(s) = \frac{a_0}{s^2 + a_1 s + a_0}$$
 (2.50)

auf einen Heaviside-Sprung  $u(\tau)=\varepsilon(\tau)$  reagieren. Die angenommene Koeffizientengleichheit  $b_0=a_0$  lässt sich auch hier durch die passende Wahl der Bezugswerte immer herstellen. Unsere partikuläre Lösung ist daher wieder  $y_{\rm p}(\tau)=G(0)=1$ .

Im Fall  $a_0 > 0$  erweist es sich häufig als günstig, die Koeffizienten  $a_0$  und  $a_1$  eines Systems zweiter Ordnung durch die bezogene Kennkreisfrequenz  $\nu_0 > 0$  (bezogene Eigenkreisfrequenz des zugeordneten ungedämpften Systems) und durch den Dämpfungsgrad  $\vartheta$  ( $d = 2\vartheta$  ist der "Verlustfaktor", Q = 1/d der "Gütefaktor") über  $a_0 = \nu_0^2$  bzw.  $a_1 = 2\vartheta\nu_0$  auszudrücken,

$$y'' + 2\vartheta\nu_0 y' + \nu_0^2 y = \nu_0^2 u, \quad G(s) = \frac{\nu_0^2}{s^2 + 2\vartheta\nu_0 s + \nu_0^2}.$$
 (2.51)

In Abb.2.6 sehen Sie Schaltungen für Systeme dieser Art. Die Pole der Übertragungsfunktion liegen bei

$$p_{1,2} = -\vartheta \nu_0 \pm j\sqrt{1 - \vartheta^2} \nu_0.$$
 (2.52)

Für Werte  $0 < \vartheta < 1$  des Dämpfungsgrads sind diese Wurzeln konjugiert komplex, und gleichzeitig ist das System stabil. Wir erhalten dann wegen y(0+) = 0, y'(0+) = 0 (keine Nullstelle) die Sprungantwort

$$h(\tau) = \left\{ 1 - e^{-\vartheta \nu_0 \tau} \left[ \cos(\sqrt{1 - \vartheta^2} \nu_0 \tau) + \frac{\vartheta}{\sqrt{1 - \vartheta^2}} \sin(\sqrt{1 - \vartheta^2} \nu_0 \tau) \right] \right\} \varepsilon(\tau)$$

oder

$$h(\tau) = \left[1 - \frac{e^{-\vartheta\nu_0\tau}}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\cos(\sqrt{1-\vartheta^2}\nu_0\tau + \varphi)\right]\varepsilon(\tau)$$
 (2.53)

mit  $\cos(\varphi) = \sqrt{1-\vartheta^2}$  und  $\sin(\varphi) = -\vartheta$ . Abb.2.7 zeigt einige Verläufe mit unterschiedlichen Dämpfungsgraden. Wie sieht der Verlauf für  $\vartheta = 0$  aus? Ist das System dann stabil?

#### System zweiter Ordnung mit Nullstelle

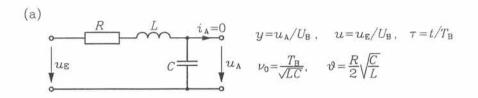
Ähnlich wie für Systeme erster Ordnung werden wir auch hier an einem einfachen Spezialfall (Realisierungsbeispiele in Abb.2.8),

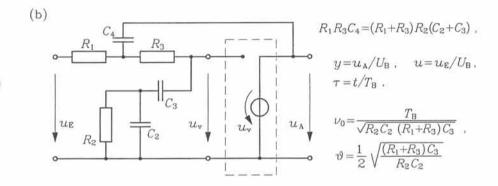
$$y'' + y' + y = -u'/q_1 + u$$
,  $G(s) = -\frac{s - q_1}{q_1(s^2 + s + 1)}$ , (2.54)

untersuchen, welchen Einfluss eine Nullstelle der Übertragungsfunktion auf das Systemverhalten hat.

Eine Partikulärlösung ergibt sich mit  $u(\tau) = \varepsilon(\tau)$  wie für Systeme ohne Nullstelle zu  $y_p(\tau) = G(0) = 1$ . Die Anfangsableitung ist jedoch unstetig,

$$[y] = 0$$
,  $[y'] = -[u]/q_1$ , d.h.  $y(0+) = 0$ ,  $y'(0+) = -1/q_1$ .





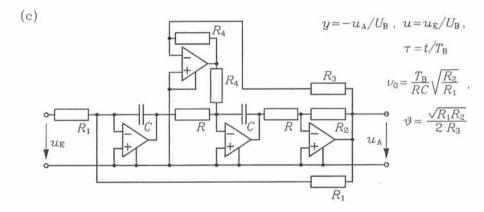


Abb. 2.6 Schaltungsbeispiele für Systeme zweiter Ordnung ohne Nullstelle, beschrieben durch die Differentialgleichung  $(2.51)_1$ . In jedem Fall ist oszillatorisches Übergangsverhalten einstellbar  $0 < \vartheta < 1$ .  $T_{\rm B}$  ist eine Bezugsdauer,  $U_{\rm B}$  eine Bezugsspannung. (a) Realisierung durch RLC-Schaltung mit leerlaufendem Ausgang. (b) Spulenfreie Realisierung mit einem idealen Trennverstärker (Verstärkung = 1, Eingangswiderstand =  $\infty$ , Ausgangswiderstand = 0). Ausgang kann frei beschaltet werden. (c) Spulenfreie Realisierung mit idealen Operationsverstärkern. Ausgang kann frei beschaltet werden. Zur Ermittlung der Sprungantwort wird an den Eingang die Spannung  $u_{\rm E} = U_{\rm B}\varepsilon(\tau)$  gelegt.

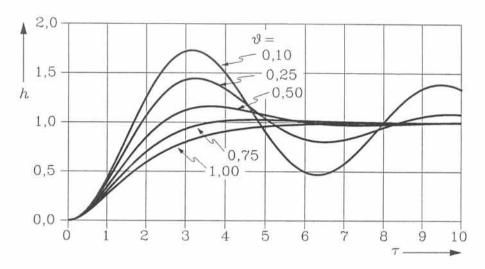


Abb. 2.7 Sprungantworten (Übergangsfunktionen) Gl.(2.53) für Systeme zweiter Ordnung ohne Nullstelle, beschrieben durch Gl.(2.51) mit  $\nu_0=1$ .

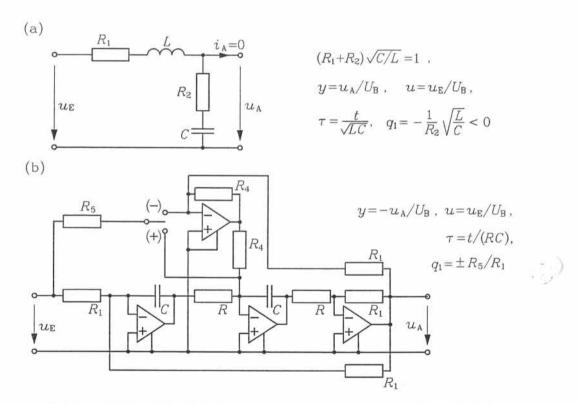


Abb. 2.8 Schaltungsbeispiele für Systeme zweiter Ordnung mit einer Nullstelle, beschrieben durch die Differentialgleichung (2.54)<sub>1</sub>.  $U_{\rm B}$  ist eine Bezugsspannung. (a) Realisierung durch RLC-Schaltung mit leerlaufendem Ausgang. (b) Spulenfreie Realisierung mit idealen Operationsverstärkern (Erweiterung der Schaltung aus Abb.2.6c mit spezieller Parameterwahl). Ausgang kann frei beschaltet werden. Zur Ermittlung der Sprungantwort wird an den Eingang die Spannung  $u_{\rm E} = U_{\rm B}\varepsilon(\tau)$  gelegt.

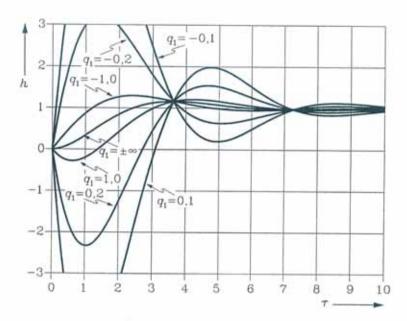


Abb. 2.9 Sprungantworten (Übergangsfunktionen) Gl.(2.55) für Systeme zweiter Ordnung mit einer Nullstelle  $q_1$ , beschrieben durch Gl.(2.54).

Daraus folgt mit den Polen  $p_{1,2} = (-1 \pm j\sqrt{3})/2$  die Sprungantwort

$$h(\tau) = \left\{ 1 - e^{-\tau/2} \left[ \cos(\sqrt{3}\tau/2) + \frac{1}{\sqrt{3}} (1 + \frac{2}{q_1}) \sin(\sqrt{3}\tau/2) \right] \right\} \varepsilon(\tau), \quad (2.55)$$

dargestellt für unterschiedliche Werte von  $q_1$  in Abb.2.9. Da beide Pole in der linken Halbebene liegen, ist das System stabil, unabhängig von der Lage der Nullstelle.

Der Einfluss der Nullstelle zeigt sich, wie bei dem entsprechenden System erster Ordnung, umso stärker ausgeprägt, je näher  $q_1$  zur imaginären Achse rückt. Liegt die Nullstelle in der rechten Halbebene, so stellen wir auch hier das typische Verhalten eines Nicht-Minimalwinkelsystems fest: Die Anfangsreaktion erfolgt mit dem umgekehrten Vorzeichen des Endwerts.

#### Stoßantworten

Die Stoßantwort (Gewichtsfunktion)  $g(\tau)$  ist die Zeitableitung der Sprungantwort (Übergangsfunktion)  $h(\tau)$ . Dies haben wir bereits in Kapitel 1 in Gl.(1.69) formuliert. Eine Methode zur Berechnung der Stoßantwort aus einem Differentialgleichungsmodell besteht also darin, zuerst die Sprungantwort zu bestimmen und dann deren Ableitung zu bilden.

Als Beispiel nehmen wir die Schaltung aus Abb.1.1, für die wir die beschreibende Differentialgleichung (2.4) mit den Koeffizienten (2.5) zu

$$y''' + 0, 4y'' + 1,03y' + 0, 2y = 0, 1u$$
(2.56)

bestimmt haben. Aus der zugehörigen Übertragungsfunktion Gl.(2.13) lässt sich für den Eingang  $u(\tau)=\varepsilon(\tau)$  sofort die partikuläre Lösung  $y_{\rm p}(\tau)=G(0)=0,5$ 

und über die Wurzelstruktur (s. Abb.2.1(a) und Gl.(2.21)) die allgemeine Lösung angeben,

$$y(\tau) = \{c_1 e^{-0.202\tau} + e^{-0.099\tau} [a_2 \cos(0.990\tau) + a_3 \sin(0.990\tau)] + 0.5\} \varepsilon(\tau), (2.57)$$

gültig für alle  $\tau$ . Dass die Ausgangsgröße für  $\tau < 0$  identisch verschwindet, dafür sorgt die Multiplikation mit dem Heaviside-Sprung. Die Übertragungsfunktion besitzt keine Nullstelle, daher ist y zusammen mit seiner ersten und zweiten Ableitung bei endlichen Eingangssprüngen stetig und wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -0,202 & -0,099 & 0,990 \\ 0,041 & -0,970 & -0,196 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

zur Bestimmung der Konstanten. Die Auflösung führt schließlich innerhalb der zu Grunde liegenden numerischen Fehlergrenzen $^5$  auf

$$h(\tau) = \left[0,500\left(1 - e^{-0.202\tau}\right) - 0,102 e^{-0.099\tau} \sin(0,990\tau)\right] \varepsilon(\tau), \tag{2.58}$$

graphisch dargestellt in Abb.1.17. Die Ableitung nach  $\tau$  liefert die Stoßantwort

$$g(\tau) = \{0, 101 e^{-0.202\tau} + e^{-0.099\tau} [-0.101 \cos(0.990\tau) + 0.010 \sin(0.990\tau)]\} \varepsilon(\tau),$$
 (2.59)

entsprechend Gl.(1.64) und Abb.1.16.

Natürlich lässt sich die Sprungantwort auch direkt durch Anpassung der allgemeinen Lösung der Gleichung mit  $u(\tau) = \delta(\tau) = \varepsilon'(\tau)$  gewinnen. Für Systeme mit einer echten Übertragungsfunktion (m < n) können wir dabei das auf der Beziehung (2.42) für die verallgemeinerte Ableitung basierende Schema anwenden. In unserem Beispiel Gl.(2.56) erhalten wir y(0+) = 0, y'(0+) = 0 und y''(0+) = 0, 1 zur Bestimmung der drei Konstanten der allgemeinen Lösung, die sich wegen  $y_p(\tau) = 0$  auf den homogenen Teil reduziert.

Bei der Differentiation der Sprungantwort (2.58) zur Berechnung der Stoßantwort (2.59) ist auch der Heaviside-Sprung  $\varepsilon(\tau)$  abzuleiten. Dies liefert wegen  $\varepsilon'(\tau) = \delta(\tau)$  i.A. einen Term  $\{h(\tau)\} \delta(\tau)$ , der in unserem Fall wegen  $\{h(0)\} = 0$  verschwindet. Die Stoßantwort selbst enthält also keinen Stoß. Dies ist immer dann der Fall, wenn die Übertragungsfunktion eine echt gebrochene rationale Funktion ist (m < n).

Angenommen, wir haben ein System erster Ordnung mit unechter Übertragungsfunktion vorliegen, beispielsweise

$$y' + 2y = 3u' + 12u, \quad G(s) = \frac{3s + 12}{s + 2}.$$
 (2.60)

Die zugehörige Sprungantwort hat die Form

$$h(\tau) = \left[c_1 e^{-2\tau} + G(0)\right] \varepsilon(\tau)$$

mit G(0) = 6, und  $c_1$  ist aus der rechtsseitigen Anfangsbedingungung  $h(0+) = c_1 + 6$  zu bestimmen. Aus Gl.(2.60)<sub>1</sub> lässt sich für endliche Eingangssprünge die Bedingung [y] = 3[u] = 3 ablesen, also y(0+) = h(0+) = 3 und damit  $c_1 = -3$ :

$$h(\tau) = 3\left(2 - e^{-2\tau}\right)\varepsilon(\tau). \tag{2.61}$$

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Die Koeffizienten in der entsprechenden Gl.(1.70) sind etwas genauer berechnet.

Für  $\tau \neq 0$  erhalten wir die Zeitableitung

$$g(\tau) = h'(\tau) = 6 e^{-2\tau} \varepsilon(\tau);$$

dies ist aber nicht die Stoßantwort! Wir müssen auch den Sprung berücksichtigen, also die verallgemeinerte Ableitung gemäß Gl.(2.41) bei  $\tau=0$  mit einbeziehen:

$$g(\tau) = h'(\tau) = \{h'(\tau)\} + \|h\|\varepsilon'(\tau) = 6e^{-2\tau}\varepsilon(\tau) + 3\delta(\tau). \tag{2.62}$$

Wegen des direkten Durchgriffs schlägt der Eingangsstoß  $u(\tau) = \delta(\tau)$ , mit einem Gewichtsfaktor versehen, auf den Ausgang durch. Für Systeme mit m > n wird der Eingangsstoß sogar noch verstärkt: Es treten am Ausgang auch Stöße höherer Ordnung  $\varepsilon'', \varepsilon''', \ldots, \varepsilon^{(m-n+1)}$  (Doppelstoß, Dreifachstoß, usw.) auf.

Abschließend wollen wir uns noch vergewissern, dass die Stoßantwort (2.62) tatsächlich die Sprungantwort (2.61) liefert. Ausgangspunkt dafür ist die Faltungsdarstellung (1.62). Wir erhalten

$$\begin{split} h(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - \tau') \varepsilon(\tau') \mathrm{d}\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 6 \, \mathrm{e}^{-2(\tau - \tau')} \varepsilon(\tau - \tau') + 3 \delta(\tau - \tau') \right] \varepsilon(\tau') \mathrm{d}\tau' \\ &= 6 \, \mathrm{e}^{-2\tau} \int_{0}^{\tau} \mathrm{e}^{2\tau'} \mathrm{d}\tau' + 3 = 3 \left( 2 - \mathrm{e}^{-2\tau} \right) \quad \text{für} \quad \tau > 0 \end{split}$$

und  $h(\tau) = 0$  für  $\tau < 0$ , was mit Gl.(2.61) übereinstimmt.

### 2.7 Zusammenfassung

Der Zusammenhang zwischen dem Eingangssignal und dem Ausgangssignal eines linearen, zeitinvarianten dynamischen Systems mit konzentrierten Parametern und ohne Totzeiten lässt sich als lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten formulieren, wobei i.A. auch die Anfangsbedingungen bekannt sein müssen (Anfangswertproblem). Sie haben gesehen, wie solch eine Gleichung aufzustellen ist und wie man ihre normierte Standardform herstellt. Die vollständige Information über das System steckt dann in zwei Polynomen bzw. in deren Wurzeln, den Nullstellen und den Polen der Übertragungsfunktion. Die Lage der Pole in der komplexen Ebene bestimmt die Stabilität des Systems.

Die traditionelle Lösungsdarstellung für Gleichungen des genannten Typs besteht in der additiven Überlagerung der allgemeinen Lösung der zugeordneten homogenen Gleichung, der homogenen Lösung – sie enthält, entsprechend der Ordnung des Systems, eine gewisse Anzahl freier konstanter Koeffizienten – und irgend einer partikulären Lösung der vollständigen Gleichung mit dem gegebenen Eingangssignal. Für unsere Anwendungen erweist sich ein spezielles Konstruktionsverfahren für partikuläre Lösungen als hilfreich, das von linearen Operationen an natürlichen Exponentialfunktionen ausgeht.

Zur Vervollständigung der Gesamtlösung müssen noch die freien Konstanten bestimmt werden. Dies geschieht i.d.R. durch Anpassen der Lösung an die gegebenen Anfangsbedingungen und erfordert das Lösen eines linearen algebraischen Gleichungssystems. Enthält das Eingangssignal Sprünge oder Stöße, sind die Anfangszustände an den Unstetigkeitsstellen zu übertragen.

Voraussetzung dafür ist die Gültigkeit der System-Differentialgleichung auch für verallgemeinerte Funktionen (Distributionen).

Die explizite Bestimmung der Sprungantworten und, daraus ableitbar, der Stoßantworten einfach zu realisierender Systeme erster und zweiter Ordnung vermittelt einen Einblick in den Zusammenhang zwischen dem Zeitverhalten linearer, zeitinvarianter Systeme und der Lage der Pole und Nullstellen in der komplexen Ebene.

# Kapitel 3

# Fourier-Transformation

Es gibt eine Reihe von Funktionaltransformationen mit nützlichen Anwendungen in der Physik und der Technik. Die wichtigste daraus ist zweifellos die Fourier-Transformation. Wir finden sie beispielsweise in der Optik und in der Quantenphysik, sie ist aber auch grundlegend für die Systemtheorie und damit für die analoge und digitale Signalverarbeitung in der Kommunikationstechnik und in der Automatisierungstechnik. Das Ziel dieses Kapitels ist, Sie mit den unterschiedlichen Formen der Fourier-Transformation und mit den wichtigsten Rechenregeln vertraut zu machen.

#### 3.1 Motivation und Definitionen

Stellen Sie sich ein lineares, zeitinvariantes System mit einer Sinusschwingung als Eingangssignal vor. Ist das System stabil und liegt der Anfangszeitpunkt schon relativ lang zurück, so sind alle Einschwingvorgänge bereits abgeklungen. Am Ausgang stellt sich dann ebenfalls eine Sinusschwingung gleicher Frequenz ein, allerdings mit i.A. geänderter Amplitude und anderem Nullphasenwinkel – eine typische Eigenschaft von LTI-Systemen.

Die rechnerische Behandlung erfolgt nach dem bewährten Vorbild der komplexen Wechselstromrechnung am besten gleich im Komplexen. Zur komplexen Sinusschwingung  $\exp(j\nu\tau)$  mit der bezogenen komplexen Amplitude Eins¹ und der bezogenen Kreisfrequenz  $\nu$  am Eingang gehört dann nach unserem Konstruktionsverfahren für partikuläre Lösungen mit der Übertragungsfunktion G(s) die komplexe Sinusschwingung  $G(j\nu)$  exp $(j\nu\tau)$  am Ausgang, d.h.

$$u(\tau) = e^{j\nu\tau} \longmapsto y(\tau) = G(j\nu) e^{j\nu\tau}$$
 (3.1)

bildet ein Lösungspaar. Der Wert  $G(j\nu)$  ist dann die komplexe Amplitude des Ausgangssignals. Als Funktion der Frequenzvariablen  $\nu$  betrachtet heißt  $G(j\nu)$  der komplexe Frequenzgang und dient zur anschaulichen und überdies vollständigen Charakterisierung des Systems. Wir werden diese Überlegungen im nächsten Kapitel weiter ausbauen.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Die lässt sich durch eine passende Wahl der Bezugswerte und des Zeitnullpunkts immer erreichen.

Es gibt noch eine andere Möglichkeit zur Berechnung der Systemantwort, nämlich über das Faltungsintegral (1.62), das zum Eingang (3.1)<sub>1</sub> bei bekannter Stoßantwort  $g(\tau)$  den Ausdruck

$$y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau') u(\tau - \tau') d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau') e^{j\nu(\tau - \tau')} d\tau'$$

liefert, also

$$u(\tau) = e^{j\nu\tau} \longmapsto y(\tau) = \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau') e^{-j\nu\tau'} d\tau' \right) e^{j\nu\tau}.$$
 (3.2)

Die beiden Darstellungen (3.1) und (3.2) müssen nebeneinander für alle Werte von  $\nu$  und  $\tau$  gelten, und daher besteht zwischen dem komplexen Frequenzgang  $G(j\nu)$  und der Stoßantwort  $g(\tau)$  der Zusammenhang

$$G(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-j\nu\tau} d\tau = \mathcal{F}[g(\tau)]$$
 (3.3)

(die spezielle Kennzeichnung der Integrationsvariablen können wir jetzt weglassen). Eine Integralbeziehung dieser Art heißt Fourier-Transformation, und es gibt dafür auch eine Umkehrung: Die Stoßantwort eines LTI-Systems lässt sich aus dem komplexen Frequenzgang über die inverse Fourier-Transformation berechnen,

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(j\nu) e^{j\nu\tau} d\nu = \mathcal{F}^{-1} [G(j\nu)]. \qquad (3.4)$$

Das Gleichheitszeichen gilt genau genommen nur für stetige Funktionen  $g(\tau)$ . Besitzt  $g(\tau)$  an einer Stelle  $\tau_0$  einen Sprung mit linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert  $g(\tau_0^-)$  bzw.  $g(\tau_0^+)$ , dann liefert die inverse Fourier-Transformation an der Stelle  $\tau_0$  als Funktionswert den arithmetischen Mittelwert  $\left[g(\tau_0^+)+g(\tau_0^-)\right]/2$ . Wir werden dies und auch die Existenz des Umkehrintegrals (3.4) im Abschnitt 3.5 anschaulich begründen.

#### Das Fourier-Transformationspaar

Bei der Fourier-Transformation handelt es sich um einen Vertreter aus der Klasse linearer Integral-Transformationen, und ihre Anwendung geht weit über die Darstellung des Zusammenhangs zwischen der Stoßantwort und dem komplexen Frequenzgang eines linearen, zeitinvarianten Systems hinaus.

Bezeichnet  $x(\tau)$  eine Funktion der reellen Variablen  $\tau$ , definiert für  $-\infty < \tau < \infty$ , so ist das Paar der Fourier-Transformationen allgemein erklärt als

$$\mathcal{F}[x(\tau)] = X(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\nu\tau} d\tau,$$
 (3.5)

$$\mathcal{F}^{-1}[X(j\nu)] = x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu) e^{j\nu\tau} d\nu, \qquad (3.6)$$

sofern die Integrale existieren (wenn nötig, im verallgemeinerten Sinn). In unseren Anwendungen bedeutet  $\tau$  eine Zeitvariable und  $\nu$  eine Frequenzvariable,

	$x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\nu)]$	$X(j\nu) = \mathcal{F}[x(\tau)]$
1	$\delta( au)$	1
2	1	$2\pi\delta(\nu)$
3	$\varepsilon(\tau)$	$\pi\delta(\nu) + \frac{1}{\mathrm{j}\nu}$
4	$\operatorname{rect}(\tau) := \left\{ egin{array}{lll} 1 & , &  \tau  < 1/2 \\ \\ 0 & , &  \tau  > 1/2 \end{array} \right.$	$\operatorname{si}(\nu/2) := \frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2}$
5	$\gamma(\tau) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - k)$	$\Gamma(j\nu) := 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - 2\pi k)$
6	$e^{-a\tau}\varepsilon(\tau), \operatorname{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{\mathrm{j}\nu + a}$
7	$\tau e^{-a\tau} \varepsilon(\tau), \operatorname{Re}(a) > 0$	$\frac{1}{(\mathrm{j}\nu+a)^2}$
8	$\cos(\nu_1 \tau)$	$\pi[\delta(\nu-\nu_1)+\delta(\nu+\nu_1)]$
9	$\sin(\nu_1  au)$	$-j\pi[\delta(\nu-\nu_1)-\delta(\nu+\nu_1)]$
10	$\cos(\nu_1 \tau) \varepsilon(\tau)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\nu - \nu_1) + \delta(\nu + \nu_1)] + \frac{j\nu}{\nu_1^2 - \nu^2}$
11	$\sin(\nu_1 \tau) \varepsilon(\tau)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\nu-\nu_1) - \delta(\nu+\nu_1)] + \frac{\nu_1}{\nu_1^2 - \nu^2}$
12	$e^{-a\tau}\cos(\nu_1\tau)\varepsilon(\tau), \operatorname{Re}(a) > 0$	$\frac{\mathrm{j}\nu + a}{(\mathrm{j}\nu + a)^2 + \nu_1^2}$
13	$e^{-a\tau}\sin(\nu_1\tau)\varepsilon(\tau)$ , $Re(a) > 0$	$\frac{\nu_1}{(j\nu + a)^2 + \nu_1^2}$

Tab. 3.1 Einige Fourier-Paare. Ihr Zusammenhang ist durch das Transformationspaar Gln. (3.5), (3.6) erklärt.

meist in bezogener Form, d.h.  $\tau=t/T_{\rm B}$  und  $\nu=\omega/\omega_{\rm B}=f/f_{\rm B}$  mit der Bezugsfrequenz  $f_{\rm B}$  und der zugehörigen Bezugskreisfrequenz  $\omega_{\rm B}=2\pi f_{\rm B}$ . Beachten Sie: Die Bezugswerte  $\omega_{\rm B}$  und  $T_{\rm B}$  sind nicht unabhängig voneinander, sondern über  $\omega_{\rm B}T_{\rm B}=1$  miteinander verknüpft. Die Funktion  $x(\tau)$  stellt den Zeitverlauf einer bezogenen physikalischen Größe, eines Signals dar.

Die Fourier-Transformierte  $X(j\nu)$  wird auch die zu  $x(\tau)$  gehörende Spektralfunktion und  $X(j\nu)/(2\pi)$  die Spektraldichte genannt. Sie ist eine Funktion der reellen Variablen  $\nu$  und ist i.A. komplexwertig, auch dann, wenn  $x(\tau)$  ein reelles Signal ist. Statt  $X(j\nu)$  könnten wir auch einfacher  $X(\nu)$  schreiben,

was tatsächlich häufig gemacht wird. Wir werden das hier nicht tun, sondern die etwas umständlichere Schreibweise beibehalten. Sie weist einerseits darauf hin, dass  $\nu$  im Definitionsintegral (3.5) nur in der Kombination j $\nu$  auftritt, und führt andererseits zu einheitlichen Darstellungsformen, wenn die vollständigen Übertragungsfunktionen G(s) und die Zusammenhänge mit der in den Kapiteln 7 und 8 zu besprechenden Laplace-Transformation betrachtet werden.

Wegen ihrer weitreichenden Bedeutung für die unterschiedlichsten Anwendungen in der Naturwissenschaft und Technik stehen umfangreiche Tabellenwerke für die Fourier-Transformation zur Verfügung. Einen kleinen Auszug davon sehen Sie in Tab.3.1, die einige der häufiger benötigten Fourier-Paare wiedergibt. Manche dieser Einträge lassen sich mit elementaren Methoden berechnen, bei anderen müssten wir auf die Theorie der verallgemeinerten Funktionen (Distributionen) zurückgreifen. Nehmen Sie z.B. die erste Zeile in Tab.3.1: Sie gibt für die Spektralfunktion des Dirac-Stoßes die konstante Funktion mit dem Wert 1 an. Tatsächlich folgt aus der Definitionsgleichung (3.5) zusammen mit der Abtasteigenschaft (1.22) des Dirac-Stoßes sofort

$$\mathcal{F}\left[\delta(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\nu\tau} \mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}0} = 1.$$

Umgekehrt liefert die inverse Transformation (3.6) den häufig gebrauchten Zusammenhang

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\nu\tau} d\nu.$$
(3.7)

Zwar ist dieses Integral im klassischen Sinn divergent, im Bereich der verallgemeinerten Funktionen ist es aber durchaus sinnvoll und als Darstellung des Dirac-Stoßes sehr nützlich.

#### Andere Formen der Fourier-Transformation

Wir können die Fourier-Transformation natürlich auch direkt an den ursprünglichen, nicht bezogenen Größen vornehmen. Bedeutet u(t) den Verlauf irgendeiner physikalischen Größe mit der Zeit t, so gilt

$$\mathcal{F}[u(t)] = U(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt,$$
(3.8)

$$\mathcal{F}^{-1}\left[U(j\omega)\right] = u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$
 (3.9)

wobei als Frequenzvariable die Kreisfrequenz (Winkelfrequenz)  $\omega$  auftritt. Beachten Sie: Die physikalische Dimension der Spektralfunktion  $U(j\omega)$  ist die physikalische Dimension von u mal der Dimension "Zeit".

Die Gleichung (3.9) ist ganz anschaulich interpretierbar: Ein Signal u(t) lässt sich, auch wenn es nicht periodisch verläuft, durch die Überlagerung aus einem kontinuierlichen Spektrum von Sinusschwingungen zusammensetzen. Der Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\omega$  ist dabei  $U(j\omega) d\omega/(2\pi)$  als komplexe Amplitude zugeordnet. Gl.(3.8) vermittelt umgekehrt die Zerlegung in solch ein

Spektrum, das – grob gesprochen – angibt, wie die komplexen Amplituden über der Kreisfrequenz verteilt sind.

Der Zusammenhang der Transformationspaare (3.5), (3.6) und (3.8), (3.9) ist leicht herzustellen: Wir wählen eine Bezugsdauer  $T_{\rm B}$ , eine Bezugskreisfrequenz  $\omega_{\rm B}=1/T_{\rm B}$  und einen Bezugswert  $U_{\rm B}$  für das Signal. Damit werden die bezogenen Größen  $x(\tau)=u(\tau T_{\rm B})/U_{\rm B},\, \tau=t/T_{\rm B}$  und  $\nu=\omega/\omega_{\rm B}$  definiert. Einsetzen von

$$u(t) = U_{\rm B}x(\tau), \quad t = T_{\rm B}\tau, \quad \omega = \omega_{\rm B}\nu, \quad \omega_{\rm B}T_{\rm B} = 1$$
 (3.10)

in die Gln.(3.8), (3.9) liefert dann das Paar (3.5), (3.6), wobei die Funktionen u, x, U und X über

$$x(\tau) = u(\tau T_{\rm B})/U_{\rm B}, \quad X(j\nu) = U(j\nu/T_{\rm B})/(U_{\rm B}T_{\rm B}), u(t) = U_{\rm B}x(t/T_{\rm B}), \quad U(j\omega) = U_{\rm B}T_{\rm B}X(jT_{\rm B}\omega)$$
 (3.11)

direkt umzurechnen sind.

Erwähnen möchte ich noch die symmetrische Form der Fourier-Transformation, die als Frequenzvariable anstelle der Kreisfrequenz (Winkelfrequenz)  $\omega$  direkt die Frequenz (Periodenfrequenz) f verwendet. Durch Einsetzen von  $\omega = 2\pi f$  in die Gln.(3.8), (3.9) ergibt sich

$$\widetilde{\mathcal{F}}[u(t)] = \widetilde{U}(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j2\pi f t} dt,$$
(3.12)

$$\left[\widetilde{\mathcal{F}}^{-1}\left[\widetilde{U}(jf)\right] = u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{U}(jf) e^{j2\pi f t} df\right]$$
(3.13)

mit dem Zusammenhang

$$\widetilde{U}(\mathbf{j}f) = U(\mathbf{j}2\pi f), \quad U(\mathbf{j}\omega) = \widetilde{U}(\mathbf{j}\omega/(2\pi)),$$
 (3.14)

die Werte der Spektralfunktionen  $\widetilde{U}$  und U stimmen also für zusammengehörende Werte f und  $\omega$  überein. Beachten Sie das Fehlen des Faktors  $1/(2\pi)$  in Gl.(3.13).

Schließlich können wir auch zur symmetrischen Variante der Fourier-Transformation eine bezogene Form angeben: Nach Wahl der Bezugsdauer  $T_{\rm B}$ , einer dazu gehörenden Bezugsfrequenz<sup>2</sup>  $f_{\rm B}=1/T_{\rm B}$  und eines Bezugswertes  $U_{\rm B}$  des Signals, und nach Einführung der bezogenen Größen  $x(\tau)=u(\tau T_{\rm B})/U_{\rm B},\, \tau=t/T_{\rm B}$  und  $\nu=f/f_{\rm B}$  erhalten wir durch Einsetzen von

$$u(t) = U_{\rm B}x(\tau), \quad t = \tau T_{\rm B}, \quad f = \nu f_{\rm B}, \quad f_{\rm B}T_{\rm B} = 1$$
 (3.15)

in die Gln.(3.12), (3.13)

$$\widetilde{\widetilde{\mathcal{F}}}[x(\tau)] = \widetilde{X}(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j2\pi\nu\tau} d\tau,$$
(3.16)

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{-1}\left[\widetilde{X}(j\nu)\right] = x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{X}(j\nu) e^{j2\pi\nu\tau} d\nu$$
(3.17)

 $<sup>^2\</sup>text{Es}$  gilt hier demnach  $f_{\rm B}T_{\rm B}=1,$  im Gegensatz zu  $\omega_{\rm B}T_{\rm B}=1$  bei Verwendung von  $\omega$ als der Frequenzvariablen.

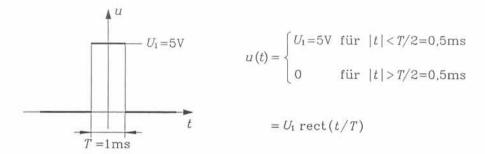


Abb. 3.1 Ein rechteckförmiger Spannungsimpuls. Seine Spektralfunktion soll bestimmt werden.

mit

$$x(\tau) = u(\tau T_{\rm B})/U_{\rm B}, \quad \widetilde{X}(j\nu) = \widetilde{U}(j\nu/T_{\rm B})/(U_{\rm B}T_{\rm B}), u(t) = U_{\rm B}x(t/T_{\rm B}), \quad \widetilde{U}(jf) = U_{\rm B}T_{\rm B}\widetilde{X}(jfT_{\rm B}).$$
(3.18)

Ein Beispiel soll diese wichtigen Zusammenhänge verdeutlichen. Wir wollen die Spektralfunktionen für einen rechteckförmigen, symmetrisch um den Zeitnullpunkt gelegenen Spannungsimpuls der Größe  $U_1 = 5$  V und der Dauer T = 1 ms (Abb.3.1) zu den unterschiedlichen Formen der Fourier-Transformation bestimmen. Rechteckimpulse lassen sich übrigens bequem mit der dafür erfundenen Rechteckfunktion (1.14),

$$rect(\tau) = \varepsilon(\tau + 1/2) - \varepsilon(\tau - 1/2) = \begin{cases} 0 & |\tau| > 1/2, \\ & \text{für} \\ 1 & |\tau| < 1/2, \end{cases}$$
(3.19)

schreiben<sup>3</sup>.

Wir beginnen mit der Form (3.8) in nicht bezogenen Größen mit der Kreisfrequenz  $\omega$  als der Spektralvariablen und berechnen

$$\mathcal{F}[u(t)] = U(j\omega) = U_1 \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{2U_1}{\omega} \sin(\omega T/2).$$

Die Spektralfunktion

$$U(j\omega) = 10 V \frac{\sin(\omega \cdot 0, 5 ms)}{\omega}$$
 (3.20)

ist im vorliegenden Fall also reellwertig.

Als Nächstes führen wir Bezugswerte und bezogene Größen gemäß

$$T_{\rm B} = T = 1 \,\text{ms}, \quad U_{\rm B} = U_1 = 5 \,\text{V},$$
  $x(\tau) = u(\tau T)/U_1, \quad \tau = t/T, \quad \nu = \omega T$  (3.21)

ein. Damit gilt speziell  $x(\tau) = \text{rect}(\tau)$ , und Gl.(3.5) liefert

$$\mathcal{F}[x(\tau)] = X(j\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-j\nu\tau} d\tau = \frac{2}{\nu} \sin(\nu/2),$$

 $<sup>^3</sup>$ Vorsicht: Die Rechteckfunktion  $\mathrm{rect}(\tau)$  wird manchmal als  $\varepsilon(\tau+1)-\varepsilon(\tau-1)$  erklärt, also über dem Trägerintervall (-1;1) anstelle von (-1/2;1/2).

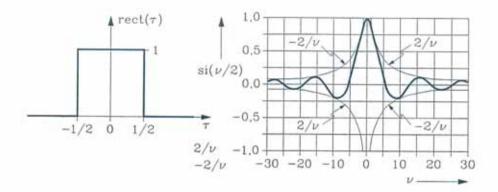


Abb. 3.2 Die Rechteckfunktion  $rect(\tau)$  und ihre Fourier-Transformierte, die Spaltfunktion  $si(\nu/2)$  nach Gl. (3.22). Siehe auch Tab. 3.1, Zeile 4.

also die bezogene Spektralfunktion<sup>4</sup>

$$X(j\nu) = \frac{\sin(\nu/2)}{\nu/2} = \sin(\nu/2).$$
 (3.22)

Eine graphische Darstellung sehen Sie in Abb.3.2. Der Zusammenhang der Spektralfunktionen (3.20) und (3.22), gegeben durch die Gln.(3.11), lässt sich direkt überprüfen.

Die Fourier-Transformation (3.12) mit der Frequenz f als der Spektralvariablen führt in unserem Beispiel auf

$$\widetilde{\mathcal{F}}\left[u(t)\right] = \widetilde{U}(\mathbf{j}f) = U_1 \int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-\mathbf{j} 2\pi f t} \mathrm{d}t = \frac{U_1}{\pi f} \sin(\pi f T),$$

also auf die Spektralfunktion

$$\widetilde{U}(jf) = 1,59 \text{ V} \frac{\sin(f \cdot 3, 14 \text{ ms})}{f}$$
, (3.23)

deren Werte mit den Werten von Gl.(3.20) für zusammengehörende f und  $\omega=2\pi f$  übereinstimmen.

Verwenden wir schließlich die Bezugswerte und die bezogenen Variablen gemäß

$$T_{\rm B} = T = 1 \,\text{ms}, \quad U_{\rm B} = U_1 = 5 \,\text{V},$$
  
 $x(\tau) = u(\tau T)/U_1, \quad \tau = t/T, \quad \nu = fT,$  (3.24)

was mit den Festlegungen (3.21), ausgenommen die letzte Beziehung, übereinstimmt, so folgt aus (3.16)

$$\widetilde{\mathcal{F}}\left[x(\tau)\right] = \widetilde{X}(\mathrm{j}\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\nu\tau} \mathrm{d}\tau = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \ ,$$

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Als Abkürzung für die häufig vorkommende Funktion  $\sin(x)/x$  hat sich in der deutschsprachigen technischen Literatur das Funktionssymbol  $\sin(x)$  durchgesetzt, in der englischsprachigen dagegen  $\sin(x)$ . Die Funktion  $\sin(x)$  wird manchmal Spaltfunktion genannt.

d.h. die bezogene Spektralfunktion ist

$$\widetilde{X}(j\nu) = si(\pi\nu).$$
 (3.25)

Sie entspricht der in Abb.3.2 dargestellten Kurve mit geändertem Abszissenmaßstab (Nulldurchgänge bei  $\nu=\pm 1,\pm 2,\ldots$ ).

## 3.2 Grundlegende Eigenschaften

Im Folgenden werden einige grundlegende, für das Arbeiten mit der Fourier-Transformation wichtige Eigenschaften zusammengestellt. Die meisten davon sind leicht zu zeigen. Sie werden außerdem eine weitgehende Symmetrie der Eigenschaften im Zeitbereich (auch Oberbereich genannt) und im Frequenzbereich (Unterbereich, Spektralbereich) bemerken, die sich aus dem ähnlichen Aufbau der Integrale in den Gln.(3.5) und (3.6) ergibt<sup>5</sup>.

Wenn wir Funktionen  $x(\tau)$  und  $X(j\nu)$  zusammen verwenden, so setzen wir stets die Verknüpfung über die Fourier-Transformation (3.5) und ihre Inversion (3.6) voraus. Dabei erweist sich häufig die Notation mit dem Korrespondenz-Symbol  $\circ - \bullet$ ,

$$x(\tau) \circ X(j\nu) \text{ bedeutet } X(j\nu) = \mathcal{F}[x(\tau)] \text{ und } x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[X(j\nu)],$$
 (3.26)

(" $x(\tau)$  korrespondiert  $X(j\nu)$ ") als bequem. Die Funktion (das Signal)  $x(\tau)$  kann auch komplexwertig sein.

#### 1. Existenz

Viele, auch für die Anwendungen wichtige Funktionen besitzen keine Fourier-Transformierten im klassischen Sinn, d.h. die zugehörigen Integrale konvergieren nicht. Oft schafft eine Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs Abhilfe, etwa die Verwendung der Delta-Funktion in der rechten Spalte der Tab.3.1. Falls nötig, sind die uneigentlichen Integrale über ihren Cauchy-Hauptwert zu definieren. Ich werde auf diese Themen hier nicht näher eingehen, sondern nur eine hinreichende Bedingung angeben: Eine Funktion  $x(\tau)$ , definiert für  $-\infty < \tau < \infty$ , besitzt eine beschränkte Fourier-Transformierte, wenn sie die Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| \, \mathrm{d}\tau < M_x < \infty \tag{3.27}$$

erfüllt, wenn sie also absolut integrabel ist (es existiert eine endliche obere Schranke  $M_x$  für das Betragsintegral). Diese Bedingung ist keineswegs notwendig. Bemerkenswert ist jedoch, dass sie im Fall der Stoßantwort genau mit der Stabilitätsbedingung (1.73) für lineare, zeitinvariante Systeme übereinstimmt. Im Zusammenhang mit der Laplace-Transformation werden wir das Konvergenzthema nochmals aufgreifen.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Noch deutlicher zeigt sich diese Symmetrie, die unter Pkt.3 als *Dualität* formuliert wird, bei Verwendung der Transformationspaare (3.12), (3.13) oder (3.16), (3.17).

#### 2. Linearität

Die Fourier-Transformation ist eine lineare Abbildung: Sind  $c_1$  und  $c_2$  irgend zwei komplexe Zahlen, so gilt

$$\mathcal{F}[c_1x_1(\tau) + c_2x_2(\tau)] = c_1\mathcal{F}[x_1(\tau)] + c_2\mathcal{F}[x_2(\tau)],$$

und analog für die inverse Transformation. Haben wir also  $x_1(\tau) \circ - X_1(j\nu)$  und  $x_2(\tau) \circ - X_2(j\nu)$ , dann folgt

$$x(\tau) = c_1 x_1(\tau) + c_2 x_2(\tau) \circ - X(j\nu) = c_1 X_1(j\nu) + c_2 X_2(j\nu).$$
 (3.28)

Konvergenz vorausgesetzt, lässt sich diese Eigenschaft auch auf unendliche Reihen ausdehnen.

#### 3. Dualität

Die Formeln (3.5) und (3.6) für die Fourier-Transformation und ihre Umkehrung sind formal recht ähnlich aufgebaut. Sie lassen sich daher leicht ineinander überführen. Machen wir nämlich im Umkehrintegral (3.6) die Substitutionen  $\tau \mapsto -\nu$  und  $\nu \mapsto \tau$ , so entsteht die Beziehung

$$2\pi x(-\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\tau) e^{-j\nu\tau} d\tau,$$

die wieder die Form einer Fourier-Transformation (3.5) besitzt. Es gilt also

$$x(\tau) \circ X(j\nu) \iff X(j\tau) \circ 2\pi x(-\nu).$$
 (3.29)

Ist  $X(j\nu)$  die Spektralfunktion des Signals  $x(\tau)$ , dann besitzt das Signal  $X(j\tau)$  das Spektrum  $2\pi x(-\nu)$ . Man kann damit aus bekannten Korrespondenzen neue, die dazu dualen, ableiten.

Zum Beispiel finden wir dual zu der im letzten Abschnitt berechneten und in Tab.3.1, Zeile 4, aufgelisteten Korrespondenz  $\operatorname{rect}(\tau) \circ -\bullet \operatorname{si}(\nu/2)$  die neue Korrespondenz

$$\operatorname{si}(\tau/2) \circ - 2\pi \operatorname{rect}(\nu)$$
 (3.30)

(rect ist eine gerade Funktion). Demnach hat z.B. ein idealer Tiefpass  $G(j\nu) = \text{rect}(\nu)$  (mit der bezogenen Grenzkreisfrequenz  $\nu = 1/2$ ) die Stoßantwort  $g(\tau) = \sin(\tau/2)/(2\pi)$ .

Ein weiteres Beispiel liefern die Zeilen 1 und 2 in Tab.3.1: Aus  $\delta(\tau) \circ - \bullet$  1 folgt 1  $\circ - \bullet$   $2\pi\delta(\nu)$  ( $\delta$  ist gerade). Das konstante Signal  $x(\tau) = 1$  hat demnach das Spektrum  $X(j\nu) = 2\pi\delta(\nu)$ , also einen Dirac-Stoß vom Gewicht  $2\pi$ .

#### 4. Zeitdehnung

Wenn  $x(\tau) \circ -\bullet X(j\nu)$  ein Fourier-Paar darstellt, dann bildet mit einer reellen Konstanten  $a \neq 0$  wegen

$$\mathcal{F}[x(a\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(a\tau) e^{-j\nu\tau} d\tau = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j(\nu/a)\tau} d\tau$$

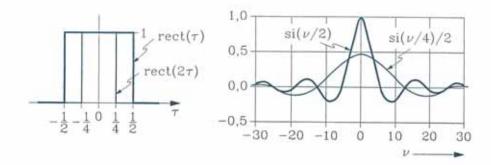


Abb. 3.3 Beispiel zur Zeitdehnung im Anschluss an Abb.3.2. Der kürzere Rechteckimpuls besitzt ein vergleichsweise breiteres Frequenzspektrum (dünner gezeichnet).

auch

$$x(a\tau) \longrightarrow \frac{1}{|a|}X(j\frac{\nu}{a})$$
 (3.31)

ein Fourier-Paar. Dieses Ergebnis ist wichtig. Es zeigt, dass einer Zeitdehnung (|a|<1) eine Frequenzpressung entspricht, und umgekehrt, einer Zeitpressung (|a|>1) eine Frequenzdehnung. Anders ausgedrückt: Wenn man den Zeitvorgang langsamer (|a|<1, Zeitlupe) oder schneller (|a|>1, Zeitraffer) ablaufen lässt, dann zieht sich die Spektralfunktion entsprechend zusammen bzw. dehnt sich aus. Schnelle Vorgänge benötigen ein breites Frequenzspektrum, langsame Vorgänge kommen dagegen mit einem schmalen Frequenzspektrum aus. Abb.3.3 soll diesen Sachverhalt durch den Vergleich der Spektren zweier Rechteckimpulse unterschiedlicher Breite verdeutlichen.

#### 5. Zeitverschiebung

Beschreibt  $x(\tau)$  ein Signal und ist  $\tau_0$  eine reelle Konstante, so stellt  $x(\tau-\tau_0)$  den gleichen, allerdings um  $\tau_0$  verschobenen Zeitverlauf dar. Für  $\tau_0>0$  tritt das neue Signal später, für  $\tau_0<0$  tritt es früher auf. Wegen

$$\mathcal{F}\left[x(\tau-\tau_0)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau-\tau_0) e^{-j\nu\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\nu(\tau+\tau_0)} d\tau = e^{-j\nu\tau_0} \mathcal{F}\left[x(\tau)\right]$$

haben wir den Zusammenhang

$$x(\tau - \tau_0) \circ \bullet e^{-j\nu\tau_0}X(j\nu),$$
 (3.32)

falls  $x(\tau) \circ - \bullet X(j\nu)$  gilt. Da der Faktor  $\exp(-j\nu\tau_0)$  unimodular ist, wird bei der Zeitverschiebung eines Signals der Betrag des Spektrums nicht geändert, wohl aber dessen Winkel: Bei der Verschiebung des Signals um  $\tau_0$  kommt in der Spektralfunktion noch ein Winkel  $-\nu\tau_0$  hinzu, der linear mit der Frequenzvariablen wächst.

#### 6. Frequenzverschiebung

Im Zusammenhang mit Modulationsvorgängen tritt auch das Gegenstück zu Gl.(3.32) auf, die Verschiebung im Frequenzbereich. Ist  $\nu_0$  eine relle Konstante,

so folgt aus  $X(j\nu) \longrightarrow x(\tau)$  die Beziehung

$$X(j\nu - j\nu_0) \bullet - e^{j\nu_0\tau}x(\tau).$$
 (3.33)

Wird beispielsweise die Sinusschwingung  $\cos(\nu_0 \tau)$  mit dem Signal  $x(\tau)$  amplitudenmoduliert, dann erhalten wir für  $x(\tau) \circ - X(j\nu)$  über

$$x(\tau)\cos(\nu_0\tau) = \frac{1}{2} \left( e^{j\nu_0\tau} + e^{-j\nu_0\tau} \right) x(\tau) - \frac{1}{2} \left[ X(j\nu - j\nu_0) + X(j\nu + j\nu_0) \right]$$

sofort das Spektrum des modulierten Signals.

#### 7. Zeitdifferentiation

Wir differenzieren die Spektraldarstellung (3.6) der Funktion  $x(\tau)$ ,

$$x'(\tau) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\nu) \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu\tau} \mathrm{d}\nu \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \mathrm{j}\nu X(\mathrm{j}\nu) \right] \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu\tau} \mathrm{d}\nu,$$

und lesen daraus den Zusammenhang

$$x'(\tau) \circ - \bullet j\nu X(j\nu)$$
 (3.34)

ab. Die Differentiation im Zeitbereich entspricht also der Multiplikation mit j $\nu$  im Frequenzbereich, oder, etwas allgemeiner,

$$x^{(n)}(\tau) \circ - \bullet (j\nu)^n X(j\nu)$$
(3.35)

für die n-malige Differentiation. Dies ist ebenfalls ein wichtiges Ergebnis. Unterwerfen wir nämlich die Standardform (2.1) unserer Differentialgleichung für lineare, zeitinvariante Systeme der Fourier-Transformation, so ergibt sich mit  $y(\tau) \longrightarrow Y(j\nu)$  und  $u(\tau) \longrightarrow U(j\nu)$  unter Benutzung der Linearität (3.28) die algebraische Beziehung

$$\underbrace{\left[\left(\mathbf{j}\nu\right)^{n}+a_{n-1}\left(\mathbf{j}\nu\right)^{n-1}+\cdots+a_{1}\mathbf{j}\nu+a_{0}\right]}_{P(\mathbf{j}\nu)}Y(\mathbf{j}\nu)=\underbrace{\left[b_{m}\left(\mathbf{j}\nu\right)^{m}+\cdots+b_{0}\right]}_{Q(\mathbf{j}\nu)}U(\mathbf{j}\nu),$$

wobei P(s) das charakteristische Polynom (2.8) und Q(s) das Nullstellenpolynom (2.9), jeweils für  $s=\mathrm{j}\nu$ , darstellt. Mit der Definition (2.10) der Übertragungsfunktion G(s) folgt daraus

$$Y(j\nu) = G(j\nu)U(j\nu).$$
(3.36)

Die Spektralfunktion des Ausgangssignals ergibt sich direkt aus der Spektralfunktion des (für  $-\infty < \tau < \infty$  bekannten) Eingangssignals durch Multiplikation mit dem komplexen Frequenzgang des Systems (Spektralfunktion der Stoßantwort). Wir kommen darauf im nächsten Kapitel zurück.

#### 8. Zeitintegration

Für die Ableitung der Korrespondenz betreffend die Zeitintegration brauchen wir die aus Zeile 3 der Tab.3.1 folgende Relation

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{j\nu\tau'} d\tau' = e^{j\nu\tau} \int_{0}^{\infty} e^{-j\nu\tau'} d\tau' = e^{j\nu\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau') e^{-j\nu\tau'} d\tau' = \left[ \frac{1}{j\nu} + \pi\delta(\nu) \right] e^{j\nu\tau}.$$

Integrieren des Fourier-Umkehrintegrals (3.6) ergibt damit

$$\begin{split} \int_{-\infty}^{\tau} x(\tau') \, \mathrm{d}\tau' &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\nu) \left[ \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu\tau'} \mathrm{d}\tau' \right] \, \mathrm{d}\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\mathrm{j}\nu) \left[ \frac{1}{\mathrm{j}\nu} + \pi \delta(\nu) \right] \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu\tau} \mathrm{d}\nu, \end{split}$$

und daraus lesen wir die gesuchte Korrespondenz

$$\int_{-\infty}^{\tau} x(\tau') d\tau' \circ \frac{1}{j\nu} X(j\nu) + \pi X(0) \delta(\nu)$$
(3.37)

ab. Der Wert der Spektralfunktion für  $\nu = 0$ ,

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \,d\tau, \tag{3.38}$$

lässt sich direkt aus Gl.(3.5) gewinnen.

#### 9. Frequenz differentiation

Für die Differentiation im Spektralbereich folgt aus Gl.(3.5)

$$\frac{\mathrm{d}X(\mathrm{j}\nu)}{\mathrm{d}(\mathrm{j}\nu)} = -\mathrm{j}\frac{\mathrm{d}X(\mathrm{j}\nu)}{\mathrm{d}\nu} \bullet - \sigma - \tau x(\tau), \tag{3.39}$$

was sich natürlich sofort auf Ableitungen höherer Ordnung verallgemeinern lässt. Unter Verwendung von Zeile 2 in Tab.3.1 können Sie damit z.B. Polynome in  $\tau$  Fourier-transformieren.

#### 10. Frequenzintegration

Auch die Integration im Spektralbereich kann dual zur Korrespondenz (3.37) in den Zeitbereich übertragen werden,

$$\int_{-\infty}^{\nu} X(j\nu') d\nu' - \frac{j}{\tau} x(\tau) + \pi x(0)\delta(\tau). \tag{3.40}$$

Beachten Sie die direkt aus Gl.(3.6) ablesbare Beziehung

$$x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\nu) d\nu \qquad (3.41)$$

und prüfen Sie den Zusammenhang mit der Frequenzdifferentiation!

#### 3.3 Symmetrieeigenschaften

Neben den grundlegenden Eigenschaften sind für die Anwendungen der Fourier-Transformation vor allem die Symmetrieeigenschaften nützlich. Es ist deshalb lohnend, sie mit einer gewissen Systematik zu untersuchen.

#### 1. Konjugiert komplexe Zeitfunktion

Angenommen, wir kennen zu einer i.A. komplexwertigen Zeitfunktion bereits das zugehörige Spektrum,  $x(\tau) \circ - \bullet X(j\nu)$ . Wie sieht dann das Spektrum der konjugiert komplexen Zeitfunktion  $x^*(\tau)$  aus? Schreiben wir zuerst die Definitionsgleichung (3.5) der Fourier-Transformation in ihrer konjugiert komplexen Form an und ersetzen dann  $\nu$  durch  $-\nu$ ,

$$X^*(\mathrm{j}\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu\tau} \mathrm{d}\tau, \quad X^*(-\mathrm{j}\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau) \,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\nu\tau} \mathrm{d}\tau,$$

so erscheint mit dem letzten Ausdruck bereits die gesuchte Relation:

$$x^*(\tau) \longrightarrow X^*(-j\nu). \tag{3.42}$$

Daraus werden wir nun einige Schlüsse ziehen.

#### 2. Reelle Zeitfunktion

Für reellwertige Zeitfunktionen gilt  $x^*(\tau) = x(\tau)$ . Dann müssen aber auch die zugehörigen Spektralfunktionen gleich sein, also

$$x^*(\tau) = x(\tau) \iff X(-j\nu) = X^*(j\nu).$$
 (3.43)

Ein Signal ist genau dann reell, wenn sein Spektrum bei Frequenzspiegelung die konjugiert komplexen Werte annimmt. Spalten wir die Spektralfunktion in Realund Imaginärteil auf,

$$X(j\nu) = X'(\nu) + jX''(\nu),$$
  
 $X'(\nu) = \text{Re}[X(j\nu)], \quad X''(\nu) = \text{Im}[X(j\nu)],$  (3.44)

so folgt daraus

$$X'(-\nu) = X'(\nu) \text{ und } X''(-\nu) = -X''(\nu).$$
 (3.45)

Der Realteil des Spektrums eines reellwertigen Signals ist demnach eine gerade, der Imaginärteil eine ungerade Funktion der Frequenzvariablen. Andererseits erhalten wir für die Polardarstellung

$$X(j\nu) = |X| (\nu) e^{j\varphi(\nu)},$$
  

$$|X|(\nu) = |X(j\nu)|, \quad \varphi(\nu) = \text{arc}[X(j\nu)]$$
(3.46)

die Relationen

$$|X|(-\nu) = |X|(\nu) \text{ und } \varphi(-\nu) = -\varphi(\nu) \mod(2\pi),$$
 (3.47)

d.h. das Betragsspektum ist gerade und das Winkelspektrum ungerade (modulo  $2\pi$ ). Bei reellwertigen Signalen lässt sich also mit dem Spektrum für Frequenzwerte  $\nu \geqslant 0$  das Auslangen finden.

#### 3. Imaginäre Zeitfunktion

Ganz analog haben wir: Ein Signal ist genau dann *imaginär*, wenn in den Gln.(3.43) zusätzlich ein Vorzeichenwechsel auftritt,

$$x^*(\tau) = -x(\tau) \iff X(-j\nu) = -X^*(j\nu).$$
 (3.48)

In diesem Fall ist der Realteil X' des Spektrums ungerade und der Imaginärteil X'' gerade.

## 4. Konjugiert komplexe Spektralfunktion

Als Gegenstück zur Eigenschaft 1 finden wir

$$X^*(j\nu) \bullet - x^*(-\tau), \tag{3.49}$$

d.h. zum konjugiert komplexen Spektrum gehört das zeitgespiegelte, konjugiert komplexe Signal.

#### 5. Spiegelung

Die Variablentransformationen  $\tau \mapsto -\tau$  und  $\nu \mapsto -\nu$  in Gl.(3.6) zeigen

$$x(-\tau) \circ - X(-j\nu).$$
 (3.50)

Zeitspiegelung und Frequenzspiegelung sind also äquivalent.

## Gerade Zeitfunktion und gerade Spektralfunktion

Aus der Spiegelungseigenschaft leiten wir ab: Wenn ein Signal  $x(\tau)$  gerade ist, dann ist auch seine Spektralfunktion  $X(j\nu)$  gerade, und umgekehrt,

$$x(-\tau) = x(\tau) \iff X(-j\nu) = X(j\nu). \tag{3.51}$$

Manchmal ist es zweckmäßig, die Fourier-Transformation (3.5) und ihre Umkehrung (3.6) in diesem Fall umzuschreiben. Aus der Geradheit von x und X folgt nämlich

$$X(j\nu) = 2 \int_0^\infty x(\tau) \cos(\nu \tau) d\tau, \qquad (3.52)$$

$$x(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty X(j\nu) \cos(\nu\tau) d\nu, \qquad (3.53)$$

die Grundform der Fourier-Kosinus-Transformation.

## 7. Ungerade Zeitfunktion und ungerade Spektralfunktion

Analog gilt: Wenn ein Signal  $x(\tau)$  ungerade ist, dann ist auch seine Spektral-funktion  $X(j\nu)$  ungerade, und umgekehrt,

$$x(-\tau) = -x(\tau) \iff X(-j\nu) = -X(j\nu). \tag{3.54}$$

Ähnlich wie für gerade Funktionen erhalten wir dann

$$X(j\nu) = -2j \int_{0}^{\infty} x(\tau) \sin(\nu \tau) d\tau, \qquad (3.55)$$

$$x(\tau) = \frac{\mathrm{j}}{\pi} \int_0^\infty X(\mathrm{j}\nu) \sin(\nu\tau) \,\mathrm{d}\nu, \tag{3.56}$$

die Grundform der Fourier-Sinus-Transformation.

#### 8. Zerlegung in gerade und ungerade Teile

Ein Signal  $x(\tau)$ , definiert für alle  $\tau$ , lässt sich immer und auf eindeutige Weise als Summe

$$x(\tau) = x_{\mathrm{g}}(\tau) + x_{\mathrm{u}}(\tau) \tag{3.57}$$

seines geraden Teils  $x_{\rm g}(\tau)$  und seines ungeraden Teils  $x_{\rm u}(\tau)$  darstellen, wobei

$$x_{\rm g}(\tau) = \frac{1}{2} \left[ x(\tau) + x(-\tau) \right], \quad x_{\rm u}(\tau) = \frac{1}{2} \left[ x(\tau) - x(-\tau) \right].$$
 (3.58)

Auf die gleiche Weise lässt sich auch die zugehörende Spektralfunktion  $X(\mathrm{j}\nu)$  gemäß

$$X(j\nu) = X_g(j\nu) + X_u(j\nu)$$
(3.59)

in einen geraden und einen ungeraden Teil

$$X_{\rm g}({\rm j}\nu) = \frac{1}{2} \left[ X({\rm j}\nu) + X(-{\rm j}\nu) \right], \quad X_{\rm u}({\rm j}\nu) = \frac{1}{2} \left[ X({\rm j}\nu) - X(-{\rm j}\nu) \right]$$
 (3.60)

zerlegen. Die geraden und die ungeraden Teile bilden jeweils für sich ein Fourier-Transformationspaar,

$$x_{\mathbf{g}}(\tau) \circ - X_{\mathbf{g}}(\mathbf{j}\nu) \quad \text{und} \quad x_{\mathbf{u}}(\tau) \circ - X_{\mathbf{u}}(\mathbf{j}\nu),$$
 (3.61)

und die Gl.(3.52), (3.53) bzw. (3.55), (3.56) liefern

$$\begin{split} X_{\mathrm{g}}(\mathrm{j}\nu) &= 2 \int_{0}^{\infty} x_{\mathrm{g}}(\tau) \cos(\nu \tau) \, \mathrm{d}\tau, \qquad x_{\mathrm{g}}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} X_{\mathrm{g}}(\mathrm{j}\nu) \cos(\nu \tau) \, \mathrm{d}\nu, \\ X_{\mathrm{u}}(\mathrm{j}\nu) &= -2 \mathrm{j} \int_{0}^{\infty} x_{\mathrm{u}}(\tau) \sin(\nu \tau) \, \mathrm{d}\tau, \quad x_{\mathrm{u}}(\tau) = \frac{\mathrm{j}}{\pi} \int_{0}^{\infty} X_{\mathrm{u}}(\mathrm{j}\nu) \sin(\nu \tau) \, \mathrm{d}\nu. \end{split}$$

Als Sonderfälle erhalten wir:

- Ein Signal  $x(\tau)$  ist genau dann reell und gerade, wenn auch seine Spektralfunktion  $X(j\nu)$  reell und gerade ist.
- Ein Signal  $x(\tau)$  ist genau dann reell und ungerade, wenn seine Spektralfunktion  $X(j\nu)$  imaginär und ungerade ist.

Weiters entspricht für reelle Signale  $x(\tau)$  die Aufspaltung (3.59) offensichtlich (s.Gln.(3.45)) der Zerlegung seines Spektrums  $X(j\nu)$  in den Real- und Imaginärteil,

$$X_{\mathbf{g}}(\mathbf{j}\nu) = X'(\nu) \bullet - \circ x_{\mathbf{g}}(\tau), \quad X_{\mathbf{u}}(\mathbf{j}\nu) = \mathbf{j}X''(\nu) \bullet - \circ x_{\mathbf{u}}(\tau). \tag{3.62}$$

Zum Realteil des Spektrums eines reellwertigen Signals gehört also dessen gerader Teil, zum mit j multiplizierten Imaginärteil der ungerade Signalteil.

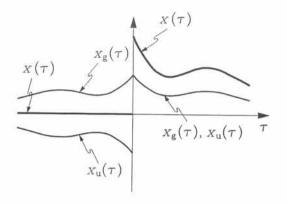


Abb. 3.4 Anschauliche Aufspaltung einer rechtsseitigen Funktion  $x(\tau)$  in ihren geraden Teil  $x_{\rm g}(\tau)$  und in ihren ungeraden Teil  $x_{\rm u}(\tau)$ .

## 9. Rechtsseitige Zeitfunktion (kausales Signal)

Eine Funktion  $x(\tau)$  nennen wir rechtsseitig<sup>6</sup>, wenn sie für negative  $\tau$  identisch verschwindet,

$$x(\tau)$$
 ist rechtsseitig:  $x(\tau) = 0$  für  $\tau < 0$ . (3.63)

Für rechtsseitige Funktionen (kausale Signale) folgt aus den Definitionen (3.58)

für 
$$\tau > 0$$
:  $x_{g}(\tau) = x_{u}(\tau) = \frac{1}{2}x(\tau)$ ,  
für  $\tau < 0$ :  $x_{g}(\tau) = -x_{u}(\tau) = \frac{1}{2}x(-\tau)$ . (3.64)

Die geraden und ungeraden Teile sind hier also ganz eng verknüpft, wie Abb.3.4 anschaulich zeigt.

Aus den Beziehungen (3.64) folgt zusammen mit den Integraldarstellungen unter der letzten Ziffer, dass für ein kausales Signal der gerade und der ungerade Teil des Spektrums nicht voneinander unabhängig sind:  $X_{\rm g}({\rm j}\nu)$  kann durch  $X_{\rm u}({\rm j}\nu)$  ausgedrückt werden, und umgekehrt. Weiters schließen wir für reellwertige kausale Signale wegen der Korrespondenzen (3.60), dass sich dann auch der Realteil  $X'(\nu)$  der Spektralfunktion  $X({\rm j}\nu)$  aus dem Imaginärteil  $X''(\nu)$  berechnen lässt, und umgekehrt<sup>7</sup>. Dieser wichtige Spezialfall trifft insbesondere auf den Frequenzgang  $G({\rm j}\nu)$  als Fourier-Transformierte der Stoßantwort eines reellen, kausalen LTI-Systems zu<sup>8</sup>.

## 3.4 Faltung und Korrelation

Wir haben die Faltung im Abschnitt 1.5 als eine Operation kennen gelernt, mit der sich bei bekannter Stoßantwort eines linearen, zeitinvarianten Systems aus dem Eingangssignal die Nullzustandsantwort oder, wenn der Anfangszeitpunkt nach  $-\infty$  verlegt wird, die vollständige Systemantwort bestimmen lässt. Im Grunde handelt es sich um eine Verknüpfung zweier Signale, der Stoßantwort  $g(\tau)$  und des Eingangssignals  $u(\tau)$ , und das Ergebnis ist wieder ein Signal,

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>In Anlehnung an die Stoßantwort kausaler Systeme nennt man rechtsseitige Signale auch kausale Signale.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Diese Zusammenhänge werden durch die Hilbert-Transformation hergestellt.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>In der physikalischen Literatur werden diese Beziehungen meist Kramers-Kronig-Relationen genannt.

nämlich die Systemantwort  $y(\tau)$ . Formal gesehen hat diese Verknüpfung manches mit einer gewöhnlichen multiplikativen Verknüpfung gemeinsam. Sie wird deshalb auch Faltungsprodukt genannt und wird allgemein als innere, zweistellige, multiplikativ geschriebene Verknüpfung in einem linearen Signalraum eingeführt.

#### Das Faltungsprodukt

Nach dem Muster von Gl.(1.62) definieren wir das Faltungsprodukt  $x_1(\tau) * x_2(\tau)$  zweier Signale  $x_1(\tau)$  und  $x_2(\tau)$  durch

$$x_1(\tau) * x_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau') x_2(\tau - \tau') d\tau'.$$
 (3.65)

Dabei wird "\*" als "gefaltet mit" gesprochen, und es entsteht wieder ein Signal. Eine Variablentransformation  $\tau' \mapsto \tau'' = \tau - \tau'$  im definierenden Integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau')x_2(\tau-\tau')d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau-\tau'')x_2(\tau'')d\tau'' = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau')x_1(\tau-\tau')d\tau',$$

zeigt die Vertauschbarkeit der beiden "Faktoren". Das Faltungsprodukt ist demnach kommutativ,

$$x_1 * x_2 = x_2 * x_1. (3.66)$$

Die Faltung ist überdies assoziativ,

$$(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3), \tag{3.67}$$

d.h. bei hintereinander ausgeführten Faltungen können die Klammern weggelassen werden, und sie ist offensichtlich auch distributiv über der gewöhnlichen Addition.

$$x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3,$$
 (3.68)

immer vorausgesetzt, die Integrale existieren. Der Dirac-Stoß  $\delta(\tau)$  übernimmt übrigens die Rolle des **Einselements** im Faltungsprodukt,

$$\delta * x = x. \tag{3.69}$$

Aufgrund der Eigenschaften (3.66) bis (3.69) spricht man auch von der Faltungsalgebra.

#### Faltung im Zeitbereich

Wir führen jetzt eine Fourier-Transformation des Faltungsprodukts durch,

$$\begin{split} \mathcal{F}\left[x_{1}(\tau) * x_{2}(\tau)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_{1}(\tau') x_{2}(\tau - \tau') \mathrm{d}\tau' \right] \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\nu\tau} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{1}(\tau') \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_{2}(\tau - \tau') \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\nu\tau} \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{1}(\tau') \mathcal{F}\left[x_{2}(\tau - \tau')\right] \mathrm{d}\tau'. \end{split}$$

Auf die Transformierte im letzten Integral kann der Zeitverschiebungssatz (3.32) angewendet werden, was schließlich

$$\mathcal{F}\left[x_1(\tau) * x_2(\tau)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau') e^{-\mathrm{j}\nu\tau'} \mathcal{F}\left[x_2(\tau)\right] d\tau' = \mathcal{F}\left[x_1(\tau)\right] \mathcal{F}\left[x_2(\tau)\right],$$

also

$$x_1(\tau) * x_2(\tau) \circ - X_1(j\nu) X_2(j\nu)$$
(3.70)

liefert: Das Faltungsprodukt zweier Signale entspricht dem gewöhnlichen Produkt ihrer Spektren.

Ein Beispiel: Nach Gl.(1.62) lässt sich die Antwort  $y(\tau)$  eines linearen, zeitinvarianten Systems als Faltungsintegral in einer Form darstellen, die genau dem Faltungsprodukt der Stoßantwort  $g(\tau)$  mit dem Eingangssignal  $u(\tau)$  entspricht. Bilden  $u(\tau), y(\tau)$  und  $g(\tau)$  mit  $U(j\nu), Y(j\nu)$  bzw.  $G(j\nu)$  jeweils Fourier-Paare, so folgt aus (3.70)

$$y(\tau) = g(\tau) * u(\tau) \circ - Y(j\nu) = G(j\nu)U(j\nu),$$
(3.71)

die bereits in Gl.(3.36) festgestellte Beziehung zwischen den drei Spektren.

#### Faltung im Frequenzbereich

Auch Spektralfunktionen können gefaltet werden,

$$X_1(j\nu) * X_2(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\nu') X_2(j\nu - j\nu') d\nu',$$
 (3.72)

und daraus lässt sich, dual zu (3.70), die Korrespondenz

$$x_1(\tau)x_2(\tau) \circ \longrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\nu) * X_2(j\nu)$$
(3.73)

ableiten. Abgesehen von dem Vorfaktor  $1/(2\pi)$  entspricht das gewöhnliche Produkt zweier Signale dem Faltungsprodukt ihrer Spektren<sup>9</sup>.

#### Die Parseval-Gleichung

Wenn wir in der Korrespondenz (3.73) auf der linken Seite statt  $x_1(\tau)$  die konjugiert komplexe Funktion  $x_1^*(\tau)$  nehmen, dann haben wir nach der Regel (3.42) rechts statt  $X_1(j\nu)$  die Funktion  $X_1^*(-j\nu)$  einzusetzen. Wir berechnen damit die Fourier-Transformierte von  $x_1^*(\tau)x_2(\tau)$ ,

$$\mathcal{F}[x_1^*(\tau)x_2(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(\tau)x_2(\tau) e^{-j\nu\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1^*(j\nu' - j\nu)X_2(j\nu') d\nu',$$

und werten sie für  $\nu = 0$  aus (der Strich an  $\nu'$  wird anschließend weggelassen):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(\tau) x_2(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1^*(j\nu) X_2(j\nu) d\nu.$$
 (3.74)

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Bei Verwendung der Periodenfrequenz anstelle der Kreisfrequenz als der Spektralvariablen (Transformationspaare (3.12), (3.13) oder (3.16), (3.17)) tritt der Vorfaktor  $1/(2\pi)$  nicht auf.

Setzen wir speziell  $x_1(\tau) = x_2(\tau) = x(\tau)$  und entsprechend  $X_1(j\nu) = X_2(j\nu) = X(j\nu)$ , so ergibt sich schließlich die als Parseval-Gleichung bekannte Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)|^2 d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\nu)|^2 d\nu,$$
(3.75)

und Gl.(3.74) ist eine verallgemeinerte Form davon.

Eine nützliche Beziehung ergibt sich durch Anwendung der Parseval-Gleichung zusammen mit den Gln.(3.28) auf die Differenz zweier Funktionen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(\tau) - x_2(\tau)|^2 d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_1(j\nu) - X_2(j\nu)|^2 d\nu.$$
 (3.76)

Angenommen,  $x_1(\tau)$  ist eine vorgegebene Funktion und  $x_2(\tau)$  ist eine Funktion mit freien Parametern, die so bestimmt werden sollen, dass  $x_1(\tau)$  möglichst gut durch  $x_2(\tau)$  approximiert wird. Als Maß für die Abweichung kann nun das linke Integral – der integrierte quadratische Fehler – herangezogen werden. Dann besagt Gl.(3.76), dass sich die Approximation unter Benutzung des gleichen Fehlermaßes genauso gut im Spektralbereich durchführen lässt.

#### Energiebegrenzte und leistungsbegrenzte Signale

Es ist üblich, die linke Seite der Parseval-Gleichung (3.75) Signalenergie zu nennen, auch wenn es sich dabei in der Regel nicht um eine Energie im physikalischen Sinn handelt. Die Parseval-Gleichung besagt nun, dass die Signalenergie auch im Spektralbereich berechnet werden kann. Die Funktion  $|X(j\nu)|^2/(2\pi)$  ist deshalb als spektrale Signalenergiedichte aufzufassen<sup>10</sup>. Wir nennen ein Signal energiebegrenzt, wenn seine Signalenergie einen endlichen Wert besitzt.

Häufig sind Signale nicht energiebegrenzt – denken Sie z.B. an periodische Signale. In solchen Fällen erweist sich die Einführung der Signalleistung

$$x_{\text{eff}}^2 = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |x(\tau')|^2 d\tau'$$
(3.77)

als günstig. Der Effektivwert  $x_{\text{eff}}$  ist eine Verallgemeinerung des bei periodischen Zeitverläufen üblichen Begriffs. Ein Signal ist dann leistungsbegrenzt, wenn es eine endliche Signalleistung, d.h. einen endlichen Effektivwert besitzt.

#### Das Korrelationsprodukt

Eng verwandt mit der Faltung ist eine andere Verknüpfung zweier Signale  $x_1(\tau)$  und  $x_2(\tau)$  zu einem neuen Signal  $r_{12}^{\rm E}(\tau) = x_1(\tau) \otimes x_2(\tau)$ , das wir Korrelationsprodukt (für energiebegrenzte Signale) nennen und durch

$$r_{12}^{E}(\tau) = x_1(\tau) \otimes x_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^*(\tau') x_2(\tau + \tau') d\tau'$$
(3.78)

definieren. Dabei wird " $\otimes$ " als "korreliert mit" gesprochen.

 $<sup>^{10}</sup>$ Bei Verwendung der Periodenfrequenz als der Spektralvariablen entfällt der Faktor  $1/(2\pi)$ .

Im Gegensatz zum Faltungsprodukt ist das Korrelationsprodukt offensichtlich nicht kommutativ,

 $r_{12}^{\mathcal{E}}(\tau) = r_{21}^{\mathcal{E}*}(-\tau).$  (3.79)

Für seine Fourier-Transformierte ergibt sich nach einem zur Herleitung der Korrespondenz (3.70) ähnlichen Vorgehen

$$x_1(\tau) \otimes x_2(\tau) \longrightarrow X_1^*(j\nu) X_2(j\nu), \tag{3.80}$$

worin Sie mit der Korrespondenz (3.49) ebenfalls die Vertauschungsbeziehung (3.79) erkennen.

Einen wichtigen Sonderfall stellt das Korrelationsprodukt eines Signals  $x(\tau)$  mit sich selbst dar,  $x_1(\tau) = x_2(\tau) = x(\tau)$ ,  $X_1(j\nu) = X_2(j\nu) = X(j\nu)$ . Wir nennen  $t_{xx}^{\rm E}(\tau) = x(\tau) \otimes x(\tau)$  das Autokorrelationsprodukt von x und die allgemeine Form  $t_{12}^{\rm E}(\tau)$  dann das Kreuzkorrelationsprodukt von  $x_1$  und  $x_2$ . Wie Sie mit der Korrespondenz

 $x(\tau) \otimes x(\tau) \circ - |X(j\nu)|^2$  (3.81)

sehen, hängt die Fourier-Transformierte des Autokorrelationsprodukts nur von den Betragswerten, nicht aber von den Winkelwerten des Spektrums des Signals ab.

#### Die Wiener-Khintchine-Gleichung

Ausführlich angeschrieben bedeutet die Korrespondenz (3.81), wenn wir die rechte Seite als Fourier-Umkehrintegral darstellen,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^*(\tau')x(\tau+\tau')d\tau' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\nu)|^2 e^{j\nu\tau}d\nu.$$
 (3.82)

Dies ist die Wiener-Khintchine-Gleichung (für energiebegrenzte, determinierte Signale), offensichtlich eine Verallgemeinerung der Parseval-Gleichung (3.75), die sich daraus für  $\tau=0$  ergibt.

#### 3.5 Rücktransformation

Sehen wir uns abschließend etwas genauer an, was bei der Fourier-Rücktransformation geschieht, d.h. wie sich die komplexen Sinusschwingungen, in die wir unser Signal zerlegt haben, wieder zum ursprünglichen Signal zusammensetzen. Eintragen des über Gl.(3.5) berechneten Spektrums  $X(j\nu)$  eines Signals  $x(\tau)$  in das Umkehrintegral (3.6) liefert zunächst

$$\begin{split} \mathcal{F}^{-1}\left[X(\mathrm{j}\nu)\right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau') \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\nu\tau'} \mathrm{d}\tau' \right] \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu\tau} \mathrm{d}\nu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau') \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu(\tau-\tau')} \mathrm{d}\nu \right] \mathrm{d}\tau'. \end{split}$$

Ersetzen wir dann die eckige Klammer im letzten Integral mit Hilfe der aus der Theorie der verallgemeinerten Funktionen folgenden Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\nu\tau} d\nu = 2\pi\delta(\tau)$$

durch  $\delta(\tau - \tau')$ , so ergibt sich

$$\mathcal{F}^{-1}[X(j\nu)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau')\delta(\tau - \tau')d\tau', \qquad (3.83)$$

mit der Abtasteigenschaft des Dirac-Stoßes also tatsächlich wieder das Ausgangssignal  $x(\tau)$ , vorausgesetzt,  $x(\tau)$  ist stetig. An Sprungstellen können sich aber Abweichungen des durch Rücktransformation gewonnenen Signals vom ursprünglichen Signal ergeben. Diesen Sachverhalt müssen wir noch klären.

#### Frequenzbegrenztes Signal

Ein Signal  $x(\tau)$  besitze das Spektrum  $X(\mathrm{j}\nu)$ . Angenommen, wir verwenden für die Rücktransformation nicht  $X(\mathrm{j}\nu)$ , sondern schränken das Spektrum durch ein ideales Tiefpassfilter auf den Bereich  $-\nu_{\mathrm{g}} < \nu < \nu_{\mathrm{g}}$  ein, d.h. für  $|\nu| < \nu_{\mathrm{g}}$  nimmt die Spektralfunktion die ursprünglichen Werte an, für  $|\nu| \geqslant \nu_{\mathrm{g}}$  verschwindet sie identisch. Wir sprechen dann von einem frequenzbegrenzten, genauer: von einem tiefpassbegrenzten Signal mit der bezogenen Grenzkreisfrequenz<sup>11</sup>  $\nu_{\mathrm{g}}$ . Rechnerisch bedeutet dies die Multiplikation des Spektrums mit dem Frequenzgang  $G(\mathrm{j}\nu) = \mathrm{rect}[\nu/(2\nu_{\mathrm{g}})]$  des idealen Tiefpassfilters, und im Zeitbereich wegen der Korrespondenz (3.70) die Faltung mit seiner Stoßantwort  $g(\tau) = \sin(\nu_{\mathrm{g}}\tau)/(\pi\tau)$ . Das tiefpassbegrenzte Signal ist daher aus

$$x_{\nu g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau') \frac{\sin[\nu_g(\tau - \tau')]}{\pi (\tau - \tau')} d\tau'$$
(3.84)

zu berechnen<sup>12</sup>. Weiters lässt sich im Bereich der verallgemeinerten Funktionen der Grenzübergang

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\sin(\nu \tau)}{\pi \tau} = \delta(\tau) \tag{3.85}$$

zeigen und damit für eine wachsende Frequenzgrenze wieder auf den Zusammenhang

$$\lim_{\nu_{g} \to \infty} x_{\nu g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau') \delta(\tau - \tau') d\tau'$$
(3.86)

schließen, entsprechend der rechten Seite von Gl.(3.83): Mit steigender Grezfrequenz strebt das zu einem Signal  $x(\tau)$  gehörende tiefpassbegrenzte Signal  $x_{\nu g}(\tau)$  für alle  $\tau$  gegen  $x(\tau)$ , vorausgesetzt, das Signal ist stetig.

#### Das Gibbs-Phänomen

Nun aber zum Verhalten an Sprungstellen! Das Wesentliche lässt sich am tiefpassbegrenzten Heaviside-Sprung erkennen, für den wir aus Gl.(3.84) zuerst

$$\varepsilon_{\nu g}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau') \frac{\sin[\nu_g(\tau - \tau')]}{\pi (\tau - \tau')} d\tau' = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin[\nu_g(\tau - \tau')]}{\pi (\tau - \tau')} d\tau',$$

 $<sup>^{11}</sup>$ Ist  $T_{\rm B}$  die gewählte Bezugsdauer und dem gemäß  $\omega_{\rm B}=1/T_{\rm B}$  die Bezugskreisfrequenz, so gehört zu  $\nu_{\rm g}$  die Grenzfrequenz  $f_{\rm g}=\nu_{\rm g}/(2\pi T_{\rm B}).$ 

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Dies zeigt übrigens, dass ein tiefpassbegrenztes Signal, streng genommen, nicht auch zeitbegrenzt sein kann. Dual dazu kann ein zeitbegrenztes Signal nicht auch tiefpassbegrenzt sein.

und dann durch eine Variablentransformation den Ausdruck

$$\varepsilon_{\nu g}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\nu_g \tau} \frac{\sin(\tau')}{\tau'} d\tau'$$
 (3.87)

gewinnen. Der zugehörige Verlauf ist in Abb.3.5 wiedergegeben. Sie sehen einen stetigen, oszillierenden Übergang mit den Haupt-Extremwerten bei  $\pm \pi/\nu_{\rm g}$ . Wenn wir die Frequenzgrenze  $\nu_{\rm g}$  erhöhen, wird zwar der Übergang steiler, die Größe der Extremwerte bleibt aber selbst für  $\nu_{\rm g} \to \infty$  konstant. Dieses eigenartige Verhalten wird Gibbs-Phänomen genannt.

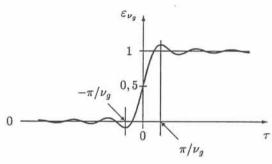


Abb. 3.5 Der tiefpassbegrenzte Heaviside-Sprung nach Gl.(3.87). Mit steigender Grenzfrequenz  $f_{\rm g} = \nu_{\rm g}/(2\pi T_{\rm B})$  wird der Übergang zwarsteiler, die Höhe des Überschwingens bleibt jedoch konstant (Gibbs-Phänomen).

Im Gegensatz zu stetigen Signalen nähert sich eine tiefpassbegrenzte Sprungfunktion bei wachsender Grenzfrequenz nicht an jeder Stelle der ursprünglichen Sprungfunktion an. Es lässt sich aber zeigen, dass der integrierte quadratische Fehler im Sinn von Gl.(3.76) mit steigender Grenzfrequenz beliebig klein wird.

Dem Verlauf in Abb.3.5 entnehmen wir an der Stelle  $\tau=0$  den Funktionswert  $\varepsilon_{\nu g}(0)=1/2$ , der selbst für  $\nu_g\to\infty$  erhalten bleibt. Auch darin drückt sich eine allgemeine Eigenschaft aus: Die Fourier-Rücktransformation liefert an einer Sprungstelle immer das arithmetische Mittel aus dem linkseitigen und dem rechtsseitigen Grenzwert der Originalfunktion, unabhängig davon, welcher Wert dort ursprünglich festgelegt wurde.

## 3.6 Zusammenfassung

Signale lassen sich einerseits im Zeitbereich, andererseits im Frequenzbereich darstellen. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Darstellungsformen wird durch die Fourier-Transformation hergestellt, den wichtigsten Vertreter aus der Klasse der linearen Funktional-Transformationen.

Für das Arbeiten mit der Fourier-Transformation ist die Kenntnis der grundlegenden Eigenschaften und die Beherrschung der wichtigsten Rechenregeln unerlässlich. Dazu gehören insbesondere die Linearitätseigenschaft, das reziproke Verhalten bei Zeit- und Frequenzdehnung und die Frage, wie sich eine Differentiation im Zeitbereich im Frequenzbereich auswirkt.

Weitere nützliche Erkenntnisse lassen sich aus der Untersuchung von Symmetrieeigenschaften gewinnen. Beispielsweise zeigt sich, dass für reellwertige Signale auf die Einbeziehung negativer Frequenzwerte verzichtet werden kann, weil der Betrag des Spektrums immer eine gerade, der Winkel immer eine ungerade Funktion der Frequenzvariablen ist. Für reelle kausale Signale besteht sogar eine universelle Verknüpfung zwischen dem Realteil und dem Imaginärteil des Spektrums.

Ganz besonders attraktiv verhält sich die Fourier-Transformation bezüglich der Faltung und damit verwandter Operationen: Das Faltungsprodukt zweier Signale im Zeitbereich wird im Frequenzbereich zum gewöhnlichen Produkt der Spektren. Damit können wir z.B. das Spektrum des Ausgangssignals eines LTI-Systems ganz einfach durch Multiplikation des Eingangsspektrums mit dem komplexen Frequenzgang des Systems gewinnen.

Frequenzbegrenzte Signale können nie auch streng zeitbegrenzt sein, und zeitbegrenzte Signale nie auch streng frequenzbegrenzt. Dies zeigt eine genauere Betrachtung der Fourier-Rücktransformation. Bei sprungunstetigen Signalen ist überdies das Gibbs-Phänomen zu beachten.

# Kapitel 4

# LTI-Systeme im Frequenzbereich

Als besonders attraktive Eigenschaft der Fourier-Transformation haben wir festgestellt, dass sich das Faltungsprodukt auf das gewöhnliche Produkt der Transformierten abbildet. Abgesehen vom Nulleingangsteil der Systemantwort lässt
sich damit das Spektrum des Ausgangssignals einfach durch Multiplikation des
Eingangsspektrums mit dem komplexen Frequenzgang gewinnen. Diese Beobachtung bildet die Grundlage für die Beschreibung des Verhaltens von LTI-Systemen
im Frequenzbereich.

## 4.1 Systemantworten bei Sinus-Eingängen

Am Eingang eines *stabilen*, linearen, zeitinvarianten Systems, beschrieben durch ein Differentialgleichungsmodell der Form (2.1), liege die bezogene Sinusschwingung

$$u(\tau) = \text{Re}\left[e^{j\nu\tau}\right] = \cos(\nu\tau).$$
 (4.1)

Als Bezugswert für die Eingangsgröße wurde deren als konstant vorausgesetzte Amplitude gewählt.  $\tau=t/T_{\rm B}$  ist die bezogene Zeitvariable und  $\nu=\omega/\omega_{\rm B}=f/f_{\rm B}$  mit  $\omega_{\rm B}=2\pi f_{\rm B}$  die bezogene (Kreis-)Frequenz. Die Bezugswerte  $\omega_{\rm B}$  und  $T_{\rm B}$  werden meist passend verknüpft, hier durch  $\omega_{\rm B}T_{\rm B}=1$ , so dass  $\omega t=\nu\tau$ . Manchmal wird auch die Verknüpfung  $f_{\rm B}T_{\rm B}=1$  festgelegt, als Bezugsdauer  $T_{\rm B}$  also die zur Frequenz  $f_{\rm B}$  gehörende Periodendauer gewählt. In diesen Fällen ist Gl.(4.1) durch  $u(\tau)=\cos(2\pi\nu\tau)$  zu ersetzen.

#### Eingeschwungener Zustand

Wenn alle transienten (flüchtigen) Vorgänge in unserem stabilen System abgeklungen sind, dann stellt sich am Ausgang eine stationäre Sinusschwingung  $y_{\rm st}(\tau)$  ein, der eingeschwungene Zustand. Bei bekannter Übertragungsfunktion G(s) lässt sich  $y_{\rm st}(\tau)$  als partikuläre Lösung der System-Differentialgleichung nach dem in Kapitel 2 vorgestellten Konstruktionsverfahren sofort angeben,

$$y_{\rm st}(\tau) = y_{\rm p}(\tau) = \operatorname{Re}\left[G(\mathrm{j}\nu)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\nu\tau}\right] = |G|(\nu)\cos[\nu\tau + \varphi_G(\nu)],$$
 (4.2)

wobei in der Polardarstellung

$$G(j\nu) = |G|(\nu) e^{j\varphi_G(\nu)}$$
(4.3)

der Ausdruck  $|G|(\nu) = |G(j\nu)|$  den Betrag und  $\varphi_G(\nu) = \text{arc}[G(j\nu)]$  den Winkel der für  $s = j\nu$  im Allgemeinen komplexwertigen Übertragungsfunktion angibt.

Um ein konkretes **Beispiel** vor Augen zu haben, betrachten wir wieder unsere Schaltung aus Abb.1.1, die zugehörige Differentialgleichung (2.4) mit den Koeffizienten (2.5) und die Übertragungsfunktion (2.13),

$$y''' + 0, 4y'' + 1,03y' + 0,2y = 0,1u; (4.4)$$

$$G(s) = \frac{0,1}{s^3 + 0,4s^2 + 1,03s + 0,2} \ . \tag{4.5}$$

Das Eingangssignal (4.1) liefert hier nach  $\mathrm{Gl.}(4.2)$  am Ausgang die stationäre Schwingung

$$y_{\text{st}}(\tau) = \text{Re}\left[\frac{0, 1 e^{j\nu\tau}}{(j\nu)^3 + 0, 4 (j\nu)^2 + 1, 03 (j\nu) + 0, 2}\right]$$
$$= \text{Re}\left[\frac{0, 1 e^{j\nu\tau}}{0, 2 - 0, 4\nu^2 + j (1, 03 - \nu^3)}\right]$$
(4.6)

oder

$$y_{\rm st}(\tau) = |G|(\nu)\cos\left[\nu\tau + \varphi_G(\nu)\right] \tag{4.7}$$

mit

$$|G|(\nu) = \frac{0,1}{\sqrt{(0,2-0,4\nu^2)^2 + (1,03-\nu^3)^2}},$$

$$\cos[\varphi_G(\nu)] = \frac{0,2-0,4\nu^2}{0,1} |G|(\nu),$$

$$\sin[\varphi_G(\nu)] = -\frac{1,03-\nu^3}{0,1} |G|(\nu).$$
(4.8)

Zu jedem Wert der Frequenzvariablen  $\nu$  lassen sich demnach die bezogene Amplitude  $|G|(\nu)$  und der Nullphasenwinkel  $\varphi_G(\nu)$  des Ausgangssignals berechnen.

#### Einschwingvorgang

In Abb.4.1 sehen Sie, wie sich für unser Beispiel, ausgehend vom Nullzustand, die stationäre Ausgangsschwingung bei gleichen Amplituden aber unterschiedlichen Frequenzen der Eingangsspannung einstellt. Die Ausgangsgröße setzt sich additiv zusammen aus dem  $transienten Teil y_{tr}$  und dem  $stationären Teil y_{st}$ , entsprechend der Aufspaltung der Gesamtlösung in die homogene und in die partikuläre Lösung,

$$y(\tau) = y_{h}(\tau) + y_{p}(\tau) = y_{tr}(\tau) + y_{st}(\tau) = y_{tr}(\tau) + |G|(\nu) \cos[\nu \tau + \varphi_{G}(\nu)].$$
(4.9)

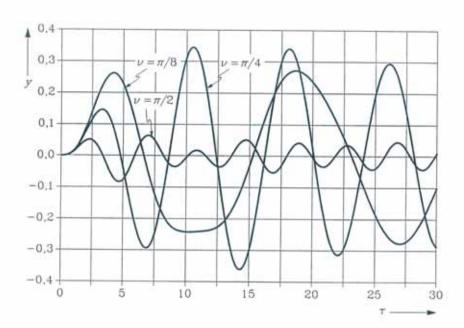


Abb. 4.1 Einschwingvorgänge für die Schaltung aus Abb. 1.1 mit den dort angegebenen Parameterwerten. An den Eingang werden die bezogenen Spannungen  $u=\cos(\nu\tau)\varepsilon(\tau)$  gelegt. Mit der Bezugsdauer  $T_{\rm B}=1$  ms entsprechen die bezogenen Frequenzen  $\nu=\pi/2,\,\pi/4,\,\pi/8$  den Periodendauern T=4 ms, 8 ms, 16 ms.

In stabilen Systemen verschwindet  $y_{\rm tr}(\tau) = y_{\rm h}(\tau)$  mit der Zeit, während  $y_{\rm st}(\tau) = y_{\rm p}(\tau)$  zusammen mit der eingeprägten Schwingung am Eingang bestehen bleibt.  $y_{\rm st}(\tau)$  heißt deshalb auch erzwungene Schwingung.

Beachten Sie: In unserem Beispiel wird für große Werte von  $\nu$  die Amplitude der Ausgangsschwingung sehr klein, weil  $|G|(\nu) \to 0$  für  $\nu \to \infty$ . Das System wirkt demnach als Tiefpass.

Durch die messtechnische Erfassung des eingeschwungenen Zustands der Ausgangsgröße zu einer Sinusgröße fester Frequenz am Eingang lassen sich der Betrag |G| und der Winkel  $\operatorname{arc}(G)$  experimentell bestimmen. Messungen über ein ganzes Frequenzband, durchgeführt meist mit eigens dafür konzipierten Messgeräten (Frequenz-Analysatoren, Spektrum-Analysatoren), liefern den Betragsfrequenzgang und den Winkelfrequenzgang. Es gibt unterschiedliche Arten der Darstellung dieser Frequenzgänge. Mit einer häufig gebrauchten, den Bode-Diagrammen, werden wir uns in den Abschnitten 4.3 und 4.4 befassen.

## 4.2 Der komplexe Frequenzgang

Der komplexe Frequenzgang  $G(j\nu)$  liefert, wie Gl.(4.2) zeigt, für ein stabiles, lineares und zeitinvariantes System zu einer Sinusschwingung beliebiger Frequenz am Eingang die zugehörige stationäre Sinus-Ausgangsschwingung gleicher Frequenz. Seine Bedeutung reicht jedoch weit über diese spezielle Signalform hinaus.

#### Fourier-Transformation der Stoßantwort

Ein LTI-System lässt sich bekanntlich durch seine Stoßantwort  $g(\tau)$  vollständig charakterisieren. Andererseits haben wir bereits im Abschnitt 3.1 die fundamentale Fourier-Korrespondenz

$$g(\tau) \circ - G(j\nu)$$
 (4.10)

festgestellt, d.h. auch der komplexe Frequenzgang  $G(j\nu)$  reicht zur vollständigen Charakterisierung des Systems aus.

Ich möchte dies wieder mit dem Beispiel unseres Systems aus Abb.1.1 verdeutlichen. Spalten wir die zugehörige Übertragungsfunktion (2.13) durch eine Partialbruchzerlegung gemäß

$$G(s) = \frac{0,1}{(s+0,202) \left[ (s+0,099)^2 + (0,990)^2 \right]}$$

$$= \frac{0,101}{s+0,202} + \frac{-0,101 (s+0,099)}{(s+0,099)^2 + (0,990)^2} + \frac{0,011 \cdot 0,990}{(s+0,099)^2 + (0,990)^2}$$
(4.11)

auf, so ergibt sich der komplexe Frequenzgang in einer Form

$$G(\mathrm{j}\nu) = \frac{0,101}{\mathrm{j}\nu + 0,202} + \frac{-0,101\left(s + 0,099\right)}{\left(\mathrm{j}\nu + 0,099\right)^2 + \left(0,990\right)^2} + \frac{0.011 \cdot 0,990}{\left(\mathrm{j}\nu + 0,099\right)^2 + \left(0,990\right)^2} \ ,$$

die unter Anwendung der Linearitätseigenschaft direkt der Fourier-Rücktransformation über Tab.3.1 (Zeilen 6, 12, 13) zugänglich ist. Somit lässt sich die Stoßantwort

$$g(\tau) = \mathcal{F}^{-1} [G(j\nu)]$$

$$= [0, 101 e^{-0,202\tau} - 0, 101 e^{-0,099\tau} \cos(0, 990\tau) + 0, 011 e^{-0,099\tau} \sin(0, 990\tau)] \varepsilon(\tau)$$

in Übereinstimmung mit Gl.(2.59) und Abb.1.16 durch inverse Fourier-Transformation aus dem komplexen Frequenzgang berechnen. Die Differentialgleichung braucht dabei nicht gelöst zu werden.

#### Systemanalyse im Frequenzbereich

Einer Darstellung der Systemantwort  $y(\tau)$  als Faltungsprodukt der Stoßantwort mit dem Eingangssignal  $u(\tau)$  korrespondiert im Frequenzbereich die Angabe des Ausgangsspektrums  $Y(j\nu)$  als gewöhnliches Produkt des komplexen Frequenzgangs mit dem Eingangsspektrum  $U(j\nu)$ ,

$$y(\tau) = g(\tau) * u(\tau) \circ - Y(j\nu) = G(j\nu)U(j\nu).$$
(4.12)

Diese zuletzt in Gl.(3.71) festgestellte und in Abb.4.2 nochmals veranschaulichte Eigenschaft ist grundlegend für die ganze Theorie der LTI-Systeme.

Sie ist aber auch für die Anwendungen sehr wichtig, weil sich die Analyse linearer Systeme häufig im Frequenzbereich deutlich einfacher durchführen lässt

$$\begin{array}{c|c} u(\tau) & g(\tau) & y(\tau) = g(\tau) * u(\tau) \\ \hline U(j\nu) & G(j\nu) & Y(j\nu) = G(j\nu) U(j\nu) \end{array}$$

Abb. 4.2 Wird der Anfangszeitpunkt nach  $-\infty$  verschoben, so lässt sich das Ausgangssignal eines LTI-Systems im Zeitbereich als Faltungsprodukt im Frequenzbereich als gewöhnliches Produkt darstellen.

als im Zeitbereich. Dies gilt insbesondere für elektrische Schaltungen in Verbindung mit der komplexen Wechselstromrechnung.

In unserem Beispiel der Schaltung Abb.1.1 liefern die Kirchhoff-Regeln und die Elementegleichungen im Komplexen<sup>1</sup>

$$\begin{split} \underline{U}_{\mathrm{E}} &= \left(R_1 + \mathrm{j}\omega L_1\right)\underline{I}_1 + \underline{U}_{\mathrm{C}} \;, \\ 0 &= \left(R_2 + R_3 + \mathrm{j}\omega L_2\right)\underline{I}_2 - \underline{U}_{\mathrm{C}} \;, \\ \underline{U}_{\mathrm{A}} &= R_3\underline{I}_2 \;, \\ 0 &= -\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \mathrm{j}\omega C\underline{U}_{\mathrm{C}} \;, \end{split}$$

und nach Elimination von  $\underline{I}_1, \underline{I}_2$  und  $\underline{U}_C$ 

$$\underline{U}_{E} = \frac{1}{R_{3}} \{ L_{1}L_{2}C (j\omega)^{3} + [R_{1}L_{2}C + (R_{2} + R_{3})L_{1}C] (j\omega)^{2} + [L_{1} + L_{2} + R_{1}(R_{2} + R_{3})C] (j\omega) + R_{1} + R_{2} + R_{3} \} \underline{U}_{A}.$$

Nun ist der komplexe Frequenzgang einfach des Verhältnis der bezogenen komplexen Effektivwerte der Ausgangsgröße zur Eingangsgröße. Ausgedrückt durch die bezogene Frequenzvariable  $\nu=\omega/\omega_{\rm B}=\omega T_{\rm B}$  ergibt sich daher

$$G(j\nu) = \frac{\underline{U}_{A}/U_{AB}}{\underline{U}_{E}/U_{EB}} = \frac{U_{EB}}{U_{AB}} \cdot \frac{\underline{U}_{A}}{\underline{U}_{E}} = \frac{b_{0}}{(j\nu)^{3} + a_{2}(j\nu)^{2} + a_{1}(j\nu) + a_{0}}$$
(4.13)

mit den nach Gl.(2.4) zusammengefassten Koeffizienten. Halten wir fest: Durch eine komplexe Wechselstrom-Analyse können wir den komplexen Frequenzgang  $G(j\nu)$  und mit  $j\nu\mapsto s$  auch die Übertragungsfunktion der Schaltung auf rein algebraischem Weg bestimmen. Die System-Differentialgleichung braucht dabei nicht aufgestellt zu werden.

### Dämpfungsmaß und Phasenmaß

Die Werte des komplexen Frequenzgangs werden manchmal komplexe Verstärkung, die Reziprokwerte  $D(j\nu)=1/G(j\nu)$  häufig komplexe Dämpfung genannt. Als logarithmisches Maß geschrieben, ergibt sich durch die Aufspaltung in Real- und Imaginärteil,

$$\ln[G(j\nu)] = \ln |G(j\nu)| + j \operatorname{arc}[G(j\nu)] = \ln |G|(\nu) + j\varphi_G(\nu),$$
 (4.14)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Die komplexen Effektivwerte von Strömen und Spannungen werden hier der Deutlichkeit halber durch Unterstriche gekennzeichnet.

auf natürliche Weise eine additive Zerlegung in den Betragsteil und in den Winkelteil des Frequenzgangs. Entsprechend liefert die Zerlegung der logarithmierten Dämpfung in Real- und Imaginärteil,

$$\ln[D(j\nu)] = a(\nu) + jb(\nu),$$
 (4.15)

das Dämpfungsmaß  $a(\nu)$  und das Phasenmaß (den Dämpfungswinkel)  $b(\nu)$ , wobei

$$a(\nu) = -\ln |G|(\nu), \quad b(\nu) = -\varphi_G(\nu).$$
 (4.16)

Als weitere Kenngrößen sind speziell für Übertragungsglieder die (bezogenen) Werte der Phasenlaufzeit  $\tau_{\varphi}$  und der Gruppenlaufzeit  $\tau_{g}$ , definiert durch<sup>2</sup>

$$\tau_{\varphi} = \frac{b}{\nu}$$
,  $\tau_{g} = \frac{db}{d\nu}$ , (4.17)

in Verwendung.

## 4.3 Betragsfrequenzgang als Bode-Diagramm

Die Darstellung des Betragsfrequenzgangs als **Bode-Diagramm**, d.h. das Auftragen der Werte |G| in einem logarithmischen Maßstab über der ebenfalls logarithmisch geteilten Frequenzskala, bietet eine Reihe von Vorteilen. Insbesondere lässt sich meist eine gute Näherung an den tatsächlichen Verlauf ohne weitere Rechnung allein durch Inspektion von G(s) angeben.

Wir fassen die Werte der Übertragungsfunktion hier stets als Verhältnisse der physikalischen Dimension 1 von "Feldgrößen" auf und definieren dem gemäß als logarithmisches Maß ihrer Beträge

$$\ln |G| = 20 \lg |G| dB,$$
 (4.18)

wobei die Pseudo-Einheit dB (Dezibel) für den Zahlenfaktor  $1 dB = 0, 1 \cdot \ln(\sqrt{10}) = 0, 1151 \dots$  steht und deshalb *nicht* ohne Weiteres weggelassen werden darf. Die zugehörige Achse im Bode-Diagramm wird meist in Dezibel skaliert. Es ist üblich, die Frequenzachse entweder mit den absoluten Werten der Frequenz bzw. der Kreisfrequenz zu beschriften, oder mit den Werten der bezogenen Frequenz (nicht in Dezibel!), die Achse aber dekadisch logarithmisch zu teilen. Wir gehen von reellwertigen Stoßantworten aus, können uns also auf *positive Frequenzwerte* beschränken<sup>3</sup>.

#### Pole und Nullstellen

Wie das Bode-Diagramm des Betragsfrequenzgangs eines Systems bei bekannter, rationaler Übertragungsfunktion G(s) aufgebaut ist, soll das folgende **Beispiel** zeigen. Wir untersuchen

$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s} = \frac{b_1 (s - q_1)}{s (s - p_1) (s^2 + 2\vartheta \nu_0 s + \nu_0^2)}$$
$$= \frac{k (s/q_1 - 1)}{s (s/p_1 - 1) [s^2/\nu_0^2 + (2\vartheta/\nu_0)s + 1]}$$
(4.19)

 $<sup>^2</sup>$ Mit der Bezugsdauer  $T_{\rm B}$  gilt wegen  $\omega_{\rm B}T_{\rm B}=1$  in Originalvariablen  $t_\varphi=\tau_\varphi T_{\rm B}=b/\omega$  und  $t_{\rm g}=\tau_{\rm g}T_{\rm B}={\rm d}b/{\rm d}\omega.$   $^3|G|(\nu)$  ist eine gerade Funktion (s. Abschnitt 3.3, Pkt.2).

mit reellen Zahlen  $b_1, q_1, p_1, \vartheta, \nu_0$  und mit  $k = (b_1q_1)/(p_1\nu_0^2) = b_0/a_1$ . Es ist

$$G(j\nu) = \frac{k (j\nu/q_1 - 1)}{j\nu (j\nu/p_1 - 1) [(j\nu)^2/\nu_0^2 + (2\vartheta/\nu_0)j\nu + 1]},$$
 (4.20)

und damit

$$\ln |G(j\nu)| = \ln |k| + \ln |j\nu/q_1 - 1| - \ln |j\nu| - \ln |j\nu/p_1 - 1| - \ln |(j\nu)^2/\nu_0^2 + (2\vartheta/\nu_0)j\nu + 1|.$$
(4.21)

Das logarithmische Maß des Betrags von G ergibt sich demnach als Summe der logarithmischen Maße der Beträge der einzelnen Faktoren – mit positivem Vorzeichen, wenn sie im Zähler stehen, mit negativem Vorzeichen für Faktoren im Nenner. Das gesamte Bode-Diagramm ist die algebraische Summe dieser Einzeldiagramme, die im Folgenden gesondert besprochen werden.

• 
$$\ln|k| = 20 \lg|k| dB$$

 $\ln |k|$  ist eine Konstante, ihr Graph damit eine Gerade parallel zur  $\nu$ -Achse. Die "Verstärkung" k verschiebt das Bode-Diagramm um den Betrag des Wertes  $20 \lg |k| dB$  nach unten (|k| < 1) oder nach oben (|k| > 1).

• 
$$\ln |\mathrm{j} \nu/q_1 - 1| = 20 \lg |\mathrm{j} \nu/q_1 - 1| \mathrm{dB}$$

Für  $\nu \ll |q_1|$  gilt  $\ln |\mathrm{j}\nu/q_1-1| \approx \ln(1)=0$ . Für  $\nu=|q_1|$  ist  $\ln |\mathrm{j}\nu/q_1-1|=\ln |\pm \mathrm{j}-1|=20 \lg(\sqrt{2})\mathrm{dB}=3,01\mathrm{dB},$  und für  $\nu\gg |q_1|$  haben wir  $\ln |\mathrm{j}\nu/q_1-1|\approx \ln |\mathrm{j}\nu/q_1|=20 \lg(\nu)\mathrm{dB}-20 \lg |q_1|\mathrm{dB}.$  Der letzte Ausdruck repräsentiert bei dekadisch logarithmischer Teilung der Frequenzachse eine Gerade der Steigung  $+20\mathrm{dB/Dekade}.$ 

Das Bode-Diagramm dieses Faktors mit den in Gl.(4.22) verwendeten Koeffizienten zeigt Abb.4.3. Dargestellt ist dort auch die genäherte Angabe durch die beiden Grenzwertgeraden. Sie schneiden einander bei der (bezogenen) Knickfrequenz  $\nu = |q_1|$ . Der Bode-Graph verläuft 3,01dB oberhalb des Knickpunkts und nähert sich für  $\nu \ll |q_1|$  und  $\nu \gg |q_1|$  den Asymptoten.

$$\bullet \quad \boxed{-\ln|\mathbf{j}\nu| = -20\lg|\mathbf{j}\nu|\mathrm{dB}}$$

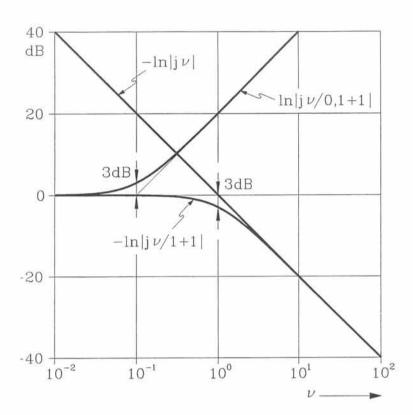
Der Pol im Ursprung liefert  $-\ln|j\nu|=-20\lg(\nu)dB$ , also eine Gerade mit der negativen Steigung -20dB/Dekade und dem Nulldurchgang bei  $\nu=1$ . Abb.4.3 zeigt auch diese Kurve.

• 
$$-\ln|j\nu/p_1 - 1| = -20 \lg|j\nu/p_1 - 1| dB$$

Die Behandlung des einfachen reellen Pols  $p_1$  erfolgt analog der Behandlung der einfachen reellen Nullstelle  $q_1$ ,

$$-\ln |\mathrm{j} \nu/p_1 - 1| = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für} \quad \nu \ll |p_1| \,, \\ -3,01 \mathrm{dB} & \text{für} \quad \nu = |p_1| \,, \\ -20 \, \mathrm{lg}(\nu) \mathrm{dB} + 20 \, \mathrm{lg} \, |p_1| \, \mathrm{dB} & \text{für} \quad \nu \gg |p_1| \,. \end{array} \right.$$

Die bezogene Knickfrequenz beträgt hier  $\nu=|p_1|$ , und der Bode-Graph verläuft 3,01dB unterhalb des Knickpunkts. Sie sehen das in Abb.4.3.

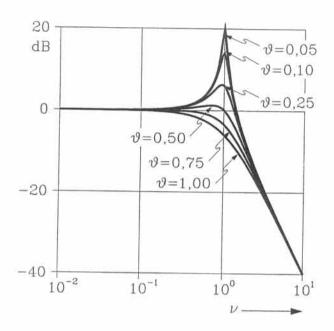


**Abb. 4.3** Die Faktoren der Übertragungsfunktion erscheinen im logarithmischen Maßstab des Bode-Diagramms als Summanden. Dargestellt sind der zweite, dritte und vierte Term auf der rechten Seite der Gl. (4.21) mit  $q_1 = -0, 1$  und  $p_1 = -1$ .

• 
$$\left[ -\ln \left| (\mathbf{j}\nu)^2 / \nu_0^2 + (2\vartheta / \nu_0)\mathbf{j}\nu + 1 \right| = -20 \lg \left| -\nu^2 / \nu_0^2 + (2\vartheta / \nu_0)\mathbf{j}\nu + 1 \right| dB$$

Für  $0 < \vartheta < 1$ , was wir hier voraussetzen wollen, liegt ein konjugiert komplexes Polpaar vor. Bei niedrigen Frequenzen,  $\nu \ll \nu_0$ , ist der Term näherungsweise Null. Dagegen erhalten wir für große Frequenzen,  $\nu \gg \nu_0$ , näherungsweise  $-40 \lg(\nu) \mathrm{dB} +40 \lg(\nu_0) \mathrm{dB}$ , also eine Asymptote mit der negativen Steigung  $-40 \mathrm{dB/Dekade}$  und dem Nulldurchgang bei  $\nu = \nu_0$ . Zu dieser Frequenz gehört der Wert  $-20 \lg(2\vartheta) \mathrm{dB}$ , der Kurvenverlauf hängt dort also im Wesentlichen vom Dämpfungsgrad  $\vartheta$  (bzw. vom Verlustfaktor  $d=2\vartheta$  oder dem Gütefaktor Q=1/d) ab. Typische Kurven für unterschiedliche Dämpfungsgrade zeigt Abb.4.4.

Erinnern Sie sich an die Eigenschaften schwach gedämpfter Systeme  $(0 < \vartheta < 0,5)$  im Hinblick auf die Sprungantwort: Starkes Überschwingen, lange Setzzeit. Für Sinus-Eingänge zeigt Abb.4.4 die andere Seite dieses Verhaltens, nun aber in jeweils eingeschwungenen Zuständen. Die Amplitude der stationären Sinusschwingung am Ausgang nimmt für kleine Dämpfungsgrade in der Umgebung der Kennfrequenz stark überhöhte Werte an (Resonanz).



**Abb. 4.4** Bode-Diagramm des Betragsfrequenzgangs der Übertragungsfunktion  $G(s)=1/(s^2+2\vartheta s+1)$  entsprechend dem letzten Term in Gl. (4.21) mit der bezogenen Kennkreisfrequenz  $\nu_0=1$ .

#### Der zusammengesetzte Verlauf

Der Betragsfrequenzgang als Bode-Diagramm ist die additive Überlagerung der zu den einzelnen Faktoren gehörenden Beiträge. Dies kann natürlich exakt durchgeführt werden, mit etwas Übung lässt sich jedoch allein aus der "Verstärkung" k und den Lagen der Pole und Nullstellen eine i.A. gute Näherung angeben. Abb.4.5 zeigt die Zusammensetzung für die Übertragungsfunktion (4.19) mit  $k=10;\ q_1=-0,1;\ p_1=-1;\ \nu_0=10;\ \vartheta=0,2;$  also

$$G(s) = \frac{10(s/0, 1+1)}{s(s+1)[s^2/100 + (0, 4/10)s + 1]}.$$
 (4.22)

Beachten Sie: Es ist für den Verlauf des Betragsfrequenzgangs belanglos, ob die Pole und Nullstellen in der linken oder in der rechten Halbebene liegen. Erst gemeinsam mit dem Winkelfrequenzgang ist diese Lage der Pole und Nullstellen erkennbar.

## 4.4 Winkelfrequenzgang als Bode-Diagramm

Auch der Frequenzgang des Winkels lässt sich in der Darstellung als Bode-Diagramm durch die Überlagerung der Einzelbeiträge der Faktoren in der Übertragungsfunktion gewinnen. Die Frequenzskala wird auch hier üblicherweise dekadisch logarithmisch geteilt, die Winkelskala ist jedoch *linear* zu teilen.

Als Beispiel nehmen wir wieder die Übertragungsfunktion (4.19). Für die

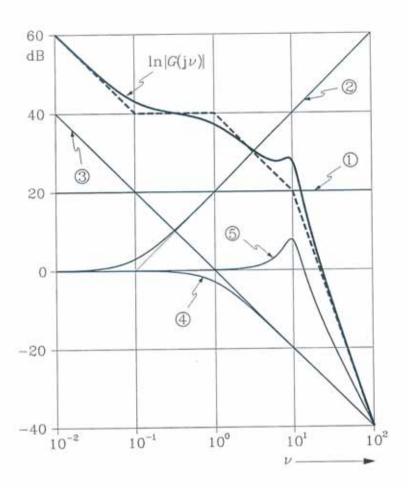


Abb. 4.5 Zusammensetzen der Teilkurven zum Bode-Diagramm für den Betragsfrequenzgang der Übertragungsfunktion Gl. (4.22). Die Nummerierung der Teilkurven entspricht der Position des zugehörigen Terms auf der rechten Seite der Gl. (4.21). Das approximierende Polygon ist strichliert eingetragen.

Winkelwerte gilt

$$\operatorname{arc}[G(j\nu)] = \operatorname{arc}(k) + \operatorname{arc}(j\nu/q_1 - 1) - \operatorname{arc}(j\nu) - \operatorname{arc}(j\nu/p_1 - 1)$$
  
 $- \operatorname{arc}[(j\nu)^2/\nu_0^2 + (2\vartheta/\nu_0)j\nu + 1],$  (4.23)

dargestellt in Abb.4.6 mit k=10;  $q_1=-0,1$ ;  $p_1=-1$ ;  $\nu_0=10$ ;  $\vartheta=0,2$ ; entsprechend Gl.(4.22). Auch hier stellt die Beschränkung auf positive Frequenzwerte für Systeme mit einer rellen Stoßantwort keinen Verlust an Information dar:  $\operatorname{arc}[G(j\nu)]$  ist eine ungerade Funktion von  $\nu$ .

Jeder einfache, reelle Pol  $p_i$  in der linken Halbebene trägt zum Winkel an der Stelle  $\nu=-p_i$  den Wert  $-\pi/4$  und asymptotisch, für  $\nu\to\infty$ , den Wert  $-\pi/2$  bei. Jede einfache, reelle Nullstelle  $q_i$  in der linken Halbebene liefert bei der Frequenz  $\nu=-q_i$  den Winkelbeitrag  $+\pi/4$  und für  $\nu\to\infty$  den Beitrag  $+\pi/2$ . Nullstellen vergrößern also den Winkel, Pole verkleinern ihn.

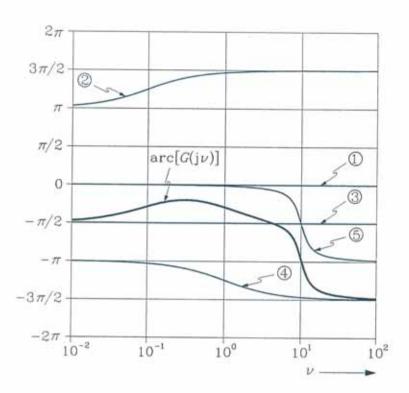


Abb. 4.6 Zusammensetzen der Teilkurven zum Bode-Diagramm für den Winkelfrequenzgang der Übertragungsfunktion Gl. (4.22). Die Nummerierung der Teilkurven entspricht der Position des zugehörigen Terms auf der rechten Seite der Gl. (4.23).

## Pole und Nullstellen in der rechten Halbebene

Wenn man die Bode-Diagramme des Betragsfrequenzgangs und des Winkelfrequenzgangs jeweils für sich allein betrachtet, so bleibt immer noch eine Mehrdeutigkeit bezüglich der Pole und Nullstellen und ihrer Lage in der linken oder rechten Halbebene bestehen. Erst beide Diagramme zusammen lassen eindeutige Aussagen zu. Beispielsweise gehört zu den Übertragungsfunktionen

$$G_1(s) = (s+1)/(s+10),$$
  $G_2(s) = (s+1)/(s-10),$   $G_3(s) = (s-1)/(s+10),$   $G_4(s) = (s-1)/(s-10)$  (4.24)

jeweils der gleiche Betragsfrequenzgang, sie besitzen aber unterschiedliche Winkelfrequenzgänge (Abb.4.7).

Wir nennen ein System dann ein Minimalwinkelsystem (Minimalphasensystem, Phasenminimumsystem), wenn sowohl die Pole wie auch die Nullstellen in der abgeschlossenen linken Halbebene liegen. Von den Übertragungsfunktionen (4.24) repräsentiert nur  $G_1(s)$  ein solches System, und nur  $G_1(s)$  und  $G_3(s)$  gehören zu stabilen Systemen. Es lässt sich zeigen: Unter allen stabilen Systemen mit gleichem Betragsfrequenzgang weist das Minimalwinkelsystem in jedem beliebigen Frequenzintervall die kleinste Winkeländerung auf – daher der Name. Und: Der Winkelfrequenzgang eines Minimalwinkelsystems lässt sich eindeutig aus dem Betragsfrequenzgang berechnen. Umgekehrt ist die Berechnung des

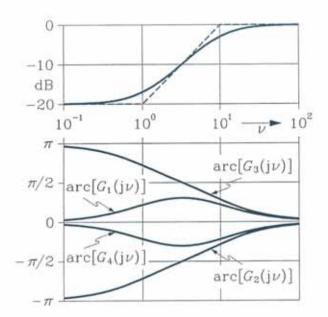


Abb. 4.7 Die vier als Gln. (4.24) angegebenen Übertragungsfunktionen besitzen den gleichen Betragsfrequenzgang, aber unterschiedliche Winkelfrequenzgänge. Nur  $G_1(s)$  repräsentiert ein Minimalwinkelsystem.

Betragsfrequenzgangs aus dem Winkelfrequenzgang nur bis auf eine konstante "Verstärkung" möglich – allerdings auch nur für Minimalwinkelsysteme. Wesentlich unterschiedliche Übertragungsfunktionen können nämlich gleiche Winkelfrequenzgänge besitzen, beispielsweise  $G_1(s)$  aus (4.24) und

$$G_5(s) = (s-10)/(s-1),$$
 (4.25)

dargestellt in Abb.4.8.  $G_5(s)$  ist kein Minimalwinkelsystem. Wir halten fest: Bei Minimalwinkelsystemen genügt zur vollständigen Charakterisierung allein die Angabe des Betragsfrequenzgangs.

## 4.5 Totzeitsysteme

Bei der expliziten Behandlung von LTI-Systemen im Zeitbereich und im Frequenzbereich haben wir uns in der Regel auf solche Systeme beschränkt, die sich durch System-Differentialgleichungen in der Standardform (2.1) beschreiben lassen: Eingangsgröße, Ausgangsgröße und deren Ableitungen werden zum jeweils gleichen Zeitpunkt miteinander verknüpft. Modelle dieser Art sind nicht immer brauchbar, beispielsweise dann, wenn Reaktionszeiten von Komponenten oder Laufzeiten von Signalen berücksichtigt werden müssen. Treten solche Effekte auf, so sprechen wir von Totzeitsystemen oder Laufzeitsystemen oder Systemen mit Zeitverzögerung. Sie können – müssen aber nicht – linear und zeitinvariant sein.

LTI-Systeme mit Totzeiten lassen sich zwar durch Stoßantworten  $g(\tau)$  mit einer einzigen Zeitvariablen charakterisieren, trotzdem gestaltet sich ihre Behandlung im Zeitbereich meist wesentlich komplizierter als die von LTI-Systemen

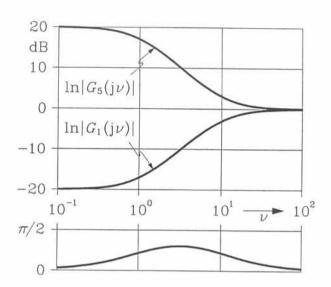


Abb. 4.8 Die Übertragungsfunktionen  $G_1(s)$  (Gl. (4.24)) $_1$  und  $G_5(s)$  (Gl. (4.25)) besitzen unterschiedliche Betragsfrequenzgänge, aber den gleichen Winkelfrequenzgänge. Nur  $G_1(s)$  repräsentiert ein Minimalwinkelsystem.

ohne Totzeiten. Warum das so ist, können wir uns mit dem Zeitverschiebungssatz (3.32) klar machen.

Nehmen wir als Beispiel das durch die Gleichung

$$y'(\tau) + y(\tau - \tau_{\mathbf{v}}) = u(\tau) \tag{4.26}$$

mit einer festen (bezogenen) Verzögerungszeit  $\tau_v$  beschriebene LTI-System. Tatsächlich ist (4.26) keine Differentialgleichung, sondern ein Mischtypus aus einer Differential- und einer Differenzengleichung, weil die Werte von y', y und u nicht zum jeweils gleichen Zeitpunkt, sondern zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $\tau$  und  $\tau - \tau_v$  miteinander verknüpft sind.

Die Fourier-Transformation von Gl.(4.26),

$$j\nu Y(j\nu) + e^{-j\nu\tau_{\mathbf{v}}}Y(j\nu) = U(j\nu),$$

liefert ohne Weiteres den komplexen Frequenzgang  $G(j\nu)$  und damit die Übertragungsfunktion G(s),

$$G(j\nu) = \frac{Y(j\nu)}{U(j\nu)} = \frac{1}{j\nu + e^{-j\nu\tau_{\mathbf{v}}}}, \quad G(s) = \frac{1}{s + e^{-s\tau_{\mathbf{v}}}}.$$
 (4.27)

Im Gegensatz zu den bisher meist benutzten Übertragungsfunktionen (vgl.(2.10)) ist dieses G(s) wegen des für Totzeitsysteme typischen  $\exp(-s\tau_{\rm v})$ -Terms aber keine rationale Funktion. Damit geht auch das bewährte einfache Konzept der Pole und Nullstellen verloren.

Sie können für ein Totzeitsystem ohne Schwierigkeiten den Frequenzgang als Ortskurve darstellen (Abb.4.9a) oder als Bode-Diagramm angeben (Abb.4.9b). Auch lässt sich die Stoßantwort als inverse Fourier-Transformierte zwar formal leicht hinschreiben,

$$g(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \left[ G(j\nu) \right], \tag{4.28}$$

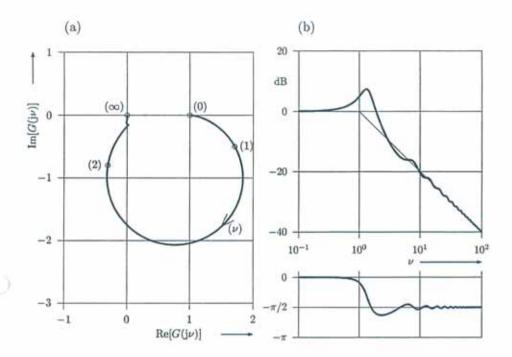


Abb. 4.9 Frequenzgang des Totzeitsystems (4.26), dargestellt als Ortskurve (a) und als Bode-Diagramm(b).

tatsächlich ist die Rücktransformation aber meist nicht geschlossen ausführbar. Selbst unser einfaches Beispiel (4.26) besitzt bereits die nur umständlich anzugebende Stoßantwort<sup>4</sup>

$$g(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\tau - k\tau_v)^k \varepsilon(\tau - k\tau_v), \qquad (4.29)$$

ausgewertet in Abb.4.10.

## 4.6 Erregung durch Zufallssignale

In den Anwendungen kommen neben den determinierten Signalen häufig auch Zufallssignale  $\widetilde{x}(\tau)$  vor, die wir bekanntlich als eine ganze Schar (ein Ensemble) von determinierten Signalen – den Realisierungen – aufzufassen haben. Das Unsichere liegt nicht im unsicheren Verlauf einer bestimmten Realisierung, sondern in deren Auswahl als das Ergebnis eines Zufallsexperiments.

Angenommen, ein lineares, zeitinvariantes System mit der Stoßantwort  $g(\tau)$ wird durch ein Zufallssignal  $\tilde{u}(\tau)$  erregt. Im konkreten Fall liegt dann am Eingang eine Realisierung  $u_k(\tau)$ , also ein determiniertes Signal, und das zugehörige Ausgangssignal kann im Prinzip als Faltungsprodukt

$$y_k(\tau) = g(\tau) * u_k(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau')u_k(\tau - \tau')d\tau'$$
 (4.30)

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Die Reihe bricht für  $k > \tau/\tau_v$  ab.

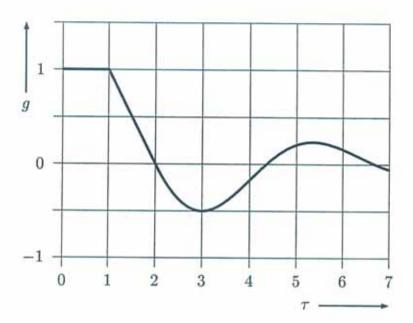


Abb. 4.10 Stoßantwort GL(4.29) des Totzeitsystems GL(4.26) mit der bezogenen Verzögerungszeit  $\tau_{\rm V}=1$ .

dargestellt werden. Die  $y_k(\tau)$  sind nun wieder als Realisierungen eines Zufallsprozesses  $\widetilde{y}(\tau)$  aufzufassen. Ziel der Untersuchungen ist, aus der bekannten statistischen Charakterisierung des Eingangssignals auf die statistische Charakterisierung des Ausgangssignals zu schließen, d.h. aus den Erwartungswerten von  $\widetilde{u}(\tau)$  die entsprechenden Erwartungswerte von  $\widetilde{y}(\tau)$  zu berechnen.

Wir werden uns hier auf die einfachsten Situationen beschränken. Im Speziellen setzen wir voraus, dass die betrachteten LTI-Systeme stabil sind, die Eingangssignale reell sind und nicht nur als stationär (Zeitunabhängigkeit der statistischen Eigenschaften), sondern auch als ergodisch ("Zeitmittel = Scharmittel") betrachtet werden können und dass sie außerdem schon über hinreichend lange Zeiten anliegen, Ausgleichsprozesse also schon abgeklungen sind. Mit dem Eingangssignal sei dann auch das Ausgangssignal reell, stationär und ergodisch.

#### Mittelwert

Die einfachste statistische Kenngröße ist der für stationäre Eingangssignale konstante Scharmittelwert  $m_u = E[\widetilde{u}(\tau)]$ , der wegen der vorausgesetzten Ergodizität auch als Zeitmittelwert  $u_k(\tau)$  einer beliebigen Realisierung angegeben werden kann. Ausgehend von Gl.(4.30) erhalten wir dann für den Mittelwert des Ausgangssignals

$$\begin{split} E[\widetilde{y}(\tau)] &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y_k(\tau) \mathrm{d}\tau = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau') u_k(\tau - \tau') \mathrm{d}\tau' \right] \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau') \left[ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_k(\tau - \tau') \mathrm{d}\tau \right] \mathrm{d}\tau' = E[\widetilde{u}(\tau)] \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau') \mathrm{d}\tau'. \end{split}$$

Unter Beachtung von Gl.(3.3) folgt daraus

$$m_y = G(0)m_u$$
, (4.31)

wobei G(0) den Wert des komplexen Frequenzgangs  $G(j\nu)$  für  $\nu = 0$  angibt. Der Mittelwert eines stationären Zufallssignals wird demnach wie der Gleichanteil eines determinierten Signals übertragen.

#### Autokorrelation

Ein wichtiges Maß für das Zeitverhalten eines Zufallssignals ist seine Autokorrelationsfunktion (AKF), die sich für ergodische Signale über Gl.(1.43) ebenfalls aus einer beliebigen Realisierung berechnen lässt. Davon ausgehend erhalten wir mit der Faltungsdarstellung (4.30) zunächst

$$\begin{split} r_{yy}(\tau) &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y_k(\tau') y_k(\tau + \tau') \mathrm{d}\tau' \\ &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) g(\mu) u_k(\tau' - \lambda) u_k(\tau + \tau' - \mu) \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}\mu \right] \mathrm{d}\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) g(\mu) \left[ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_k(\tau' - \lambda) u_k(\tau + \tau' - \mu) \mathrm{d}\tau' \right] \mathrm{d}\lambda \mathrm{d}\mu. \end{split}$$

In der letzten eckigen Klammer steht, wie sich durch eine Variablentransformation  $\tau' \mapsto \tau'' = \tau' - \lambda$  zeigen lässt, die verschobene AKF  $r_{uu}(\tau + \lambda - \mu)$  des Eingangssignals. Es gilt also

$$r_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)g(\mu)r_{uu}(\tau + \lambda - \mu)d\lambda d\mu$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)g(\tau' + \lambda)d\lambda \right] r_{uu}(\tau - \tau')d\tau',$$

wobei der Übergang zum letzten Ausdruck durch die Variablentransformation  $\mu \mapsto \tau' = \mu - \lambda$  erfolgt. Nun steht in der letzten eckigen Klammer das in Gl.(3.78) für energiebegrenzte, determinierte Signale eingeführte Korrelationsprodukt, genauer: das Autokorrelationsprodukt  $r_{gg}^{\rm E}(\tau) = g(\tau) \otimes g(\tau)$  der Stoßantwort unseres Systems, und der ganze Ausdruck hat die Form eines Faltungsprodukts. Das einfache Ergebnis

$$r_{yy}(\tau) = r_{gg}^{E}(\tau) * r_{uu}(\tau) \qquad (4.32)$$

wird Wiener-Lee-Beziehung genannt. Sie zeigt, dass sich die AKF des Ausgangssignals aus der AKF des Eingangssignals durch Faltung mit dem Autokorrelationsprodukt der Stoßantwort berechnen lässt.

#### Leistungsspektrum

Der in Gl.(1.43) für die Autokorrelationsfunktion reeller, ergodischer Zufallssignale angegebene Ausdruck

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_k(\tau') x_k(\tau + \tau') d\tau'$$
 (4.33)

stimmt für  $\tau = 0$  mit der in Gl.(3.77) eingeführten Signalleistung überein,

$$x_{\text{eff}}^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_k(\tau')|^2 d\tau' = r_{xx}(0).$$
 (4.34)

Betrachten wir nun das Fourier-Transformationspaar der AKF (4.33),

$$R_{xx}(j\nu) = \mathcal{F}[r_{xx}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) e^{-j\nu\tau} d\tau, \qquad (4.35)$$

$$r_{xx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[R_{xx}(j\nu)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(j\nu) e^{j\nu\tau} d\nu,$$
 (4.36)

so gilt mit Gl.(4.34) für die Signalleistung

$$x_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(j\nu) d\nu. \tag{4.37}$$

Die Funktion  $R_{xx}(j\nu)/(2\pi)$  ist deshalb als spektrale Signalleistungsdichte aufzufassen<sup>5</sup>. Die Funktion  $R_{xx}(j\nu)$  selbst, also die Fourier-Transformierte der AKF  $r_{xx}(\tau)$  des stationären Zufallssignals  $\widetilde{x}(\tau)$ , wollen wir kurz das Leistungsspektrum von  $\widetilde{x}(\tau)$  nennen. Übrigens ist, wie sich durch eine einfache Variablentransformation in Gl.(4.33) zeigen lässt, die AKF eines reellwertigen Signals stets reell und gerade. Damit ist auch das zugehörige Leistungsspektrum reell und gerade.

Was bedeutet Gl.(4.32) im Frequenzbereich? Ihre Fourier-Transformation liefert mit der Korrespondenz (3.81) die Beziehung

$$R_{yy}(j\nu) = |G(j\nu)|^2 R_{uu}(j\nu).$$
(4.38)

Die Leistungsspektren werden demnach mit dem Betragsquadrat des komplexen Frequenzgangs übertragen.

#### Weißes Rauschen

Ein stationäres Zufallssignal  $\widetilde{w}(\tau)$  mit einem konstanten Leistungsspektrum wird weißes Rauschen genannt,

$$R_{ww}(j\nu) = K - \sigma r_{ww}(\tau) = K\delta(\tau).$$
(4.39)

Es handelt sich um die Abstraktion eines nicht leistungsbegrenzten Signals, das – grob gesprochen – Komponenten aller Frequenzen zwar gleich verteilt, aber völlig unkorreliert enthält.

Angenommen, wir beschränken das unendlich ausgedehnte Spektrum des weißen Rauschens durch ein ideales Tiefpassfilter mit der bezogenen Grenzfrequenz  $\nu_{\rm g}$ , also mit dem Frequenzgang  $G({\rm j}\nu)={\rm rect}[\nu/(2\nu_{\rm g})]$ . Das so entstehende, wiederum stationäre Zufallssignal  $\widetilde{n}(\tau)$  heißt frequenzbegrenztes weißes Rauschen und besitzt nach Gl.(4.38) das Leistungsspektrum

$$R_{nn}(j\nu) = K \left| \text{rect} \left( \frac{\nu}{2\nu_{g}} \right) \right|^{2} = \begin{cases} K & \text{für } |\nu| < \nu_{g}, \\ 0 & \text{für } |\nu| \geqslant \nu_{g}. \end{cases}$$
 (4.40)

 $<sup>^5</sup>$ Bei Verwendung der Periodenfrequenz als der Spektralvariablen entfällt der Faktor  $1/(2\pi)$ .

Die zugehörige AKF,

$$r_{nn}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\left[R_{nn}(j\nu)\right] = K\frac{\nu_g}{\pi}\operatorname{si}(\nu_g\tau), \tag{4.41}$$

liefert im Speziellen die Signalleistung

$$n_{\text{eff}}^2 = r_{nn}(0) = K\nu_g/\pi.$$
 (4.42)

 $\tilde{n}(\tau)$  ist demnach leistungsbegrenzt.

Das frequenzbegrenzte weiße Rauschen wird häufig als einfaches Modell für das thermische Rauschen elektrischer Widerstände benutzt. In einer Ersatzschaltung wird dabei ein idealer Widerstand R in Reihe mit einer idealen Spannungsquelle gelegt, die das Rauschsignal mit dem Effektivwertquadrat

$$u_{\text{eff}}^2 = 4kTRf_{\text{g}} \tag{4.43}$$

liefert, wobei k die Boltzmann-Konstante, T die absolute Temperatur und  $f_{\rm g}$  die Grenzfrequenz angibt. Der "rauschende" Widerstand, als Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand R betrachtet, kann die maximale Leistung ("Rauschleistung")  $P_{\rm R}=u_{\rm eff}^2/(4R)=kTf_{\rm g}$  abgeben.

Es ist instruktiv, Gl.(4.43) in die bezogene Form (4.42) zu bringen. Mit der Bezugsspannung  $U_{\rm B}$  und der Bezugsdauer  $T_{\rm B}$ , also  $u_{\rm eff}^2 = n_{\rm eff}^2 U_{\rm B}^2$  und  $f_{\rm g} = \nu_{\rm g}/(2\pi T_{\rm B})$ , erhalten wir

$$n_{\rm eff}^2 = \frac{2kTR}{U_{\rm B}^2 T_{\rm B}} \frac{\nu_{\rm g}}{\pi} \ .$$
 (4.44)

Dies identifiziert  $K = 2kTR/(U_{\rm B}^2T_{\rm B})$  als die Konstante K im Leistungsspektrum (4.40).

#### Kreuzkorrelation

Ganz analog zur Autokorrelationsfunktion (4.33) lässt sich für zwei reelle, ergodische Zufallssignale  $\widetilde{x}(\tau)$  und  $\widetilde{y}(\tau)$  unter der Voraussetzung, dass die beiden Signale auch gemeinsam ergodisch sind, die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF)

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_k(\tau') y_k(\tau + \tau') d\tau'$$
 (4.45)

als statistisches Maß für deren "Verwandtschaftsgrad" angeben. Ihre Fourier-Transformierte  $R_{xy}(j\nu)$  heißt Kreuzleistungsspektrum, und die Fourier-Transformierte der AKF wird in diesem Zusammenhang auch Autoleistungsspektrum genannt.

An einem LTI-System mit der Stoßantwort  $g(\tau)$  liege ein ergodisches Eingangssignal  $\widetilde{u}(\tau)$ , dessen AKF  $r_{uu}(\tau)$  bekannt sei. Wir fragen nun nicht nach der mit Gl.(4.32) berechenbaren AKF des Ausgangssignals, sondern interessieren uns für die KKF von  $\widetilde{u}(\tau)$  und  $\widetilde{y}(\tau)$ . Zusammen mit Gl.(4.30) berechnen wir

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Ist  $T_{\rm B}$  die gewählte Bezugsdauer und dem gemäß  $\omega_{\rm B}=1/T_{\rm B}$  die Bezugskreisfrequenz, so gehört zu  $\nu_{\rm g}$  die Grenzfrequenz  $f_{\rm g}=\nu_{\rm g}/(2\pi T_{\rm B})$ .

aus Gl.(4.45)

$$r_{uy}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_k(\lambda) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau + \lambda - \mu) u_k(\mu) d\mu \right] d\lambda$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - \tau') \left[ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_k(\lambda) u_k(\tau' + \lambda) d\lambda \right] d\tau',$$

wobei vor der Vertauschung der beiden Integrationen die Variablentransformation  $\mu \mapsto \tau' = \mu - \lambda$  vorgenommen wurde. In der eckigen Klammer des letzten Ausdrucks steht jetzt die AKF  $r_{uu}(\tau)$  des Eingangssignals, und das Ganze hat die Form des Faltungsprodukts

$$r_{uy}(\tau) = g(\tau) * r_{uu}(\tau).$$
(4.46)

Die KKF zwischen dem Eingangs- und dem Ausgangssignal wird demnach als Faltungsprodukt der Stoßantwort mit der Eingangs-AKF ermittelt. Entsprechend erhalten wir im Frequenzbereich das Kreuzleistungsspektrum

$$R_{uy}(j\nu) = G(j\nu)R_{uu}(j\nu).$$
(4.47)

Dies bringt uns zu einem interessanten Thema: Wählen wir als Eingangssignal speziell ein weißes Rauschen (4.39) mit dem Leistungsspektrum K=1, so ergibt sich als dessen KKF mit dem Ausgangssignal genau die Stoßantwort  $g(\tau)$  des Systems bzw. als zugehöriges Kreuzleistungsspektrum der komplexe Frequenzgang. Damit lassen sich LTI-Systeme auf sehr bequeme Weise experimentell identifizieren. Tatsächlich muss das Rauschen nicht ideal weiß, sondern nur hinreichend breitbandig sein. Die Bildung der KKF erfolgt mit analogen Korrelatoren oder über entsprechende Algorithmen mit Signalprozessoren.

## 4.7 Zusammenfassung

Bei der Beschreibung des Verhaltens von LTI-Systemen im Frequenzbereich kommt dem komplexen Frequenzgang, der Fourier-Transformierten der Stoßantwort, eine entscheidende Rolle zu. Er lässt sich experimentell bestimmen – etwa durch die Beobachtung eingeschwungener Zustände bei Sinuserregung – oder, bei Vorliegen eines mathematischen Modells, durch Auswertung der Übertragungsfunktion entlang der imaginären Achse. Für lineare elektrische Schaltungen können wir den komplexen Frequenzgang auch mit den Methoden der elementaren Wechselstromrechnung gewinnen.

Die graphische Darstellung des komplexen Frequenzgangs erfolgt in der Regel getrennt als Betragsteil und als Winkelteil. Dabei haben sich insbesondere die Bode-Diagramme bewährt, weil sie sich einerseits für Systeme mit rationalen Übertragungsfunktionen allein durch Inspektion der Pole und Nullstellen relativ leicht zeichnen lassen, und weil andererseits durch die logarithmischen Skalen die Erfassung großer Bereiche bei angepassten Auflösungen gelingt. Bei Minimalwinkelsystemen reicht zur vollständigen Charakterisierung allein das Betragsdiagramm aus.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Dies lässt sich durch geeignete Wahl der Bezugswerte immer erreichen.

Systeme mit **Totzeiten** erweisen sich meist als deutlich schwieriger zu behandeln als solche ohne Totzeiten, auch wenn es sich um LTI-Systeme handelt. Die Übertragungsfunktion ist dann keine rationale Funktion, so dass die Pole-Nullstellen-Techniken in ihren einfachen Formen nicht anwendbar sind.

Im Gegensatz zu determinierten Signalen werden Zufallssignale nicht durch die Angabe des konkreten Zeitverlaufs seiner Realisierungen beschrieben, sondern durch statistische Kenngrößen wie den Mittelwert, die Autokorrelationsfunktion (AKF) und die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) bzw. deren Fourier-Transformierten, das Autoleistungsspektrum und das Kreuzleistungsspektrum. Hier interessiert vor allem, wie sich solche Kenngrößen bei der Übertragung des Zufallssignals durch ein LTI-System verändern.

# Kapitel 5

# Fourier-Reihen

Wenn sich ein Vorgang auf immer die gleiche Weise wiederholt, sprechen wir von einem periodischen Vorgang. Zeitverläufe dieser Art sind einer speziellen Darstellung durch trigonometrische Reihen zugänglich, die man Fourier-Reihen nennt und die wegen ihrer großen Bedeutung für die Anwendungen in den unterschiedlichsten Varianten zu finden sind. Ich werde hier die komplexen Fourier-Reihen in ihrer allgemeinen Form vorstellen. Die Varianten ergeben sich daraus als Sonderfälle.

## 5.1 Periodische Signale

Ein zeitlich periodisch verlaufender Vorgang, beschrieben durch eine Größe u(t), erfüllt bekanntlich die Bedingung

$$u(t+T) = u(t)$$
 für alle  $t$  (5.1)

und bestimmte Periodendauern T>0. Die kürzeste Periodendauer, mit der sich diese Bedingung erfüllen lässt, nennen wir fundamentale Periodendauer  $T_1$ , die zugehörige Periodenfrequenz  $f_1=1/T_1$  heißt Grundfrequenz und  $\omega_1=2\pi f_1$  heißt Grundkreisfrequenz. Alle anderen Periodendauern sind als ganzzahlige Vielfache der fundamentalen Periodendauer angebbar. Ein Ausschnitt der Dauer  $T_1$  des Vorgangs heißt fundamentale Periode. Umgekehrt lässt sich natürlich ein zeitbegrenzter Vorgang der Dauer  $T_1$ , als fundamentale Periode aufgefasst, durch beidseitiges Wiederholen zu einem  $T_1$ -periodischen Vorgang erweitern.

#### Diskretes Spektrum

Die Spektralfunktion periodischer Signale zeigt eine interessante Besonderheit: Sie existiert nicht im klassischen Sinn, sondern ergibt sich als eine Reihe von Dirac-Stößen unterschiedlichen Gewichts, die bei allen (positiv und negativ) ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz platziert sind. Aus der Wiedergabe des Signals durch sein Spektrum – etwa durch Gl.(3.13) – resultiert dann mit der Abtasteigenschaft des Dirac-Stoßes an Stelle des Integrals eine beidseitig

unendliche Reihe der Form

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t},$$
 (5.2)

wobei als Koeffizienten  $C_k$  die Gewichte der Dirac-Stöße auftreten. Da wir die Möglichkeit solch einer Reihendarstellung periodischer Signale nun begründet haben, können wir mit Hilfe der für ganze Zahlen k,l gültigen Orthogonalitätsrelationen

$$\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} e^{j2\pi(k-l)t/T_1} dt = \begin{cases} 1 & \text{für } k=l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$
 (5.3)

den direkt aus (5.2) folgenden Ausdruck<sup>1</sup>

$$C_k = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} u(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt$$
 (5.4)

für die Koeffizienten angeben. Zusammenfassend haben wir in

$$C_k = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} u(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} u(t) e^{-jk\omega_1 t} dt,$$
 (5.5)

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi k f_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}$$
(5.6)

die Grundgleichungen für die Fourier-Reihenentwicklung  $T_1$ -periodischer Signale gewonnen.

Die Beziehung (5.6) wird manchmal Synthesegleichung genannt, weil sie die Zusammensetzung einer periodischen Funktion u(t) aus ihren Fourier-Komponenten oder Harmonischen angibt. Das konstante Glied  $\overline{u}=C_0$ , der Gleichanteil, ist der lineare Mittelwert von u(t). Der Rest, nämlich der Wechselanteil, besteht aus der Grundschwingung

$$u_1(t) = C_{-1} e^{-j\omega_1 t} + C_1 e^{j\omega_1 t}$$
(5.7)

und den Oberschwingungen oder höheren Harmonischen

$$u_k(t) = C_{-k} e^{-jk\omega_1 t} + C_k e^{jk\omega_1 t}, \quad k = 2, 3, \dots$$
 (5.8)

Die Beziehung (5.5) zur Berechnung der i.A. auch für reellwertige Funktionen u(t) komplexen Fourier-Koeffizienten  $C_k$  heißt dann Analysegleichung, und das Bestimmen des Gleichanteils, der Grundschwingung und der Oberschwingungen eines periodischen Verlaufs nennt man Fourier-Analyse oder harmonische Analyse.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Multiplizieren Sie Gl.(5.2) mit  $\exp(-j2\pi l f_1 t)$  und integrieren Sie über t von 0 bis  $T_1$ . Nach Division durch  $T_1$  bleibt wegen der Orthogonalitätsrelationen (5.3) von der ganzen Summe nur  $C_l$  übrig. Setzen Sie dann  $l \mapsto k$ .

#### Orthogonalreihen

Historisch gab es die Fourier-Reihen vor den Fourier-Transformationen. Von einem etwas allgemeineren Standpunkt aus gesehen handelt es sich dabei um die Entwicklung einer zunächst über einem beschränkten Intervall der Dauer  $T_1$  definierten und dann periodisch fortgesetzten Funktion nach den Elementen  $\exp(jk\omega_1t)$ ,  $k\in\mathbb{Z}$ , eines speziellen orthogonalen Funktionensystems. Sie können sich das bildhaft so vorstellen: Die Menge aller² komplexwertigen, nach geeignetem Variablenbezug 1-periodischen Funktionen  $x(\tau)$  einer reellen Variablen  $\tau$  bildet zusammen mit der gewöhnlichen Addition und der Multiplikation mit komplexen Zahlen einen linearen Raum (einen "Vektorraum"). Solch ein Funktionenraum ist i.A. zwar abzählbar unendlich-dimensional, wir können für irgend zwei Elemente  $x_1(\tau)$  und  $x_2(\tau)$  aber ein inneres Produkt

$$\langle x_1 | x_2 \rangle = \int_0^1 x_1^*(\tau) x_2(\tau) d\tau$$
 (5.9)

entsprechend dem Skalarprodukt von Vektoren definieren, vorausgesetzt, das Integral existiert. Verschwindet für zwei Elemente das innere Produkt, so nennen wir sie zueinander **orthogonal**. Ist das innere Produkt eines Elements mit sich selbst gleich 1, dann heißt das Element **normiert**. Aus den Elementen unseres Raums wählen wir nun eine Folge  $e_k(\tau)$ ,  $k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$  normierter Elemente aus, die gegenseitig orthogonal sind<sup>3</sup>,

$$\langle e_k | e_l \rangle = \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$
 (5.10)

– wir sprechen von einem orthonormierten Funktionensystem – und fassen diese als Basis, die einzelnen  $e_k(\tau)$  als Basiselemente ("Basisvektoren") auf – alles in Analogie zur Konstruktion eines Satzes kartesischer Basisvektoren im gewöhnlichen Ortsraum unserer Anschauung. Die Reihendarstellung

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e_k(\tau) \quad \text{mit} \quad c_k = \langle e_k | x \rangle,$$
 (5.11)

d.h. die Entwicklung irgend eines Elements  $x(\tau)$  nach den Basiselementen  $e_k(\tau)$ , entspricht dann der Zerlegung eines Vektors in seine kartesischen Komponenten, und die Entwicklungskoeffizienten  $c_k$  entsprechen den Normalprojektionen auf die Basisrichtungen, zu berechnen als Skalarprodukt des zu zerlegenden Vektors mit dem jeweiligen Basisvektor.

Wie Sie sehen, sind die Beziehungen (5.3) mit  $\tau = t/T_1$  genau von der Form (5.10), und unsere Grundgleichungen (5.5), (5.6) sind von der Form (5.11) mit den speziellen Basiselementen  $e_k(\tau) = \exp(\mathrm{j}2\pi k\tau)$ . Man nennt allgemein jede Entwicklung einer periodischen oder über einem beschränkten Intervall definierten Funktion nach einem orthogonalen Funktionensystem eine Fourier-Reihe. Wir werden uns hier aber nur mit den Fourier-Reihen im engeren Sinn befassen, d.h. mit den Entwicklungen nach Exponentialfunktionen mit imaginärem Argument.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Manche besonders "wilden" Funktionen müssen wir ausschließen, s. Abschnitt 5.2, Pkt.1.  $^3\delta_{kl}$  heißt Kronecker-Symbol.

#### Bezogene Formen

Zuerst eine wichtige Feststellung: Weil mit u(t) auch der Integrand in der Analysegleichung (5.5)  $T_1$ -periodisch ist, brauchen Sie zur Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten nicht notwendig von 0 bis  $T_1$  zu integrieren, sondern Sie können irgend ein Zeitintervall der Dauer  $T_1$  wählen:

$$\frac{1}{T_1} \! \int_{t_0}^{t_0 + T_1} \left\{ u(t) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j} k \omega_1 t} \right\} \mathrm{d}t = \frac{1}{T_1} \left[ \int_{t_0}^0 \left\{ \cdot \right\} \mathrm{d}t + \int_0^{T_1} \left\{ \cdot \right\} \mathrm{d}t + \int_{T_1}^{T_1 + t_0} \left\{ \cdot \right\} \mathrm{d}t \right].$$

Wegen der Periodizität ist das Integrationsintervall  $(T_1, T_1 + t_0)$  offensichtlich durch  $(0, t_0)$  ersetzbar, das erste und das dritte Integral in der eckigen Klammer unterscheiden sich also nur um das Vorzeichen und es bleibt der zweite Ausdruck übrig, das Integral der ursprünglichen Analysegleichung. Sie erhalten damit genau die gleichen Koeffizienten  $C_k$ .

Für das Rechnen mit bezogenen Größen brauchen wir die bezogenen Formen der Fourier-Grundgleichungen. Wir wählen zuerst die Bezugsdauer  $T_{\rm B}$  gleich der fundamentalen Periodendauer  $T_{\rm I}$ , also  $\tau=t/T_{\rm I}=f_{\rm I}t$ . Mit einem Bezugswert  $U_{\rm B}$ , d.h. dem bezogenen Signal  $x(\tau)=u(T_{\rm I}\tau)/U_{\rm B}$ , erhalten wir dann durch Einsetzen von

$$u(t) = U_{\rm B}x(\tau), \quad t = T_1\tau, \quad C_k = U_{\rm B}c_k$$
 (5.12)

in die Gln.(5.5) und (5.6) das Analyse-Synthese-Paar

$$c_k = \int_0^1 x(\tau) e^{-j2\pi k\tau} d\tau, \quad x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k\tau}.$$
 (5.13)

Beachten Sie: Die Funktion  $x(\tau)$  ist 1-periodisch. Damit stellt das Paar (5.13) die Grundgleichungen dar für die Fourier-Reihenentwicklung 1-periodischer Signale.

Eine zweite bezogene Form ergibt sich, wenn wir als Bezugsdauer an Stelle der fundamentalen Periodendauer  $T_1$  den Wert  $T_1/(2\pi)$  wählen, also  $\tau=2\pi t/T_1=\omega_1 t$  schreiben. Nach der Wahl des Bezugswertes  $U_{\rm B}$  folgt dann mit  $x(\tau)=u[T_1\tau/(2\pi)]/U_{\rm B}$  durch Einsetzen von

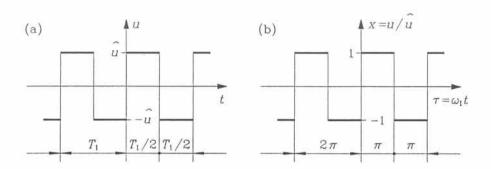
$$u(t) = U_{\rm B}x(\tau), \quad t = T_1\tau/(2\pi), \quad C_k = U_{\rm B}c_k$$
 (5.14)

in die Gln.(5.5) und (5.6) das Analyse-Synthese-Paar

$$c_{k} = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} x(\tau) e^{-jk\tau} d\tau, \quad x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k} e^{jk\tau}.$$
 (5.15)

Wichtig ist: Wegen des unterschiedlichen Zeitbezugs erhalten Sie, ausgehend von einer Funktion u(t), selbst bei gleichen Bezugswerten  $U_{\rm B}$  für die beiden bezogenen Formen unterschiedliche Funktionen  $x(\tau)$ . Die Funktion  $x(\tau)$  in den Gln.(5.15) ist nicht 1-periodisch, sondern  $2\pi$ -periodisch. Das Paar (5.15) stellt somit die Grundgleichungen dar für die Fourier-Reihenentwicklung  $2\pi$ -periodischer Signale.

112 5 Fourier-Reihen



**Abb. 5.1** Rechteckförmige Spannungsschwingung in den ursprünglichen Variablen (a) und in bezogener Form (b) mit  $x=u/\hat{u}$  und  $\tau=\omega_1 t$ .

#### Analyse und Synthese

Vor dem Zusammenstellen der wichtigsten Eigenschaften von Fourier-Reihen wollen wir uns an einem einfachen Beispiel orientieren: Zu bestimmen sind die komplexen Fourier-Koeffizienten der rechteckförmigen Spannungsschwingung aus Abb.5.1a. Einsetzen der stückweise konstanten Werte von u(t) in die Analysegleichung (5.5) liefert (beachten Sie  $f_1 = 1/T_1$ )

$$C_k = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} u(t) e^{-j2\pi kt/T_1} dt = \frac{\widehat{u}}{T_1} \left[ \int_0^{T_1/2} e^{-j2\pi kt/T_1} dt - \int_{T_1/2}^{T_1} e^{-j2\pi kt/T_1} dt \right]$$
$$= \frac{-\widehat{u}}{j2\pi k} \left[ e^{-j\pi k} - 1 - e^{-j2\pi k} + e^{-j\pi k} \right] = \frac{\widehat{u}}{j\pi k} \left[ 1 - (-1)^k \right],$$

also

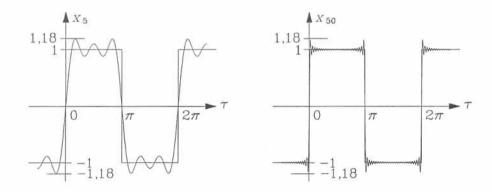
$$C_k = 0$$
 für  $k = 0, \pm 2, \pm 4, ...,$   
 $C_k = \frac{2\hat{u}}{j\pi k}$  für  $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, ...$  (5.16)

Wir bemerken

- $C_{-k} = C_k^*$ : Dies gilt, wie wir in Abschnitt 5.3 sehen werden, für alle Fourier-Entwicklungen reeller Funktionen.
- $C_{-k} = -C_k$ : Eine Eigenschaft der Fourier-Koeffizienten aller *ungeraden* Funktionen. Zusammen mit der vorstehenden Eigenschaft schließen wir, dass die Fourier-Koeffizienten imaginär sein müssen.
- Alle Koeffizienten mit geraden Werten von k verschwinden. Dies folgt aus der Symmetrieeigenschaft  $u(t+T_1/2)=-u(t)$ .

Die Berechnung der Koeffizienten für die bezogene Form (Abb.5.1b) erfolgt ähnlich, z.B. über Gl.(5.15)<sub>1</sub>:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) e^{-jk\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\pi} e^{-jk\tau} d\tau - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-jk\tau} d\tau \right]$$
$$= \frac{-1}{i2\pi k} \left[ e^{-j\pi k} - 1 - e^{-j2\pi k} + e^{-j\pi k} \right] = \frac{1}{i\pi k} \left[ 1 - (-1)^k \right],$$



**Abb. 5.2** Fourier-Synthese der Rechteckschwingung aus Abb. 5.1 b. Dargestellt sind die Werte der Partialsummen Gl. (5.18) für K=5 und K=50 mit den komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_k$  aus Gl. (5.17).

also

$$c_k = 0$$
 für  $k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots,$   
 $c_k = \frac{2}{j\pi k}$  für  $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$  (5.17)

Es ist instruktiv, in unserem Beispiel auch die Synthese zu betrachten, d.h. das Zusammensetzen der Schwingung  $x(\tau)$  aus den Fourier-Teilschwingungen durch Bilden der Partialsummen

$$x_K(\tau) = \sum_{k=-K}^{K} c_k e^{jk\tau}$$
(5.18)

für steigende Werte K. Dies ist auch für die Anwendungen wichtig, weil durch Tiefpass-Begrenzung eines periodischen Signals immer eine endliche Fourier-Reihe dieser Art entsteht. Abb.5.2 zeigt zwei solche Auswertungen. Deutlich erkennbar ist das Überschwingen unmittelbar vor und nach den Sprungstellen. Interessant ist dabei, dass der Maximalwert des Überschwingens keineswegs, wie man vermuten könnte, mit zunehmendem K verschwindet, sondern er strebt für  $K \to \infty$  einem Grenzwert ungleich 0 zu. Diese als Gibbs-Phänomen bekannte Erscheinung tritt bei der Fourier-Approximation von Sprung-Unstetigkeiten immer auf, wobei der Maximalwert des Überschwingens vor und nach der Sprungstelle für große K etwa 9% des vollen Sprungs beträgt. Das Gibbs-Phänomen bedeutet, dass die abgebrochene Fourier-Reihennäherung eines periodischen Signals in der Umgebung von Sprung-Unstetigkeiten ein höherfrequentes "Zittern" und ein Überschwingen mit sich bringt. Wollen Sie solch eine Näherung verwenden, so müssen Sie K hinreichend groß wählen, um sicher zu stellen, dass die mit dem Überschwingen verknüpfte Signalenergie im Näherungsfehler verschwindet.

## 5.2 Grundlegende Eigenschaften

Die folgenden, für die Anwendungen wichtigen Eigenschaften der Fourier-Reihen folgen meist unmittelbar aus den Analyse-Synthese-Gleichungen. In dieser Zusammenstellung werden wir die bezogenen Formen (5.15) für  $2\pi$ -periodische Si-

gnale verwenden. Überdies erweist sich, wie schon bei der Fourier-Transformation, die Schreibweise mit dem Korrespondenz-Symbol  $\circ$ — als bequem. Dabei bedeutet  $x(\tau) \circ$ —  $c_k$  den Zusammenhang der  $2\pi$ -periodischen Funktion  $x(\tau)$  und ihrer komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_k$  über die Gleichungen (5.15).

#### 1. Existenz

Hinreichende Bedingungen für die Existenz der Fourier-Reihenentwicklung einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $x(\tau)$  lassen sich in den drei **Dirichlet-Bedingungen** zusammenfassen. Die wichtigste davon ist die Forderung nach der absoluten Integrierbarkeit über dem Grundintervall,

$$\int_0^{2\pi} |x(\tau)| \,\mathrm{d}\tau < M_x < \infty. \tag{5.19}$$

Die beiden anderen Bedingungen fordern, dass es im Grundintervall nur eine endliche Anzahl von Maxima und Minima gibt (beschränkte Schwankung) und dass dort auch nur eine endliche Anzahl von Sprüngen auftritt. Sind alle drei Dirichlet-Bedingungen erfüllt, so konvergiert die Folge der Partialsummen (5.18) mit wachsendem K für fast alle festen  $\tau$  gegen den entsprechenden Funktionswert  $x(\tau)$ .<sup>4</sup> An einer Sprungstelle liefert die Fourier-Reihe das arithmetische Mittel aus dem links- und rechtsseitigen Grenzwert.

#### 2. Linearität

Sind  $x_1(\tau)$  und  $x_2(\tau)$  jeweils  $2\pi$ -periodische Funktionen und  $c_{1k}$  bzw.  $c_{2k}$  die zugehörigen komplexen Fourier-Koeffizienten, dann gilt mit beliebigen Zahlen  $a_1, a_2$ 

$$x(\tau) = a_1 x_1(\tau) + a_2 x_2(\tau) \circ - c_k = a_1 c_{1k} + a_2 c_{2k} ,$$
 (5.20)

wobei  $x(\tau) \circ - c_k$ . Linearkombinationen der Signale übertragen sich also direkt auf die Fourier-Koeffizienten.

#### 3. Zeitverschiebung

Ersetzen wir in Gl.(5.15) die Funktion  $x(\tau)$  durch die zeitverschobene Funktion  $x(\tau - \tau_0)$ , so folgt aus  $x(\tau) \circ - c_k$  die Korrespondenz

$$x(\tau - \tau_0) \circ - e^{-jk\tau_0} c_k$$
 (5.21)

Sie lässt sich insbesondere zur bequemen Auswertung von Verschiebungssymmetrien verwenden. Besitzt ein  $2\pi$ -periodisches Signal z.B. ähnlich der Sinusfunktion die Symmetrie  $x(\tau-\pi)=-x(\tau)$ , so bedeutet dies für seine Koeffizienten

$$e^{-jk\pi}c_k = -c_k \implies c_k = 0 \text{ für } k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$$

Es gibt in diesem Fall also keine geradzahligen Harmonischen (s.(5.17)).

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Die Signalenergie der Differenz zwischen der Fourier-Reihe und  $x(\tau)$ , über eine fundamentale Periode genommen, ist gleich Null.

$$U(\tau) = \sum_{k} c_{uk} e^{jk\tau}$$

$$G(s) = \sum_{k} c_{yk} e^{jk\tau}$$

$$C_{uk} G(jk) = c_{yk}$$

Abb. 5.3 In linearen zeitinvarianten Systemen können die Fourier-Komponenten getrennt behandelt und anschließend überlagert werden.

#### 4. Differentiation

Beidseitige Ableitung der Gl.(5.15)2 nach  $\tau$  liefert

$$x'(\tau) \circ - jkc_k$$
. (5.22)

Differentiation des Signals bedeutet also Multiplikation seiner Fourier-Koeffizienten  $c_k$  mit jk oder, etwas allgemeiner,

$$x^{(n)}(\tau) \circ - \bullet (jk)^n c_k$$
 (5.23)

für die n-malige Differentiation. Ganz ähnlich wie bei der entsprechenden Eigenschaft der Zeitdifferentiation unter Fourier-Transformationen kommen wir auch hier zu einem wichtigen Ergebnis: Ist von einem LTI-System der komplexe Frequenzgang  $G(j\nu)$  bekannt und führt eine  $2\pi$ -periodische Schwingung  $u(\tau)$  am Eingang wieder zu einer  $2\pi$ -periodischen Schwingung  $y(\tau)$  am Ausgang<sup>5</sup>, dann hängen die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_{uk}$  des Eingangssignals und  $c_{yk}$  des Ausgangssignals gemäß

$$c_{yk} = G(jk)c_{uk}$$
 (5.24)

zusammen. Sie können demnach jede Fourier-Komponente getrennt behandeln und am Ausgang alle Komponenten überlagern – eine typische Eigenschaft linearer Systeme. Abb.5.3 soll dies nochmals verdeutlichen.

Wir bemerken noch den folgenden Zusammenhang: Die Fourier-Reihe einer  $2\pi$ -periodischen Sequenz von Dirac-Stößen (eines Dirac-Kamms) mit dem Gewicht 1 ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - 2\pi k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{jk\tau}.$$
 (5.25)

Liegt am Eingang eines LTI-Systems solch ein Dirac-Kamm mit dem Gewicht  $2\pi$ , so erscheint unter obigen Voraussetzungen am Ausgang die **periodische** Stoßantwort

$$g_{\mathbf{p}}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\mathbf{j}k) \,\mathrm{e}^{\mathbf{j}k\tau}. \tag{5.26}$$

Wie  $G(j\nu)$  die Fourier-Transformation der Stoßantwort  $g(\tau)$  ist, sind die Zahlen G(jk) die Fourier-Koeffizienten der periodischen Stoßantwort  $g_p(\tau)$ .

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Diese Zusatzbedingung ist nicht selbstverständlich. Denken Sie beispielsweise an einen Integrator mit nicht mittelwertfreiem Eingangssignal.

#### 5. Integration

Das Integral einer  $2\pi$ -periodischen Funktion  $x(\tau) \circ - \bullet c_k$  liefert nur dann wieder eine periodische Funktion, wenn sie *mittelwertfrei* ist, also  $c_0 = 0$ . Wir erhalten in diesem Fall die Korrespondenz

$$\int_{-\infty}^{\tau} x(\tau') d\tau' \circ - \frac{c_k}{jk} , \quad c_0 = 0,$$
 (5.27)

als Gegenstück zur Korrespondenz (5.22).

## 5.3 Symmetrieeigenschaften

Die Beachtung von Symmetrieeigenschaften kann Erhebliches an Rechenarbeit sparen, liefert nützliche Kontrollmöglichkeiten und erlaubt unterschiedliche Zusammenfassungen. Für reellwertige Signale können wir daraus andere, häufig verwendete Formen trigonometrischer Reihen gewinnen.

## 1. Konjugiert komplexe Funktion

Sind von einem Signal  $x(\tau)$  die Fourier-Koeffizienten  $c_k$  bekannt, so lassen sich nach einem Blick auf die Gln.(5.15) die Fourier-Koeffizienten des konjugiert komplexen Signals  $x^*(\tau)$  sofort angeben. Wir notieren

$$x^*(\tau) \circ - c_{-k}^* \tag{5.28}$$

als Vorbereitung auf das Folgende.

#### 2. Reelle Funktion

Die Reellwertigkeit eines Signals bedeutet formal, dass es sich beim Bilden seines konjugiert Komplexen nicht ändert. Aus den Korrespondenzen  $x(\tau) \circ - \bullet c_k$  und (5.28) folgt deshalb die Äquivalenz

$$x^*(\tau) = x(\tau) \iff c_{-k} = c_k^*.$$
 (5.29)

Die Fourier-Koeffizienten mit negativem Index lassen sich demnach als konjugiert Komplexe der entsprechenden Koeffizienten mit positivem Index ausdrücken, und wir brauchen nur über positive k zu summieren:

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{jk\tau} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-jk\tau} + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\tau}$$
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_k e^{jk\tau} + c_k^* e^{-jk\tau} \right) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left( 2c_k e^{jk\tau} \right). \tag{5.30}$$

Die Fourier-Reihe einer reellen Funktion ist also auch in rein reeller Form angebbar. Übrigens lesen wir daraus sofort den Zusammenhang der komplexen Fourier-Koeffizienten mit den komplexen Amplituden  $\widehat{x}_k$  und den komplexen Effektivwerten  $X_k = \widehat{x}_k/\sqrt{2}$  der Fourier-Teilschwingungen ab:

$$c_0 = \overline{x}, \quad c_k = \hat{x}_k/2 = X_k/\sqrt{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$
 (5.31)

 $\overline{x}$  ist der lineare Mittelwert (Durchschnittswert, Gleichanteil).

Für reelle Fourier-Reihen reeller Funktionen sind unterschiedliche Darstellungen in Gebrauch. So folgt z.B. aus den Gln.(5.30) und (5.31) über die Polarform der komplexen Amplituden,  $\widehat{x}_k = |\widehat{x}_k| \exp(j\varphi_k)$ ,

$$x(\tau) = \overline{x} + \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{x}_k| \cos(k\tau + \varphi_k), \quad \varphi_k = \operatorname{arc}(\widehat{x}_k),$$
 (5.32)

mit

$$\overline{x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) d\tau, \quad \widehat{x}_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) e^{-jk\tau} d\tau.$$
 (5.33)

Wir können die komplexen Amplituden  $\widehat{x}_k$  der Fourier-Teilschwingungen aber auch in ihren Realteil  $\widehat{x}_k'$  und ihren Imaginärteil  $\widehat{x}_k''$  aufspalten,  $\widehat{x}_k = \widehat{x}_k' + j\widehat{x}_k''$ . Dazu gehört die reelle Darstellung der Fourier-Entwicklung

$$x(\tau) = \overline{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{x}'_k \cos(k\tau) - \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{x}''_k \sin(k\tau)$$
 (5.34)

mit

$$\overline{x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) d\tau, \quad \widehat{x}_k' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) \cos(k\tau) d\tau, \quad \widehat{x}_k'' = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) \sin(k\tau) d\tau,$$

die meist in der nicht bezogenen Form

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_1 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_1 t)$$
 (5.35)

mit

$$a_{k} = \frac{2}{T_{1}} \int_{0}^{T_{1}} u(t) \cos(k\omega_{1}t) dt, \quad b_{k} = \frac{2}{T_{1}} \int_{0}^{T_{1}} u(t) \sin(k\omega_{1}t) dt$$
 (5.36)

benutzt wird. Dabei bestehen die Zusammenhänge

$$a_0/2 = U_{\rm B}\overline{x},$$

$$a_k = U_{\rm B}\widehat{x}'_k = U_{\rm B} |\widehat{x}_k| \cos(\varphi_k),$$

$$b_k = -U_{\rm B}\widehat{x}''_k = -U_{\rm B} |\widehat{x}_k| \sin(\varphi_k).$$
(5.37)

Wie erwähnt, müssen die Integrale bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten nicht notwendig über das Intervall von 0 bis  $2\pi$  bzw. von 0 bis  $T_1$  erstreckt werden. Jedes Integrationsintervall von der Dauer einer fundamentalen Periode ist gleichwertig.

#### 3. Spiegelung

Bei Zeitspiegelung eines Signals  $x(\tau) \circ - c_k$  sind die Koeffizienten  $c_k$  durch  $c_{-k}$  zu ersetzen,

$$x(-\tau) \circ - c_{-k}$$
 (5.38)

Dies folgt unmittelbar aus (5.15) über  $\tau \mapsto -\tau$ .

#### 4. Gerade Funktion

Gerade Funktionen sind invariant gegenüber Spiegelungen  $\tau \mapsto -\tau$ . Das bedeutet wegen Gl.(5.38)

$$x(-\tau) = x(\tau) \iff c_{-k} = c_k$$
, (5.39)

und wir können Reihenglieder mit positivem und negativem k zusammenfassen:

$$x(\tau) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( e^{jk\tau} + e^{-jk\tau} \right) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2c_k \cos(k\tau),$$
 (5.40)

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) \cos(k\tau) d\tau.$$
 (5.41)

Geraden periodischen Funktionen sind einseitige Kosinus-Reihen zugeordnet. Sind die Funktionen zusätzlich reell, so sind auch die Fourier-Koeffizienten reell.

#### 5. Ungerade Funktion

Ungerade Funktionen wechseln unter der Spiegelung  $\tau\mapsto -\tau$  ihr Vorzeichen. Zusammen mit der Korrespondenz (5.38) schließen wir daraus auf

$$x(-\tau) = -x(\tau) \iff c_{-k} = -c_k , \qquad (5.42)$$

was wieder die Kombination von Reihengliedern mit positivem und negativem k ermöglicht<sup>6</sup>:

$$x(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( e^{jk\tau} - e^{-jk\tau} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} j2c_k \sin(k\tau),$$
 (5.43)

$$c_k = \frac{-\mathrm{j}}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) \sin(k\tau) \,\mathrm{d}\tau. \tag{5.44}$$

Ungeraden periodischen Funktionen sind einseitige Sinus-Reihen zugeordnet. Bei zusätzlich reellen Funktionen sind die komplexen Fourier-Koeffizienten imaginär.

## 5.4 Faltung und Korrelation

Als die wichtigsten Verknüpfungen haben die Faltung und die Korrelation auch für periodische Signale eine gewisse Bedeutung. Wir werden sie jedoch geringfügig ändern, indem wir uns jeweils auf eine fundamentale Periode beschränken.

#### Periodische Faltung

Die periodische Faltung von zwei  $T_1$ -periodischen Funktionen definieren wir analog zum gewöhnlichen Faltungsprodukt (3.65), wählen als Integrationsbereich aber ein Intervall von der Dauer  $T_1$  und dividieren durch diese Dauer. Für  $2\pi$ -periodische Signale  $x_1(\tau)$  und  $x_2(\tau)$  schreiben wir demnach<sup>7</sup>

$$x_1(\tau) * x_2(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_1(\tau') x_2(\tau - \tau') d\tau'.$$
 (5.45)

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Ungerade Funktionen sind natürlich mittelwertfrei,  $c_0 = 0$ .

 $<sup>^7\</sup>mathrm{Auch}$  diese modifizierte Verknüpfung ist u.a. kommutativ.

Einsetzen der Fourier-Reihen für  $x_1$  und  $x_2$  liefert

$$\begin{split} x_1(\tau) \mathop{*}_{\mathbf{p}} x_2(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_k c_{1k} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\tau'} \right] \left[ \sum_l c_{2l} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}l(\tau-\tau')} \right] \mathrm{d}\tau' \\ &= \sum_k \sum_l c_{1k} c_{2l} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}l\tau} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k-l)\tau'} \mathrm{d}\tau' = \sum_k c_{1k} c_{2k} \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\tau}, \end{split}$$

wobei die Orthogonalitätsrelationen

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} e^{j(k-l)\tau} d\tau = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$
(5.46)

benutzt wurden. Dies zeigt die Gültigkeit der Korrespondenz

$$x_1(\tau) * x_2(\tau) \circ - c_{1k}c_{2k}$$
, (5.47)

entsprechend dem Faltungssatz (3.70).

Als einfache Anwendung schließen wir mit Bezug auf Abb.5.3 und Gl.(5.26): Liegt an einem stabilen LTI-System der  $2\pi$ -periodische Eingang  $u(\tau)$ , so erscheint am Ausgang die periodische Faltung des Eingangssignals mit der periodischen Stoßantwort,

$$y(\tau) = g_p(\tau) * u(\tau) \circ - c_{yk} = G(jk)c_{uk}$$
, (5.48)

vorausgesetzt, das System antwortet periodisch auf die periodische Erregung.

#### Periodische Korrelation

Ähnliches wie für die periodische Faltung ergibt sich auch für die periodische Korrelation, definiert für  $2\pi$ -periodische Signale durch

$$x_1(\tau) \underset{p}{\otimes} x_2(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_1^*(\tau') x_2(\tau + \tau') d\tau'.$$
 (5.49)

Die Korrespondenz

$$x_1(\tau) \underset{p}{\otimes} x_2(\tau) \longrightarrow c_{1k}^* c_{2k}$$
 (5.50)

zeigt, wie die Fourier-Koeffizienten eines durch periodische Korrelation entstandenen Signals zu berechnen sind.

#### Produkt

Durch die gewöhnliche Produktbildung von zwei  $T_1$ -periodischen Funktionen entsteht i.A. wieder eine  $T_1$ -periodische Funktion. Wie lassen sich die zugehörigen Fourier-Komponenten berechnen?

Wir schreiben die Reihen für  $2\pi$ -periodische Signale an und fassen geeignet zusammen,

$$x_1(\tau)x_2(\tau) = \left[\sum_{l} c_{1l} e^{jl\tau}\right] \left[\sum_{m} c_{2m} e^{jm\tau}\right] = \sum_{l} \sum_{m} c_{1l} c_{2m} e^{j(l+m)\tau}$$
$$= \sum_{l} \sum_{k} c_{1l} c_{2k-l} e^{jk\tau}, \qquad (5.51)$$

und lesen daraus die Korrespondenz

$$x_1(\tau)x_2(\tau) \circ - \bullet \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{1 l} c_{2 k-l}$$
 (5.52)

ab. Sie entspricht bei Fourier-Transformationen der Faltung im Frequenzbereich.

#### Die Parseval-Gleichung

Die Korrespondenz (5.50) für die periodische Korrelation bedeutet, ausführlich angeschrieben,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_1^*(\tau') x_2(\tau + \tau') d\tau' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{1k}^* c_{2k} e^{jk\tau},$$

und ausgewertet bei  $\tau = 0$ ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} x_{1}^{*}(\tau)x_{2}(\tau)d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{1k}^{*}c_{2k}. \qquad (5.53)$$

Der linke Ausdruck entspricht dem im Zusammenhang mit Gl.(5.9) erwähnten inneren Produkt, hier im Raum der  $2\pi$ -periodischen, quadratisch integrablen Funktionen. Die daraus für  $x_1=x_2=x$  entstehende Beziehung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(\tau)|^2 d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$
 (5.54)

wird Parseval-Gleichung für Fourier-Reihen genannt und spielt eine zentrale Rolle bei Untersuchungen zur Approximation von Funktionen durch Fourier-Reihen. Die linke Seite stellt überdies die bezogene Signalleistung dar, d.h. das Quadrat des Effektivwert-Betrags |X| der periodischen Funktion x. Handelt es sich speziell um eine reellwertige Funktion, so folgt daraus wegen  $c_{-k} = c_k^*$  und wegen des Zusammenhangs (5.31) der komplexen Fourier-Koeffizienten mit den komplexen Effektivwerten die wichtige Beziehung

$$|X| = \sqrt{\overline{x}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |X_k|^2}.$$
 (5.55)

Der Effektivwert eines (reellen) periodischen Vorgangs ist die Wurzel aus der Summe der Quadrate des linearen Mittelwerts und der Effektivwerte der Fourier-Teilschwingungen. Mit diesen und ähnlichen Eigenschaften periodischer Vorgänge und den daraus resultierenden Benennungen werden wir uns im folgenden Kapitel beschäftigen.

## 5.5 Zusammenfassung

Periodischen Signalen ist ein Spektrum zugeordnet, in dem nur Komponenten mit ganzzahligen Vielfachen einer Grundfrequenz vorkommen. Dem entspricht die Entwicklung in eine unendliche Reihe elementarer komplexer Sinusschwingungen. Die Bestimmung der zugehörigen Entwicklungskoeffizienten, die eng mit den komplexen Amplituden der Teilschwingungen verknüpft sind, nennt man Fourier-Analyse.

An Signalen im Zeitbereich durchzuführende Operationen lassen sich nach bestimmten Übersetzungsregeln, die wir als elementare Eigenschaften formuliert haben, auch an den Fourier-Koeffizienten vornehmen. So können wir etwa die Fourier-Reihen von Linearkombinationen, von zeitverschobenen, differenzierten oder integrierten Signalen direkt angeben, ohne erneut eine Analyse durchführen zu müssen.

Auch die Symmetrieeigenschaften von Signalen wirken sich direkt auf die Koeffizienten aus, was sich häufig vorteilhaft nutzen lässt. Beispielsweise werden gerade Funktionen durch reine Kosinus-Reihen, ungerade Funktionen durch reine Sinus-Reihen wiedergegeben.

Für die Verarbeitung periodischer Signale führen wir die periodische Faltung und die periodische Korrelation ein. Werden diese Verknüpfungen über die Fourier-Koeffizienten vorgenommen, ergeben sich in der Regel erhebliche rechentechnische Vorteile.

# Kapitel 6

# Oberschwingungen

Sie werden nun eine Reihe von Begriffen kennen lernen, die im Zusammenhang mit periodischen Vorgängen Verwendung finden, im Speziellen mit periodisch verlaufenden elektrischen Strömen und Spannungen. Wir betrachten dazu reellwertige, zeitlich periodische Größen<sup>1</sup> und ihre Fourier-Darstellungen

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |U_k| \sqrt{2} \cos(k\omega_1 t + \varphi_{uk}),$$
(6.1)

$$C_{-k} = C_k^*$$
,  $U_0 = C_0$ ,  $U_k = \sqrt{2}C_k = |U_k| e^{j\varphi_{uk}}$ , (6.2)

$$U_0 = \overline{u} = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} u(t) dt, \qquad U_k = \frac{\sqrt{2}}{T_1} \int_0^{T_1} u(t) e^{-jk\omega_1 t} dt.$$
 (6.3)

 $T_1$  ist die fundamentale Periodendauer des Vorgangs und  $\omega_1 = 2\pi/T_1$  ist die Grundkreisfrequenz. Den linearen Mittelwert oder Durchschnittswert  $\overline{u}$  bezeichnen wir mit  $U_0$ , den komplexen Effektivwert der k-ten Fourier-Teilschwingung (der k-ten Harmonischen) mit  $U_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \ldots$  Ihr Betrag  $|U_k|$  ist der (reelle) Effektivwert der k-ten Fourier-Teilschwingung.

## 6.1 Mischgrößen

Eine zeitlich periodisch verlaufende Größe u mit nicht verschwindendem Durchschnittswert  $U_0$  wird allgemein Mischgröße genannt, speziell Mischspannung
oder Mischstrom. Der Maximalwert ihres Betrages,  $\hat{u} = |u|_{\text{max}}$ , heißt Größtwert
oder Maximalwert der Mischgröße. Der Durchschnittswert  $U_0$  heißt auch Gleichanteil. Der Wechselanteil

$$u_{\sim} = u - U_0 \tag{6.4}$$

ist natürlich mittelwertfrei und kann in die Grundschwingung und in die Oberschwingungen zerlegt werden. Wir nennen

 $<sup>^1</sup>$ Sie können u(t) hier zunächst als elektrische Spannung auffassen. Die gleichen Beziehungen gelten aber auch für periodische Ströme und andere periodisch verlaufende Größen.

U Effektivwert der Mischgröße,  $U_{\sim}$  Effektivwert des Wechselanteils,  $|U_1|$  Effektivwert der Grundschwingung,  $|U_2|$ ,  $|U_3|$ ,  $\cdots$  Effektivwerte der Oberschwingungen,

wobei, entsprechend Gl.(5.55), die Zusammenhänge

$$U = \sqrt{\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} u^2 dt} = \sqrt{U_0^2 + |U_1|^2 + |U_2|^2 + |U_3|^2 + \cdots},$$
 (6.5)

$$U_{\sim} = \sqrt{|U_1|^2 + |U_2|^2 + |U_3|^2 + \dots} = \sqrt{U^2 - U_0^2}$$
(6.6)

bestehen. Als Kenngrößen sind weiters in Gebrauch:

Schwingungsgehalt

$$\frac{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}{\text{Effektivwert der Mischgröße}} = \frac{U_{\sim}}{U}$$
 (6.7)

Effektive Welligkeit

$$\frac{\text{Effektivwert des Wechselanteils}}{\text{Betrag des Gleichanteils}} = \frac{U_{\sim}}{|U_0|}$$
(6.8)

Scheitelwelligkeit (Riffelfaktor)

$$\frac{\text{Scheitelwert des Wechselanteils}}{\text{Betrag des Gleichanteils}} = \frac{\widehat{u}_{\sim}}{|U_0|} = \frac{|u - U_0|_{\text{max}}}{|U_0|}$$
(6.9)

## 6.2 Wechselgrößen

Eine zeitlich periodisch verlaufende Größe u mit verschwindendem Durchschnittswert,  $U_0=0$ , heißt allgemein Wechselgröße, z.B. Wechselspannung oder Wechselstrom. Den Maximalwert ihres Betrages,  $\widehat{u}=|u|_{\max}$ , nennt man hier den Scheitelwert der Wechselgröße<sup>2</sup>. Mit den gleichen Bezeichnungen wie für Mischgrößen reduziert sich der Ausdruck für den Effektivwert auf

$$U = \sqrt{|U_1|^2 + |U_2|^2 + |U_3|^2 \cdots}.$$
 (6.10)

Weitere gebräuchliche Kenngrößen sind:

Scheitelfaktor

$$\frac{\text{Scheitelwert der Wechselgröße}}{\text{Effektivwert der Wechselgröße}} = \frac{\widehat{u}}{U}$$
 (6.11)

 $<sup>^2\</sup>mathrm{Die}$  Benennung Amplitudebleibt in der Regel dem Scheitelwert von Sinusgrößen vorbehalten.

Grundschwingungsgehalt

$$g_{\rm u} = \frac{\text{Effektivwert der Grundschwingung}}{\text{Effektivwert der Wechselgröße}} = \frac{|U_1|}{U}$$
 (6.12)

Oberschwingungsgehalt (Klirrfaktor)

$$k_{\rm u} = \frac{\text{Effektivwert der Oberschwingungen}}{\text{Effektivwert der Wechselgröße}} = \frac{\sqrt{|U_2|^2 + |U_3|^2 + \cdots}}{U}$$
(6.13)
$$= \sqrt{1 - (|U_1|/U)^2} = \sqrt{1 - g_u^2}$$

## 6.3 Leistungsgrößen

Zur Bewertung des elektrischen Energieflusses über ein Anschlusspaar werden in der Elektrotechnik spezielle Leistungsgrößen verwendet. Die wichtigsten davon werden wir jetzt mit den Fourier-Größen in Verbindung setzen.

Für allgemeine zeitliche Verläufe ist der Momentanwert p der Leistung unter Beachtung der Bezugssinne durch das Produkt der Momentanwerte von Spannung u und Strom i gegeben. Haben wir nun speziell eine Mischspannung und einen Mischstrom vorliegen, so ergibt sich aus deren Fourier-Darstellungen

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |U_k| \sqrt{2} \cos(k\omega_1 t + \varphi_{uk}),$$
 (6.14)

$$i(t) = I_0 + \sum_{l=1}^{\infty} |I_l| \sqrt{2} \cos(l\omega_1 t + \varphi_{il})$$
 (6.15)

nach Multiplikation der umfangreiche Ausdruck für die Momentanleistung

$$p(t) = U_{0}I_{0} + \sum_{k=1}^{\infty} |U_{k}| |I_{k}| \cos(\varphi_{uk} - \varphi_{ik})$$

$$+ U_{0}\sum_{k=1}^{\infty} |I_{k}| \sqrt{2}\cos(k\omega_{1}t + \varphi_{ik}) + I_{0}\sum_{k=1}^{\infty} |U_{k}| \sqrt{2}\cos(k\omega_{1}t + \varphi_{uk})$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |U_{k}| |I_{l}| \cos[(k+l)\omega_{1}t + \varphi_{uk} + \varphi_{il}]$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |U_{k}| |I_{l}| \cos[(k-l)\omega_{1}t + \varphi_{uk} - \varphi_{il}] .$$
(6.16)

Ihr zeitunabhängiger Durchschnittswert steht auf der rechten Seite der ersten Zeile. Er wird – wie bei Kreisen mit Sinusspannungen und Sinusströmen nur einer Frequenz – Wirkleistung genannt,

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |U_k| |I_k| \cos(\varphi_{uk} - \varphi_{ik}) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{Re}(U_k I_k^*) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k .$$
 (6.17)

Die restlichen Terme repräsentieren den i.A. mit der Grundfrequenz periodischen Wechselanteil der Leistung.

Aus Gl.(6.17) folgt ein wichtiges Ergebnis: Sie können die Wirkleistung  $P_0$  für die Gleichanteile,  $P_1$  für die Grundschwingung und  $P_k$ ,  $k=2,3,\ldots$ , für die Oberschwingungen getrennt berechnen und dann zur gesamten Wirkleistung P summieren. Ist das betrachtete System überdies linear oder handelt es sich um ein linearisiertes Ersatzsystem, so sind dabei die Methoden der elementaren Wechselstromrechnung anwendbar.

Es ist wünschenswert, für Ströme und Spannungen mit Oberschwingungen neben der Wirkleistung auch Verallgemeinerungen der bewährten Begriffe Scheinleistung und Blindleistung zur Verfügung zu haben. Es gibt dafür mehrere sinnvolle Möglichkeiten, und dem entsprechend werden Sie in der Literatur diese Größen in unterschiedlichen Formen antreffen. Achten Sie daher immer auf die Definitionen!

Wir verwenden hier die einfachsten Formen: Die Scheinleistung S wird als Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom erklärt,

$$S = UI (6.18)$$

mit

$$U = \sqrt{{U_0^2 + |U_1|^2 + |U_2|^2 + \cdots}}, \quad I = \sqrt{{I_0^2 + |I_1|^2 + |I_2|^2 + \cdots}},$$

und die Blindleistung Q, abgesehen vom Vorzeichen, durch die Beziehung

$$S^2 = P^2 + Q^2$$
. (6.19)

Wir können auch eine komplexe Scheinleistungsgröße

$$S_v = \sum_{k=0}^{\infty} U_k I_k^*$$
(6.20)

definieren, deren Betrag i.A. aber *nicht* der Scheinleistung entspricht. Ihr Realteil ist, wie Sie aus den Gln.(6.17) ersehen, gleich der Wirkleistung *P*, und ihr Imaginärteil heißt Verschiebungsblindleistung,

$$Q_v = \sum_{k=0}^{\infty} Q_{vk} = \sum_{k=0}^{\infty} \text{Im}(U_k I_k^*), \quad S_v = P + jQ_v.$$
 (6.21)

Sie ist, wie die Wirkleistung, für die einzelnen Fourier-Komponenten getrennt berechenbar und wird durch die Verzerrungsleistung D zur Gesamtblindleistung quadratisch ergänzt,

$$Q^2 = Q_v^2 + D^2$$
,  $S^2 = |S_v|^2 + D^2$ . (6.22)

Graphisch können Sie sich diese Zusammenhänge wie in Abb.6.1 veranschaulichen.

#### Periodisches Schalten

Ein einfaches Beispiel zu den erweiterten Leistungsbegriffen: Ein Widerstand R liege über einen periodisch betätigten Schalter mit dem Einschaltverhältnis

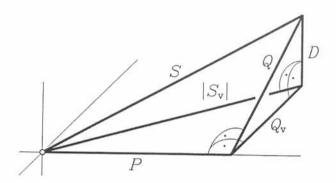


Abb. 6.1 Veranschaulichung der Zusammenhänge der Leistungskenngrößen bei allgemein periodischen Spannungen und Strömen.

 $\beta$  an einer starren Gleichspannungsquelle (Abb.6.2). Wir interessieren uns für die Leistungsgrößen bezüglich der Anschlüsse AB. Aus den Definitionen folgt unmittelbar für die Gleichanteile  $I_0, U_0$  und die Effektivwerte I, U von Strom und Spannung

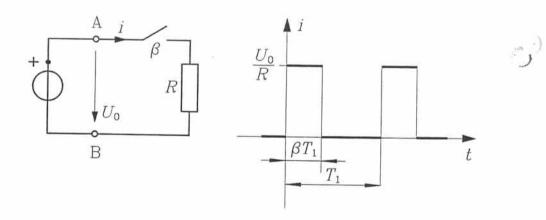
$$I_0 = \beta U_0/R$$
,  $I = \sqrt{\beta} U_0/R$ ,  $U = U_0$ .

Scheinleistung S, Wirkleistung P und Blindleistung Q sind daher und wegen  $U_k=0$  für  $k\geqslant 1$ 

$$S = UI = \sqrt{\beta}U_0^2/R, \quad P = U_0I_0 = \beta U_0^2/R,$$
 
$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{\beta - \beta^2}U_0^2/R.$$

Schließlich erhalten wir

$$S_{\rm v} = U_0 I_0 = P, \quad Q_{\rm v} = 0, \quad D = Q$$
;



 ${\bf Abb.~6.2} \quad \hbox{Ein Widerstand liegt "über einen periodisch bet" ätigten Schalter an einer starren Gleichspannungsquelle.}$ 

die Verschiebungsblindleisung  $Q_{\rm v}$  verschwindet, und die gesamte Blindleistung Q ist Verzerrungsleistung D. Trotz des rein ohmschen Charakters der Last tritt wegen ihrer zeitlichen Variabilität von der Quelle aus betrachtet Blindleistung auf. Wie Sie sehen, ist der Begriff der Blindleistung hier etwas weiter gefasst als bei Kreisen mit monofrequenten Sinusgrößen, wo er an Phasenverschiebungswinkel geknüpft ist. Dem traditionellen Blindleistungsbegriff entspricht am ehesten die Verschiebungsblindleistung.

## Sinusspannung und Wechselstrom

Ein wichtiger, weil im Zusammenhang mit Stromrichterschaltungen häufig vorkommender Sonderfall ist das Produkt einer Sinusspannung mit einem allgemeinen Wechselstrom gleicher Grundfrequenz. Die Effektivwerte von Spannung und Strom und die Scheinleistung sind dann

$$U = |U_1|, \quad I = \sqrt{|I_1|^2 + |I_2|^2 + |I_3|^2 + \cdots},$$
  
 $S = UI = U\sqrt{|I_1|^2 + |I_2|^2 + |I_3|^2 + \cdots}.$  (6.23)

Die Wirkleistung P hängt hier nur von den Grundschwingungen ab, dagegen sind für die Blindleistung Q auch die Strom-Oberschwingungen maßgebend,

$$P = \text{Re}(U_1 I_1^*) = U |I_1| \cos(\varphi_1) = S g_i \cos(\varphi_1),$$
 (6.24)

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{\left[U |I_1| \sin(\varphi_1)\right]^2 + U^2 \left(|I_2|^2 + |I_3|^2 + \cdots\right)}, \quad (6.25)$$

wobei  $\varphi_1$  den Phasenverschiebungswinkel der Sinusspannung gegen die Strom-Grundschwingung und  $g_i$  den Grundschwingungsgehalt (Gl.(6.12)) des Stroms bedeutet. In die komplexe Scheinleistungsgröße Gl.(6.20) gehen ebenfalls nur die Grundschwingungen ein,  $S_{\mathbf{v}} = U_1 I_1^*$ . Ihr Realteil ist die Wirkleistung. Ihr Imaginärteil, die Verschiebungsblindleistung, wird dann Grundschwingungsblindleistung

$$Q_1 = \text{Im}(U_1I_1^*) = U|I_1|\sin(\varphi_1) = Sg_i\sin(\varphi_1)$$
 (6.26)

genannt. Ihr Betrag,  $S_1 = |S_v| = U |I_1|$ , heißt Grundschwingungsscheinleistung. Den Quotienten Wirkleistung durch Scheinleistung nennt man wie üblich Leistungsfaktor,

$$\lambda = P/S = g_i \cos(\varphi_1). \qquad (6.27)$$

Er unterscheidet sich, wie Sie sehen, vom Wert  $cos(\varphi_1) = P/S_1$ , der hier als Verschiebungsfaktor oder Grundschwingungsleistungsfaktor bezeichnet wird. Schließlich ist die Verzerrungsleistung D gegeben durch

$$D = \sqrt{S^2 - S_1^2} = U\sqrt{|I_2|^2 + |I_3|^2 + \cdots} = k_i S, \qquad (6.28)$$

mit dem Oberschwingungsgehalt  $k_i$  des Stroms (Gl.(6.13)). Die entsprechenden Begriffsbildungen für mehrphasige symmetrische Systeme sind ganz ähnlich vorzunehmen. Beim Arbeiten mit Stranggrößen brauchen Sie die "einphasigen"

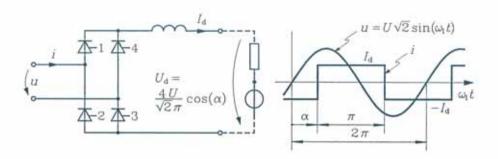


Abb. 6.3 Gleichrichterbrücke mit gesteuerten Halbleiterventilen und zugehörige Verläufe von Spannung und Strom auf der Netzseite.

Leistungen lediglich mit der Strangzahl zu multiplizieren, um die entsprechenden Werte für das Gesamtsystem zu erhalten<sup>3</sup>.

Abschließend noch ein Beispiel: Wir betrachten den Gleichrichtteil einer Stromrichterschaltung, die aus einem Einphasen-Wechselstromnetz gespeist wird (Abb. 6.3). Die Glättungsdrossel sorgt für einen annähernd welligkeitsfreien Strom  $I_{\rm d}$  auf der Gleichstromseite. Die Schaltung enthält vier gesteuerte Halbleiterventile, die erst dann in Durchlassrichtung leitend werden, wenn an den jeweiligen Steueranschluss ein geeigneter Spannungsimpuls gelegt wird. Durch eine gegenüber den Spannungsnulldurchgängen um den Steuerwinkel  $\alpha$  (entsprechend der Zeitdifferenz  $\alpha/\omega_1$ ) verzögerte Ansteuerung der Ventile 1 und 3 bzw. 2 und 4 lässt sich der Gleichspannungswert  $U_{\rm d}$  einstellen. Auf der Netzseite erscheint dann ein Wechselstrom, der rechteckförmig verläuft und gegenüber der anliegenden Sinusspannung um den Steuerwinkel  $\alpha$  verschoben ist.

Die komplexen Effektivwerte der Fourier-Komponenten dieser Wechselgrößen lassen sich mit den Gln.(6.1) bis (6.3) oder über die Ergebnisse des Beispiels aus Abb.5.1 zusammen mit dem Verschiebungssatz (5.21) leicht angeben:

$$U_1 = -\mathrm{j} U, \quad U_k = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 2, 3, \dots,$$
 
$$I_k = -\mathrm{j} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j} k \alpha} \frac{2 \sqrt{2}}{k \pi} \, I_{\mathrm{d}} \quad \text{für} \quad k = 1, 3, 5, \dots,$$
 
$$I_k = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 2, 4, \dots.$$

Ohne Rechnung erhalten wir für den Gesamt-Effektivwert des Stroms und für die Scheinleistung

$$I = I_d$$
,  $S = UI_d$ ,

und damit für den Grundschwingungsgehalt  $g_i$  und den Oberschwingungsgehalt  $k_i$  des Stroms

$$g_{\rm i} = |I_1|/I = 2\sqrt{2}/\pi = 0,900$$
 ,   
  $k_{\rm i} = \sqrt{1-g_{\rm i}^2} = \sqrt{1-8/\pi^2} = 0,435$  ,

 $<sup>^3</sup>$ Über die Begriffsbildungen bei mehrphasigen unsymmetrischen Systemen konnte bisher keine Einigung erreicht werden.

und für die Grundschwingungsscheinleistung  $S_1$ , die Grundschwingungsblindleistung  $Q_1$ , die Wirkleistung P, die gesamte Blindleistung Q und die Verzerrungsleistung D,

$$\begin{split} S_1 &= U \, |I_1| = g_{\rm i} \, S = 0,900 \, U I_{\rm d} \; , \\ Q_1 &= g_{\rm i} \, S \sin(\alpha) = 0,900 \, U I_{\rm d} \sin(\alpha), \\ P &= g_{\rm i} \, S \cos(\alpha) = 0,900 \, U I_{\rm d} \cos(\alpha), \\ Q &= \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{1 - 0,811 \cos^2(\alpha)} \, U I_{\rm d} \; , \\ D &= k_{\rm i} \, S = 0,435 \, U I_{\rm d} \; . \end{split}$$

Der Leistungsfaktor

$$\lambda = P/S = g_i \cos(\alpha) = 0,900 \cos(\alpha)$$

ist etwas kleiner als der Verschiebungsfaktor (Grundschwingungsleistungsfaktor)  $P/S_1 = \cos(\varphi_1) = \cos(\alpha)$ . Das letzte Ergebnis können Sie auch direkt aus Abb.6.3 rechts ablesen: Die Spannungsschwingung ist gegenüber der Strom-Grundschwingung um den Steuerwinkel  $\alpha$  phasenverschoben. Weil diese Phasenverschiebung durch die verzögerte Ansteuerung der Ventile entsteht, nennt man die Grundschwingungsblindleistung  $Q_1$  hier auch Steuerblindleistung. Eine genauere Untersuchung des Kommutierungsvorgangs, d.h. der Stromübergabe von der einen Ventilgruppe auf die andere zeigt, dass in Stromrichterschaltungen dieser Art bei der Berechnung der Grundschwingungsblindleistung neben der Steuerblindleistung i.A. noch ein weiterer Blindleistungsbeitrag, die Kommutierungsblindleistung, zu berücksichtigen ist.

## 6.4 Nichtlineare Systeme

Fourier-Analysen können grundsätzlich auch für Signale in nichtlinearen Systemen durchgeführt werden, das Superpositionsprinzip steht jedoch als Systemeigenschaft nicht zur Verfügung. Sie können also z.B. eine periodisch verlaufende Eingangsgröße und, wenn daraus eine periodisch verlaufende Ausgangsgröße entsteht, auch diese in Fourier-Komponenten zerlegen, Sie können aber nicht, wie bei linearen Systemen, die Antworten auf die Komponenten einzeln bestimmen und diese anschließend zur Ausgangsgröße synthetisieren. Ein typisches Beispiel dafür ist die Gleichrichterbrücke aus Abb.6.3, die wesentlich nichtlineare Elemente, nämlich die vier Halbleiterventile, enthält.

### Entstehen von Oberschwingungen

Um die Nichtgültigkeit des Überlagerungsprinzips deutlich zu sehen, betrachten wir ein speicherfreies, nichtlineares System, dessen Ausgangsgröße y von der Eingangsgröße u über eine Polynom-Funktion dritten Grades<sup>4</sup> abhängt,

$$y = F(u), \quad F(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3.$$
 (6.29)

Diese Abbildung  $F: u \longmapsto y = F(u)$  erfüllt nur dann die Linearitätsforderung (1.49), wenn die Koeffizienten  $a_0, a_2$  und  $a_3$  gleich Null sind.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Es kann sich z.B. um die ersten Glieder einer Potenz-Reihenentwicklung handeln, als Approximation eines allgemeineren Funktionsverlaufes im betrachteten Intervall von u.

Angenommen, die Eingangsgröße verläuft sinusförmig gemäß  $u(\tau)=\widehat{u}\cos(\tau)$ . Am Ausgang unseres Systems erscheint dann<sup>5</sup>

$$y(\tau) = a_0 + a_1 \widehat{u} \cos(\tau) + a_2 \widehat{u}^2 \cos^2(\tau) + a_3 \widehat{u}^3 \cos^3(\tau)$$

$$= a_0 + \frac{1}{2} a_2 \widehat{u}^2 + \left( a_1 \widehat{u} + \frac{3}{4} a_3 \widehat{u}^3 \right) \cos(\tau)$$

$$+ \frac{1}{2} a_2 \widehat{u}^2 \cos(2\tau) + \frac{1}{4} a_3 \widehat{u}^3 \cos(3\tau), \tag{6.30}$$

also eine Schwingung bestehend aus einem Gleichanteil, einer Grundschwingung mit der Frequenz der Eingangsgröße aber auch aus Oberschwingungen der zweifachen und dreifachen Grundfrequenz. Gibt es in der Darstellung von F Terme bis zur n-ten Potenz von u, so entstehen aus einer einfachen Sinusschwingung harmonische Komponenten bis zur n-fachen Frequenz. Man nennt diese Erscheinung Erzeugung höherer Harmonischer. Beachten Sie, dass auch für  $a_0 = 0$  i.A. ein Gleichanteil auftritt. Wenn dagegen F eine ungerade Funktion ist, dann gibt es keinen Gleichanteil und auch keine geradzahligen Oberschwingungen.

#### Sättigungserscheinung

Als Beispiel untersuchen wir qualitativ den eingeschwungenen Stromverlauf in einer Spule, an der die Sinusspannung  $u=U\sqrt{2}\cos(\omega_1t)$  liegt und die einen unterhalb der Sättigung ideal magnetisierbaren Rückschluss besitzt. Eingangsgröße unseres Systems ist also die Spannung, Ausgangsgröße der Spulenstrom. Den als bekannt vorausgesetzten Zusammenhang zwischen dem Verkettungsfluss  $\Phi_{\rm v}$  der Spule und dem Spulenstrom i wollen wir durch eine Kurve aus Geradenstücken annähern (Abb.6.4). Magnetische Hysterese wird nicht berücksichtigt, auch den Spulenwiderstand werden wir vernachlässigen.

Reicht die Amplitude  $\widehat{\Phi}_{\mathbf{v}}$  des Verkettungsflusses nicht für Sättigungserscheinungen aus,  $\widehat{\Phi}_{\mathbf{v}} < \Phi_{\mathbf{vs}}$ , dann liefert unsere Näherung den Strom Null. Erst im Sättigungsbereich ist ein Strom feststellbar:

$$\begin{aligned} |\varPhi_{\mathbf{v}}| &\leqslant \varPhi_{\mathbf{v}\mathbf{s}} &: i(t) = 0\\ \varPhi_{\mathbf{v}} &> \varPhi_{\mathbf{v}\mathbf{s}} &: i(t) = \frac{\varPhi_{\mathbf{v}\mathbf{s}}}{L_{\mathbf{s}}} \left[\sigma \sin(\omega_{1}t) - 1\right]\\ \varPhi_{\mathbf{v}} &< -\varPhi_{\mathbf{v}\mathbf{s}} &: i(t) = \frac{\varPhi_{\mathbf{v}\mathbf{s}}}{L_{\mathbf{s}}} \left[\sigma \sin(\omega_{1}t) + 1\right] \end{aligned} \tag{6.31}$$

Die Spiegelung der Sinusfunktion an der nichtlinearen, ungeraden Magnetisierungskurve liefert wieder eine ungerade Funktion mit der Symmetrie der Sinusfunktion und deshalb als Fourier-Reihe eine Sinusreihe mit Gliedern nur ungerader Ordnungszahl,

$$i(t) = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} b_k \sin(k\omega_1 t), \tag{6.32}$$

wobei

$$b_k = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} i(t) \sin(k\omega_1 t) dt = \frac{8}{T_1} \int_0^{T_1/4} i(t) \sin(k\omega_1 t) dt.$$

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Sie zeigen dies durch Ausrechnen der Potenzen von  $\cos(\tau)=(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\tau})/2$  und erneutes Zusammenfassen.

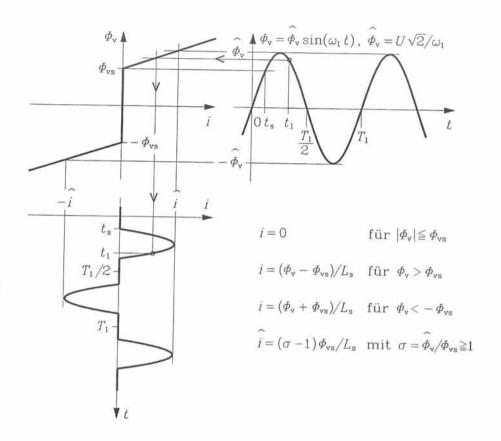


Abb. 6.4 Eingeschwungener Stromverlauf in einer Spule mit sättigbarem magnetischem Rückschluss bei eingeprägter Sinusspannung. Die Magnetisierungslinie des Kreises ist stark idealisiert mit charakteristischen Konstanten  $\Phi_{vs}$  und  $L_s$ .

Für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten setzen wir

$$\omega_1 t = \tau, \quad \omega_1 t_s = \tau_s, \quad \sigma \sin(\tau_s) = 1$$

und erhalten mit (6.31) über

$$b_k = \frac{\Phi_{\rm vs}}{L_{\rm s}} \frac{4}{\pi} \int_{\tau_*}^{\pi/2} \left[ \sigma \sin(\tau) - 1 \right] \sin(k\tau) \mathrm{d}\tau$$

schließlich

$$b_{1} = \frac{\Phi_{\text{vs}}}{L_{\text{s}}} \frac{\pi - 2\tau_{\text{s}} - \sin(2\tau_{\text{s}})}{\pi \sin(\tau_{\text{s}})} , \quad \sin(\tau_{\text{s}}) = \frac{1}{\sigma} = \frac{\Phi_{\text{vs}}}{\widehat{\Phi}_{\text{v}}} ,$$

$$b_{k} = -\frac{\Phi_{\text{vs}}}{L_{\text{s}}} \frac{2}{\pi \sin(\tau_{\text{s}})} \left\{ \frac{\sin[(k-1)\tau_{\text{s}}]}{(k-1)k} + \frac{\sin[(k+1)\tau_{\text{s}}]}{k(k+1)} \right\} , \quad k = 3, 5, \dots$$

Damit ist die Reihe (6.32) für den Spulenstrom i(t) vollständig bestimmt. Wie sich die wichtigsten Fourier-Koeffizienten mit der Amplitude des Verkettungsflusses ändern, sehen Sie in Abb.6.5.

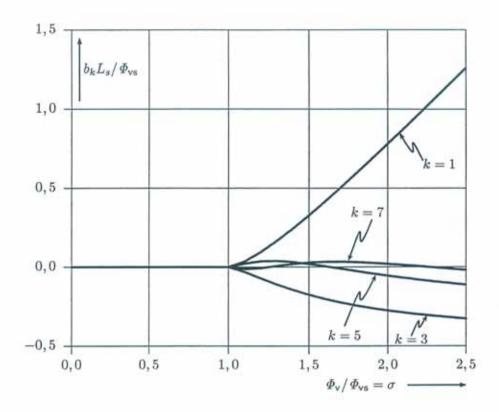


Abb. 6.5 Fourier-Koeffizienten  $b_1, b_3, b_5$  und  $b_7$  des Spulenstroms i aus Abb.6.4 in Abhängigkeit vom Verhältnis  $\sigma = \tilde{\Phi}_{\rm V}/\Phi_{\rm vs}$ . Für  $\sigma >> 1$  stellen sich die asymptotischen Werte  $b_1L_{\rm s}/\Phi_{\rm vs} \approx \sigma - 4/\pi$ , bzw.  $b_kL_{\rm s}/\Phi_{\rm vs} \approx -4/(k\pi)$ ,  $k=3,5,\ldots$ , ein.

## 6.5 Zusammenfassung

Im Hinblick auf die Fourier-Analyse periodischer Zeitverläufe physikalischer Größen sind in der elektrotechnischen Fachsprache einige spezielle Benennungen eingeführt. Beispielsweise werden periodische elektrische Ströme und Spannungen, wenn sie auch einen Gleichanteil besitzen, Mischstrom bzw. Mischspannung genannt.

Mittelwertfreie periodische Ströme und Spannungen heißen Wechselströme bzw. Wechselspannungen. Sie lassen sich in die Grundschwingung und in die Oberschwingungen (höhere Harmonische) zerlegen, wobei Kenngrößen wie etwa der Oberschwingungsgehalt (Klirrfaktor) als besondere Maße Verwendung finden.

Die aus der elementaren Wechselstromrechnung bekannten Begriffe der Wirkleistung, Scheinleistung und Blindleistung können sinnvoll verallgemeinert werden. Wir treffen dabei auf einen neuen Leistungsbegriff, die Verzerrungsleistung.

Ein stabiles, lineares und zeitinvariantes System antwortet auf eine Sinusschwingung am Eingang mit einer Sinusschwingung gleicher Frequenz am Ausgang. Bei nichtlinearen Systemen geht diese Eigenschaft verloren. Selbst wenn die Antwort wieder periodisch mit der gleichen Grundfrequenz verläuft, so ist sie i.A. nicht mehr rein sinusförmig, sondern enthält neben einem Gleichanteil auch Oberschwingungen. Dies lässt sich als Erzeugung höherer Harmonischer interpretieren.

# Kapitel 7

# Laplace-Transformation

Mit Hilfe der Fourier-Transformation führen wir zeitliche Vorgänge oder Signale auf Sinusschwingungen zurück. Dies bietet, wie Sie gesehen haben, bei linearen, zeitinvarianten Systemen entscheidende Vorteile. Gelegentlich stoßen wir aber bei der Anwendung der Fourier-Transformation auch auf Schwierigkeiten. So besitzen viele einfache, aber praktisch wichtige Signale keine Fourier-Transformierten im klassischen Sinn. Die in solchen Fällen notwendige Erweiterung auf verallgemeinerte Funktionen verhindert oft die Anwendung funktionentheoretischer Methoden.

Die nun zu besprechende, mit der Fourier-Transformation eng verwandte Laplace-Transformation ist diesbezüglich toleranter. Allerdings müssen wir bei ihrer Anwendung darauf verzichten, alle uns interessierenden Signale direkt durch sinusförmige Signale darzustellen. Es ist also nicht möglich, die Vorteile beider Verfahren gleichzeitig zu nutzen, so dass sowohl die Fourier- wie auch die Laplace-Transformation ihre Daseinsberechtigung hat. Im Allgemeinen ist die Fourier-Transformation für die informationstechnische Systemtheorie attraktiver, die Laplace-Transformation dagegen für die Untersuchung von Ausgleichsvorgängen, insbesondere in Systemen der Automatisierungstechnik. Sie liefert eine bequeme, parallel zu den im Kapitel 2 besprochenen Verfahren anwendbare Methode zur Lösung linearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Überdies bildet die Faltungseigenschaft der Laplace-Transformation die Grundlage besonders einfacher Regeln für das Kombinieren linearer Teilsysteme zu Gesamtsystemen. Diese Themen werden wir im nächsten Kapitel aufgreifen.

## 7.1 Einseitige Laplace-Transformation

Für die hier interessierenden Anwendungen eignet sich am Besten die einseitige Laplace-Transformation, d.h. die Transformation rechtsseitiger Signale. Wir werden deshalb im Folgenden für die bezogenen Zeitfunktionen in der Regel  $x(\tau)=0$  für  $\tau<0$  voraussetzen bzw. sie durch Multiplikation mit dem Heaviside-Sprung entsprechend beschneiden.

## Das Laplace-Transformationspaar

Ausgehend vom Fourier-Transformationspaar (3.5), (3.6) verallgemeinern wir die imaginäre, bezogene Frequenzvariable j $\nu$  zu einer komplexen Frequenzvariablen  $s=\sigma+\mathrm{j}\nu$  mit reellem, konstantem  $\sigma$ . Wegen d $s=\mathrm{j}\,\mathrm{d}\nu$  definieren wir damit direkt die Beziehungen für die einseitige Laplace-Transformation und ihre Umkehrung,

$$\mathcal{L}\left[x(\tau)\right] = X(s) = \int_{0_{-}}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau, \tag{7.1}$$

$$\mathcal{L}[x(\tau)] = X(s) = \int_{0_{-}}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = x(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{s\tau} ds,$$
(7.1)

vorausgesetzt, die Integrale existieren. Die größte untere Schranke (das Infimum) von  $\sigma = \text{Re}(s)$ , für die das Integral (7.1) noch konvergiert, heißt die Konvergenzabszisse von x. Die Schreibweise 0- der unteren Grenze soll andeuten, dass der Zeitnullpunkt noch in das Integrationsintervall einzubeziehen ist, etwaige Stöße von x bei  $\tau=0$  also mitgenommen werden. Das ist wichtig, weil wir damit beim Lösen von Differentialgleichungen die meist bei  $\tau=0-$  vorgeschriebenen Anfangsbedingungen direkt berücksichtigen können – eine der Stärken der Laplace-Transformation.

Die Größe s heißt Laplace-Variable oder (bezogene) komplexe Frequenzvariable. Wir schreiben statt  $X(s) = \mathcal{L}[x(\tau)]$  auch  $x(\tau) \circ - X(s)$  und sagen: X(s) ist die Laplace-Transformierte von  $x(\tau)$ . Oder: Der Funktion  $x(\tau)$  im Zeitbereich (Originalbereich, Oberbereich) korrespondiert die Funktion X(s) in der komplexen Frequenzebene (Bildbereich, Unterbereich).

Im Prinzip könnten wir den Übergang von der Fourier- zur Laplace-Transformation auch so durchführen, dass wir die Funktion  $x(\tau) \exp(-\sigma \tau) \varepsilon(\tau)$  an Stelle von  $x(\tau)$  Fourier-transformieren und anschließend  $\sigma$  und j $\nu$  zu  $s=\sigma+\mathrm{j}\nu$ zusammenfassen. Die hinreichende Bedingung (3.27) für die Existenz einer beschränkten Fourier-Transformierten wird damit zu

$$\int_{0}^{\infty} |x(\tau)| e^{-\sigma \tau} d\tau < M_x < \infty, \tag{7.3}$$

einer hinreichenden Bedingung für die Existenz einer beschränkten Laplace-Transformierten. Abgesehen von der Einschränkung auf rechtsseitige Funktionen ist damit die Klasse der zugelassenen Signale so erweitert, dass sie praktisch alle interessierenden Verläufe umfasst. Da $\sigma$ grundsätzlich frei gewählt werden kann, erfüllt selbst eine so stark wachsende Funktion wie  $x(\tau) = \exp(a\tau)\varepsilon(\tau)$ mit reellem a>0 die Bedingung (7.3), sofern<br/>1  $\sigma>a$ . Damit existiert z.B. die Laplace-Transformierte der Stoßantwort eines instabilen LTI-Systems, nicht aber deren Fourier-Transformierte. Es gibt aber auch Funktionen, die keine Laplace-Transformierte besitzen<sup>2</sup>, z.B.  $\exp(\tau^2)$ .

In Tab.7.1 sind die Laplace-Korrespondenzen einiger häufig vorkommender Funktionen zusammengestellt. Umfangreichere Listen finden Sie in fast jedem mathematischen Handbuch.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Die Konvergenzabszisse ist in diesem Fall gleich a.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>D.h. es gibt keine endliche Konvergenzabszisse.

	$x(\tau) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$	$X(s) = \mathcal{L}[x(\tau)]$
1	$\delta( au)$	1
2	$\varepsilon( au)$	$\frac{1}{s}$
3	$\varepsilon(\tau-\tau_0)$ , $\tau_0\geq 0$	$\frac{e^{-\tau_0 s}}{s}$
4	$ au \varepsilon( au)$	$\frac{1}{s^2}$
5	$\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\varepsilon(\tau) \ , \ n\in N$	$\frac{1}{s^n}$
6	$e^{-a\tau}\varepsilon(\tau)$	$\frac{1}{s+a}$
7	$\tau e^{-a\tau} \varepsilon(\tau)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a\tau} \varepsilon(\tau) , n \in N$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$\cos(\nu_1  au) arepsilon( au)$	$\frac{s}{s^2 + \nu_1^2}$
10	$\sin( u_1  au) arepsilon( au)$	$\frac{\nu_1}{s^2 + \nu_1^2}$
11	$e^{-a\tau}\cos(\nu_1\tau)\varepsilon(\tau)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\nu_1^2}$
12	$e^{-a au}\sin( u_1 au)arepsilon( au)$	$\frac{\nu_1}{(s+a)^2+\nu_1^2}$
13	$e^{-\vartheta\nu_0\tau} \frac{\sin(\sqrt{1-\vartheta^2}\nu_0\tau)}{\sqrt{1-\vartheta^2}\nu_0} \varepsilon(\tau) ,  0 \le \vartheta < 1$	$\frac{1}{s^2 + 2\vartheta\nu_0 s + \nu_0^2}$

 ${\bf Tab.7.1} \quad {\bf Korrespondenzen} \ {\bf der} \ {\bf einseitigen} \ {\bf Laplace-Transformation} \ (7.1) \ {\bf für} \ {\bf häufig} \ {\bf vorkommende} \ {\bf Funktionen}.$ 

## Hin- und Rücktransformation

Das Berechnen der Laplace-Transformierten einer gegebenen Zeitfunktion ist meist nicht schwierig. Beispielsweise lässt sich die Zeile 9 in Tab.7.1 leicht nachvollziehen:

$$\begin{split} \mathcal{L} \left[ \cos(\nu_1 \tau) \varepsilon(\tau) \right] &= \int_0^\infty \cos(\nu_1 \tau) \, \mathrm{e}^{-s \tau} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[ \mathrm{e}^{-(s+\mathrm{j}\nu_1)\tau} + \mathrm{e}^{-(s-\mathrm{j}\nu_1)\tau} \right] \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s+\mathrm{j}\nu_1} + \frac{1}{s-\mathrm{j}\nu_1} \right] = \frac{s}{s^2 + \nu_1^2} \,, \quad \mathrm{Re}(s) > 0. \end{split}$$

Beachten Sie gegenüber der Zeile 10 in Tab.3.1 ( $s\mapsto \mathrm{j}\nu$ ) das Fehlen der  $\delta$ -Funktion.

Natürlich können Sie auch die Laplace-Tabellen in Verbindung mit den im Abschnitt 7.3 zu besprechenden Eigenschaften – im Besonderen der Linearität – verwenden. Für die Zeitfunktion

$$x(\tau) = \left[5\tau e^{-2\tau} + 7e^{-3\tau}\cos(4\tau)\right]\varepsilon(\tau)$$

folgt z.B. aus den Zeilen 7 und 11 der Tab.7.1 ohne jede Rechnung

$$X(s) = \frac{5}{(s+2)^2} + \frac{7(s+3)}{(s+3)^2 + 16} \ .$$

Etwas umständlicher gestaltet sich in der Regel die Rücktransformation, also der Übergang von der komplexen Frequenzebene in den Zeitbereich. Eine Bildfunktion z.B. der Form

$$X(s) = \frac{5(s-2)}{s^2 + 4s + 3}$$

ist zuerst im Nenner zu faktorisieren und dann einer Partialbruchzerlegung zu unterwerfen,

$$X(s) = \frac{5(s-2)}{(s+1)(s+3)} = \frac{-15/2}{s+1} + \frac{25/2}{s+3} .$$

Anschließend liefert Zeile 6 der Tab.7.1 die zugehörige Zeitfunktion:

$$x(\tau) = \left(-\frac{15}{2}e^{-\tau} + \frac{25}{2}e^{-3\tau}\right)\varepsilon(\tau).$$

Manchmal ist es zweckmäßig oder notwendig, die Rücktransformation durch Auswertung des Integrals (7.2) vorzunehmen. Dabei erweist sich die Anwendung von Methoden der Funktionentheorie, insbesondere der Residuenrechnung, als vorteilhaft.

## 7.2 Partialbruchzerlegungen

Bei der Anwendung der Laplace-Transformation zum Lösen linearer System-Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten haben wir für übliche Eingangsfunktionen fast immer rationale Funktionen von s rückzutransformieren. Wir brauchen dazu eine gewisse Fertigkeit in der Technik der Partialbruchzerlegungen.

Nehmen wir also an, im Bildbereich liegt die rationale Funktion

$$R(s) = \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$
(7.4)

vor. Ist der Grad m des Zählerpolynoms Z(s) größer oder gleich dem Grad n des Nennerpolynoms N(s), so lässt sich ein Polynom vom Grad m-n durch Division abspalten. Dessen Rücktransformation wird im Abschnitt 7.3 unter der Ziffer 5 behandelt. Im Folgenden können wir deshalb m < n, d.h. echt gebrochene rationale Funktionen R(s) voraussetzen und außerdem annehmen, dass Z(s) und N(s) teilerfremd sind. Gesucht ist dann die einfach rückzutransformierende Darstellung von R(s) als<sup>3</sup>

$$R(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i}{s - p_i} = \frac{r_1}{s - p_1} + \dots + \frac{r_i}{s - p_i} + \dots + \frac{r_n}{s - p_n}$$
(7.5)

oder eine ähnliche Form – eben die Partialbruchzerlegung. Die Konstanten  $r_i$ , i = 1, 2, ..., n, heißen die zu den Wurzeln  $p_i$  gehörenden Residuen. Sie lassen sich grundsätzlich durch Koeffizientenvergleich und dem daraus resultierenden Gleichungssystem, oder mit den folgenden, abkürzenden Verfahren bestimmen.

#### Einfache Wurzeln

Ist  $p_i$  eine einfache Wurzel des Nennerpolynoms (ein einfacher Pol von R(s)), so finden wir das zugehörige, i.A. komplexe Residuum  $r_i$  aus

$$r_i = (s - p_i)R(s)|_{s=p_i} = \lim_{s \to p_i} [(s - p_i)R(s)]$$
 (7.6)

$$= \frac{Z(p_i)}{N'(p_i)} = b_m \frac{\prod\limits_{k=1}^{m} (p_i - q_k)}{\prod\limits_{l=1, l \neq i}^{n} (p_i - p_l)},$$
(7.7)

wobei N'(s) = dN(s)/ds, und  $q_k$  die Wurzeln des Zählerpolynoms bezeichnen. Für konjugiert komplexe Paare  $p_i$  und  $p_{i+1}$  sind auch die Residuen  $r_i$  und  $r_{i+1}$  konjugiert komplex, falls die Polynomkoeffizienten reell sind.

Ein Beispiel:

$$R(s) = \frac{s^3 + 5s - 1}{s(s+1)(s^2 + 4s + 13)} = \frac{s^3 + 5s - 1}{s(s+1)(s+2-j3)(s+2+j3)}$$
$$= \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+1} + \frac{r_3}{s+2-j3} + \frac{r_4}{s+2+j3}$$
(7.8)

mit

$$\begin{array}{lclcrcl} r_1 & = & sR(s)|_{s=0} = -1/13 & = & -0,0769; \\ r_2 & = & (s+1)R(s)|_{s=-1} = 7/10 & = & 0,7; \\ r_3 & = & (s+2-\mathrm{j}3)R(s)|_{s=-2+\mathrm{j}3} & = & 0,1885+\mathrm{j}0,5910; \\ r_4 & = & r_3^* & = & 0,1885-\mathrm{j}0,5910. \end{array}$$

 $<sup>^3</sup>$ Die Entwicklung (7.5) ist in dieser Form möglich, wenn alle n Pole  $p_i$  unterschiedlich sind.

## Einfache, konjugiert komplexe Wurzeln

Wenn bei Polynomen mit reellen Koeffizienten einfache Wurzeln konjugiert komplex auftreten, lohnt sich häufig eine Zusammenfassung. Angenommen, das Nennerpolynom N(s) besitzt k reelle Einfachwurzeln  $p_1,\ldots,p_k$  und l Paare konjugiert komplexer Einfachwurzeln  $\sigma_1\pm \mathrm{j}\nu_1,\ldots,\sigma_l\pm \mathrm{j}\nu_l$ , wobei k+2l=n. Gesucht ist die Partialbruchzerlegung

$$R(s) = \frac{Z(s)}{(s - p_1) \cdots (s - p_k)(s - \sigma_1 - j\nu_1)(s - \sigma_1 + j\nu_1) \cdots (s - \sigma_l - j\nu_l)(s - \sigma_l + j\nu_l)}$$

$$= \frac{Z(s)}{(s - p_1) \cdots (s - p_k)[(s - \sigma_1)^2 + \nu_1^2] \cdots [(s - \sigma_l)^2 + \nu_l^2]}$$

$$= \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{s - p_i} + \sum_{i=1}^l \frac{a_i s + b_i}{(s - \sigma_i)^2 + \nu_i^2}, \qquad (7.9)$$

die einer Rücktransformation über die Zeilen 6, 11 und 12 in Tab.7.1 zugänglich ist.

Wir bestimmen zuerst die Residuen  $r_i$  mit Hilfe der Beziehung (7.6). Um anschließend die 2l unbekannten Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  zu berechnen, wird ein System von 2l linearen Gleichungen durch Einsetzen von 2l passend gewählten Werten für s in Gl.(7.9) aufgestellt und gelöst. Meist ist es günstig, nacheinander  $s = \sigma_i$  mit  $i = 1, \ldots, l$  zu setzen, falls  $R(\sigma_i)$  existiert. Für unterschiedliche  $\sigma_i$  ergeben sich damit l Gleichungen. Die restlichen l Gleichungen folgen aus der Annahme von l weiteren, beliebigen s-Werten.

Als Beispiel nehmen wir R(s) aus Gl.(7.8):

$$R(s) = \frac{s^3 + 5s - 1}{s(s+1)(s+2-j3)(s+2+j3)} = \frac{s^3 + 5s - 1}{s(s+1)[(s+2)^2 + 9]}$$
$$= \frac{r_1}{s} + \frac{r_2}{s+1} + \frac{as+b}{(s+2)^2 + 9} . \tag{7.10}$$

Die Residuen  $r_1$  und  $r_2$  sind mit  $r_1 = -1/13$  und  $r_2 = 7/10$  bereits berechnet. Wir setzen nun in Gl.(7.10) s = -2,

$$R(-2) = -\frac{19}{18} = \frac{-1/13}{-2} + \frac{7/10}{-1} + \frac{-2a+b}{9}$$

und erhalten daraus die erste Gleichung

$$-2a+b=-3,5462$$
.

Für die zweite Gleichung haben wir noch einen s-Wert anzunehmen. s=0 ist häufig günstig, in unserem Beispiel aber nicht möglich. Wir setzen s=1,

$$R(1) = \frac{5}{36} = -\frac{1}{13} + \frac{7}{20} + \frac{a+b}{18} .$$

Daraus folgt die zweite Gleichung

$$a+b=-2,4154$$
,

zusammen mit der ersten Gleichung also

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,5462 \\ -2,4154 \end{bmatrix}$$

mit der Lösung a=0,3769 und b=-2,7923. Die gesuchte Partialbruchzerlegung ist daher

$$R(s) = -\frac{0,0769}{s} + \frac{0,7}{s+1} + \frac{0,3769 \, s - 2,7923}{(s+2)^2 + 9} \ .$$

#### Mehrfache Wurzeln

Bei mehrfachen Wurzeln des Nennerpolynoms, also mehrfachen Polen von R(s), gestaltet sich das Verfahren grundsätzlich ähnlich, wenn auch etwas komplizierter. Angenommen, R(s) besitze die Form

$$R(s) = \frac{Z(s)}{(s - p_1)^k (s - p_{k+1}) \cdots (s - p_n)}, \qquad (7.11)$$

d.h. die Wurzel  $p_1$  besitzt die Vielfachheit k, und die restlichen Wurzeln sind einfach. Wir haben dann die Koeffizienten  $r_i$  der verallgemeinerten Partialbruchzerlegung

$$R(s) = \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{(s - p_1)^2} + \dots + \frac{r_k}{(s - p_1)^k} + \sum_{i = k+1}^n \frac{r_i}{s - p_i}$$
(7.12)

zu bestimmen. Die Residuen  $r_{k+1},\dots,r_n$  der einfachen Wurzeln lassen sich wie gewöhnlich über Gl.(7.6) berechnen. Ähnlich erhalten wir  $r_k$  aus der Beziehung

$$r_k = [(s - p_1)^k R(s)]_{s=p_1}$$
 (7.13)

Die restlichen Koeffizienten folgen durch Differentiation:

$$r_{k-1} = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[ (s - p_1)^k R(s) \right]_{s=p_1} ,$$

$$r_{k-2} = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[ (s - p_1)^k R(s) \right]_{s=p_1} ,$$

$$\vdots$$

$$r_1 = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[ (s - p_1)^k R(s) \right]_{s=p_1} .$$
(7.14)

Zu der rationalen Funktion

$$R(s) = \frac{1}{(s+1)^3(s+3)}$$

gehört beispielsweise die Partialbruchzerlegung

$$R(s) = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{(s+1)^2} + \frac{r_3}{(s+1)^3} + \frac{r_4}{s+3}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{array}{rclrcl} r_4 & = & \left[ (s+3)R(s) \right]_{s=-3} & = & -1/8 \; , \\ r_3 & = & \left[ (s+1)^3R(s) \right]_{s=-1} & = & 1/2 \; , \\ r_2 & = & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \left[ (s+1)^3R(s) \right]_{s=-1} & = & -1/4 \; , \\ r_1 & = & \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} \left[ (s+1)^3R(s) \right]_{s=-1} & = & 1/8 \; . \end{array}$$

Das Ergebnis einer komplizierteren Partialbruchzerlegung sollten Sie jedenfalls überprüfen, z.B. durch Einsetzen konkreter s-Werte.

## 7.3 Grundlegende Eigenschaften

Die elementaren Eigenschaften der Laplace-Transformation sind analog denen der Fourier-Transformation und lassen sich auf ähnliche Weise zeigen. Auch hier erweist sich die Anwendung des Korrespondenzsymbols

$$x(\tau) \circ X(s)$$
 bedeutet  $X(s) = \mathcal{L}[x(\tau)]$  und  $x(\tau) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$  (7.15)

als bequem. Die Zeitfunktionen sind immer als rechtsseitige, in jedem endlichen Intervall bis auf  $\delta$ -Anteile stückweise stetige (bzw. stückweise glatte) Funktionen aufzufassen.

#### 1. Linearität

Die Laplace-Transformation ist eine lineare Abbildung. Sind  $c_1$  und  $c_2$  irgend zwei Zahlen, so folgt aus  $x_1(\tau) \circ - X_1(s)$  und  $x_2(\tau) \circ - X_2(s)$  die Beziehung

$$x(\tau) = c_1 x_1(\tau) + c_2 x_2(\tau) \circ - X(s) = c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s),$$
 (7.16)

sofern  $x(\tau) \circ X(s)$ .

#### 2. Zeitdehnung

Wenn  $x(\tau) \circ -\bullet X(s)$  ein Laplace-Paar bildet, dann ist mit einer reellen, positiven Konstanten a auch

$$x(a\tau) \circ - \bullet \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0,$$
 (7.17)

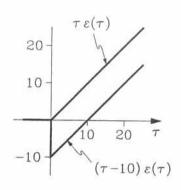
ein Laplace-Paar.

## 3. Zeitverschiebung

Für alle reellen, nicht negativen  $\tau_0$  folgt aus  $x(\tau) \circ -\bullet X(s)$  die Korrespondenz

$$x(\tau - \tau_0)\varepsilon(\tau - \tau_0) \circ \bullet e^{-s\tau_0}X(s), \quad \tau_0 \geqslant 0.$$
(7.18)

Die linke Seite ist explizit mit dem Heaviside-Sprung multipliziert, um zu unterstreichen, dass die nach rechts verschobene, rechtsseitige Funktion nun bezüglich



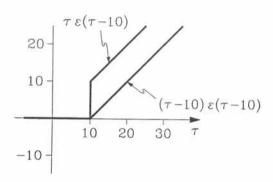


Abb. 7.1 Unterschiedliche Kombinationen der Funktion  $x(\tau) = \tau$  und des Heaviside-Sprungs  $\varepsilon(\tau)$  bei Zeitverschiebung um  $\tau_0 = 10$ . Die rechtsseitige Funktion  $\tau \varepsilon(\tau)$  geht bei korrekter Zeitverschiebung über in  $(\tau - \tau_0)\varepsilon(\tau - \tau_0)$ .

 $au= au_0$  rechtsseitig ist. Für eine allgemeine, nicht notwendig rechtsseitige Funktion x( au) besitzen nämlich  $x( au- au_0)\varepsilon( au)$  und  $x( au- au_0)\varepsilon( au- au_0)$  i.A. unterschiedliche Laplace-Transformierte. Abb.7.1 soll dies für x( au)= au und  $au_0=10$  verdeutlichen.

Der Zeitverschiebungssatz wird u.a. für die Bestimmung der Laplace-Transformierten rechtsseitig periodischer Funktionen oder abschnittsweise angegebener Funktionen verwendet. So lässt sich z.B. der abschnittsweise angegebene Trapezverlauf aus Abb.7.2,

$$\begin{array}{lll} u(\tau) = 0 & \text{für} & \tau < 0 \; , \\ u(\tau) = 0, 1 \, \tau & \text{für} & 0 \leqslant \tau < 10 \; , \\ u(\tau) = 1 & \text{für} & 10 \leqslant \tau < 30 \; , \\ u(\tau) = 4 - 0, 1 \, \tau & \text{für} & 30 \leqslant \tau < 40 \; , \\ u(\tau) = 0 & \text{für} & \tau \geqslant 40 \; , \end{array}$$

geschlossen durch

$$u(\tau) = 0, 1 \, \tau \varepsilon(\tau) - 0, 1 \, (\tau - 10) \varepsilon(\tau - 10)$$
$$- 0, 1 \, (\tau - 30) \varepsilon(\tau - 30) + 0, 1 \, (\tau - 40) \varepsilon(\tau - 40) \tag{7.19}$$

darstellen. Der Zeitverschiebungssatz liefert dann zusammen mit  $\tau \varepsilon(\tau) \circ -s^{-2}$  (Tab.7.1, Zeile 4) den Ausdruck

$$U(s) = \frac{0.1}{s^2} \left( 1 - e^{-10s} - e^{-30s} + e^{-40s} \right)$$

für die zugehörige Laplace-Transformierte.

## 4. Frequenzverschiebung

Das Gegenstück zum Zeitverschiebungssatz ist die Verschiebung der Laplace-Variablen: Aus  $x(\tau) \circ -\bullet X(s)$  folgt für eine beliebige komplexe Konstante  $s_0$ 

$$X(s-s_0) \bullet - \circ e^{s_0 \tau} x(\tau). \tag{7.20}$$

Mehrere Anwendungen davon sehen Sie in Tab.7.1, z.B. den Übergang von Zeile 5 zu Zeile 8 oder von Zeile 9 zu Zeile 11.

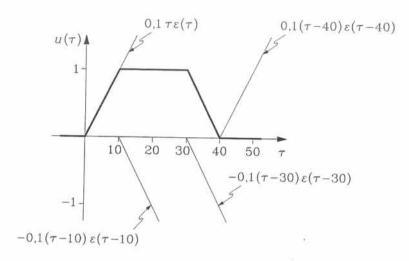


Abb. 7.2 Darstellung Gl.(7.19) des Trapezverlaufes aus Abb. 1.11 durch zeitverschobene Funktionen des Typs  $k\tau\varepsilon(\tau)$ . Diese Methode ist allgemein anwendbar zur geschlossenen Angabe stückweise angegebener Verläufe.

#### 5. Zeitdifferentiation

Die einseitige Laplace-Transformation der Zeitableitung  $x'(\tau) = dx(\tau)/d\tau$  nicht notwendig rechtsseitiger Signale liefert ein bemerkenswertes Ergebnis. Durch partielle Integration erhalten wir

$$\mathcal{L}\left[x'(\tau)\right] = \int_{0_{-}}^{\infty} x'(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$= \left[x(\tau) e^{-s\tau}\right]_{0_{-}}^{\infty} + s \int_{0_{-}}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$= -x(0-) + s\mathcal{L}\left[x(\tau)\right],$$

d.h. aus  $x(\tau) \longrightarrow X(s)$  folgt

$$x'(\tau) \circ -\bullet sX(s) - x(0-). \tag{7.21}$$

Die Laplace-Transformierte der Ableitung von x enthält explizit den Randwert von x bei 0-. Dies ist, wie Sie im nächsten Kapitel sehen werden, wichtig für die Anwendung der Laplace-Transformation zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Für höhere Zeitableitungen ergibt sich durch mehrmaliges Anwenden der gleichen Prozedur

$$x^{(k)}(\tau) \circ - s^k X(s) - s^{k-1} x(0-) - s^{k-2} x^{(1)}(0-) - \dots - x^{(k-1)}(0-).$$
 (7.22)

Bei der Laplace-Transformation der k-ten Ableitung sind also auch die Randwerte der Ableitungen bis zur Ordnung k-1 zu berücksichtigen.

Tab.7.1 enthält mehrere Anwendungen der Ableitungsregel. Im Speziellen

gilt

$$\begin{array}{cccc}
\varepsilon(\tau) & \circ \longrightarrow & 1/s ,\\
\delta(\tau) = \varepsilon'(\tau) & \circ \longrightarrow & 1 ,\\
& \vdots & & \vdots & \\
\delta^{(k)}(\tau) = \varepsilon^{(k+1)}(\tau) & \circ \longrightarrow & s^k .
\end{array} (7.23)$$

Ein Polynom in s korrespondiert demnach einer Linearkombination von Ableitungen des Dirac-Stoßes:

$$c_k s^k + c_{k-1} s^{k-1} + \dots + c_0 \bullet c_k \delta^{(k)}(\tau) + c_{k-1} \delta^{(k-1)}(\tau) + \dots + c_0 \delta(\tau).$$
 (7.24)

Diesen Zusammenhang brauchen wir z.B. dann, wenn bei der Rücktransformation rationaler Funktionen der Art (7.4) mit  $m \ge n$  vor der Partialbruchzerlegung ein Polynom vom Grad m-n durch Division additiv abzuspalten ist.

## 6. Zeitintegration

Für die Herleitung der Integrationsregel wird wieder partiell integriert:

$$\mathcal{L}\left[\int_{0_{-}}^{\tau} x(\tau') d\tau'\right] = \int_{0_{-}}^{\infty} \left[\int_{0_{-}}^{\tau} x(\tau') d\tau'\right] e^{-s\tau} d\tau$$
$$= -\left[\int_{0_{-}}^{\tau} x(\tau') d\tau'\right] \frac{e^{-s\tau}}{s} \Big|_{0_{-}}^{\infty} + \frac{1}{s} \int_{0_{-}}^{\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Der erste Term der zweiten Zeile verschwindet an beiden Grenzen, so dass

$$\int_{0_{-}}^{\tau} x(\tau') d\tau' \circ - \bullet \frac{1}{s} X(s).$$
 (7.25)

Gesetzt den Fall,  $x(\tau)$  ist nicht notwendig rechtsseitig. Das von  $-\infty$  bis  $\tau\geqslant 0$  erstreckte Integral

$$\int_{-\infty}^{\tau} x(\tau') d\tau' = \int_{-\infty}^{0} x(\tau') d\tau' + \int_{0}^{\tau} x(\tau') d\tau'$$

können wir aber, wenn es existiert, der rechtsseitigen Laplace-Transformation unterwerfen und erhalten, weil das erste Integral rechts lediglich eine Konstante darstellt,

$$\int_{-\infty}^{\tau} x(\tau') d\tau' \circ - \bullet \frac{1}{s} X(s) + \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0} x(\tau') d\tau',$$

mit X(s) berechnet über Gl.(7.1).

#### 7. Differentiation der Laplace-Transformierten

Differentiation der Gl.(7.1) liefert die Korrespondenz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s) \bullet - \sigma - \tau x(\tau) \tag{7.26}$$

oder, etwas allgemeiner,

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k} X(s) \bullet - \circ (-\tau)^k x(\tau). \tag{7.27}$$

Auch für diese Regel finden Sie in Tab.7.1 Anwendungen, z.B. den Übergang von Zeile 2 zu den Zeilen 4 oder 5.

## 7.4 Spezielle Sätze

Die Schlüsseleigenschaft der Laplace-Transformation, die ihre weite Verbreitung bei der Behandlung linearer Systeme begründet, wird im Faltungssatz formuliert. Der Endwertsatz und der Anfangswertsatz ermöglichen Aussagen über Grenzwerte der Zeitfunktion direkt aus der Transformierten, ohne die Rücktransformation tatsächlich ausführen zu müssen.

## Faltungssatz

Ausgangspunkt für die Formulierung des Faltungssatzes ist die Definition (3.65) des Faltungsprodukts zweier Signale und dessen wichtigste Eigenschaften, zusammengefasst in den Gln.(3.66) bis (3.69). Wegen der Beschränkung auf rechtsseitige Funktionen (kausale Signale) reduziert sich die Integration allerdings auf die abgeschlossene positive Zeitachse<sup>4</sup>,

$$x_1(\tau) * x_2(\tau) = \int_{0_{-}}^{\infty} x_1(\tau') x_2(\tau - \tau') d\tau'.$$
 (7.28)

Die Laplace-Transformierte des Faltungsprodukts berechnen wir unter Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen und Anwendung des Zeitverschiebungssatzes (7.18),

$$\begin{split} \mathcal{L}\left[x_{1}(\tau)*x_{2}(\tau)\right] &= \int_{0_{-}}^{\infty} \left[\int_{0_{-}}^{\infty} x_{1}(\tau')x_{2}(\tau-\tau')\mathrm{d}\tau'\right] \,\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{0_{-}}^{\infty} x_{1}(\tau') \left[\int_{0_{-}}^{\infty} x_{2}(\tau-\tau') \,\mathrm{e}^{-s\tau}\mathrm{d}\tau\right] \mathrm{d}\tau' \\ &= \int_{0_{-}}^{\infty} x_{1}(\tau')\mathcal{L}\left[x_{2}(\tau-\tau')\right] \mathrm{d}\tau' = \int_{0_{-}}^{\infty} x_{1}(\tau') \,\mathrm{e}^{-s\tau'}\mathcal{L}\left[x_{2}(\tau)\right] \mathrm{d}\tau' \\ &= \mathcal{L}\left[x_{1}(\tau)\right] \mathcal{L}\left[x_{2}(\tau)\right], \end{split}$$

erhalten mit  $x_1(\tau) \circ - X_1(s)$  und  $x_2(\tau) \circ - X_2(s)$  also

$$x_1(\tau) * x_2(\tau) \circ X_1(s) X_2(s).$$
 (7.29)

Das Faltungsprodukt zweier Zeitfunktionen korrespondiert dem gewöhnlichen Produkt ihrer Laplace-Transformierten.

## Endwertsatz

Ist X(s) die Laplace-Transformierte von  $x(\tau)$ , so bedeutet die Regel (7.21) für die Differentiation im Zeitbereich

$$sX(s) = x(0-) + \int_{0-}^{\infty} x'(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$
 (7.30)

Wir eliminieren daraus x(0-) mit Hilfe von

$$\int_{0-}^{\infty} x'(\tau) d\tau = x(\infty) - x(0-)$$

 $<sup>^4</sup>$ Tatsächlich ist für kausale Signale auch die obere Integrationsgrenze endlich, nämlich gleich

und erhalten dann die Beziehung

$$sX(s) = x(\infty) + \int_{0_{-}}^{\infty} x'(\tau) (e^{-s\tau} - 1) d\tau,$$
 (7.31)

vorausgesetzt,  $x(\infty)$  existiert. Die Bildung des Grenzwerts  $s\to 0$  liefert schließlich die als Endwertsatz bekannte Aussage

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} [sX(s)]. \tag{7.32}$$

Der Endwert einer Zeitfunktion lässt sich also direkt aus der Laplace-Transformierten berechnen. Aber *Vorsicht*: Wir mussten ausdrücklich voraussetzen, dass es diesen Grenzwert auch wirklich gibt. Es ist *nicht* zulässig, aus der Existenz des Grenzwerts auf der rechten Seite von Gl.(7.32) auf die Existenz von  $x(\infty)$  zu schließen. Typische Beispiele für das Versagen des Endwertsatzes liefern die Zeilen 9 und 10 in Tab.7.1, aber auch die Zeile 6 mit reellem a < 0.

## Anfangswertsatz

Anstelle von Gl.(7.30) können wir auch schreiben

$$sX(s) = x(0+) + \int_{0+}^{\infty} x'(\tau) e^{-s\tau} d\tau,$$

falls x(0+) existiert.  $x(\tau)$  kann bei  $\tau=0$  zwar einen endlichen Sprung aufweisen, darf dort aber keine Unstetigkeit vom Typ eines Dirac-Stoßes besitzen. Lassen wir nun s entlang der reellen Achse gegen Unendlich wandern, so verschwindet das Integral und es gilt der Anfangswertsatz

$$x(0+) = \lim_{s \to \infty} [sX(s)].$$
 (7.33)

Aus der Laplace-Transformierten können Sie demnach auch ohne Rücktransformation den Anfangswert der Zeitfunktion bestimmen. Beachten Sie: Gl.(7.33) liefert den rechtsseitigen Grenzwert.

## 7.5 Zusammenfassung

Die Laplace-Transformation ist eine natürliche Erweiterung der Fourier-Transformation, grob gesprochen, deren Fortsetzung von der imaginären Achse in die komplexe Ebene. Dies bietet einige Vorteile hinsichtlich der Konvergenz und der Erschließung funktionentheoretischer Methoden, bringt aber meist die Einschränkung auf rechtsseitige (kausale) Signale mit sich.

Für die Laplace-Transformation und ihre Umkehrung steht grundsätzlich wieder ein Paar von Integralen zur Verfügung, praktisch wird jedoch in der Regel mit Tabellen gearbeitet. Die Rücktransformation der häufig vorkommenden rationalen Funktionen setzt eine gewisse Vertrautheit mit der Technik der Partialbruchzerlegungen voraus.

Das Arbeiten mit Laplace-Tabellen erfordert in jedem Fall die Kenntnis einiger grundlegender Eigenschaften. Hier zeigt sich die enge Verwandtschaft

mit der Fourier-Transformation, es treten aber auch charakteristische Unterschiede auf. Beispielsweise enthält die Laplace-Transformierte der Zeitableitung eines Signals auch dessen Anfangswert – eine Eigenschaft, die sich bei der Behandlung von Anfangswertproblemen vorteilhaft nutzen lässt.

Besonders wichtig für die Anwendungen in der linearen Systemtheorie ist der Faltungssatz, der auch hier in der vertrauten Form erscheint: Das Faltungsproduckt im Zeitbereich wird zum gewöhnlichen Produkt im (komplexen) Frequenzbereich. Der Anfangswertsatz und der Endwertsatz liefern Grenzwerte für die Zeitfunktionen unter Umgehung der Rücktransformation. Sie sind allerdings nur mit Vorsicht zu benutzen, weil sie manchmal – auch in praktisch wichtigen Fällen – versagen.

## Kapitel 8

# LTI-Systeme und Laplace-Transformation

Den im Kapitel 2 entwickelten Verfahren zur Behandlung linearer, zeitinvarianter Systeme werden wir nun eine Methode zur Seite stellen, die ebenfalls die explizite Bestimmung der Systemantwort auf ein Eingangssignal und einen Anfangszustand zum Ziel hat, die aber in mancher Beziehung einfacher und direkter anzuwenden ist als das traditionelle Lösungsverfahren.

## 8.1 Anfangswertprobleme

Die Regel (7.22) zur Laplace-Transformation der Zeitableitung von Signalen liefert die Grundlage einer wirksamen Lösungsmethode für lineare gewöhnliche Differentialgleichungen des Typs (2.1) mit konstanten Koeffizienten und vorgeschriebenen Anfangswerten: Beide Seiten werden zuerst der Laplace-Transformation unterworfen. Es folgen algebraische Manipulationen, und dann wird die Lösung durch Rücktransformation gewonnen.

## Lösen der System-Differentialgleichung

Wir beginnen mit einem konkreten Beispiel, um die wesentlichen Züge des Lösungsverfahrens deutlich zu machen. Für ein System, das durch die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 3y = 5u' + 10u (8.1)$$

beschrieben wird, soll zu der Eingangsfunktion

$$u(\tau) = 3\tau \text{ für } \tau > 0 \text{ und } u(0-) = 1$$
 (8.2)

die Ausgangsfunktion  $y(\tau)$  für  $\tau > 0$  unter den Anfangsbedingungen

$$y(0-) = 4$$
 und  $y'(0-) = 0$  (8.3)

bestimmt werden. Wir wenden die Laplace-Transformation zunächst allgemein auf beide Seiten der Differentialgleichung an, benutzen dabei die Bezeichnungen

$$s^{2}Y(s) - sy(0-) - y'(0-) + 4[sY(s) - y(0-)] + 3Y(s) = 5[sU(s) - u(0-)] + 10U(s),$$

und lösen dann nach Y(s) auf:

$$Y(s) = \frac{sy(0-) + y'(0-) + 4y(0-) - 5u(0-)}{s^2 + 4s + 3} + \frac{5s + 10}{s^2 + 4s + 3}U(s). \tag{8.4}$$

Im letzten Term erscheint als Multiplikator von U(s) genau die  $\ddot{U}bertragungs-funktion$ 

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{5s+10}{s^2+4s+3}$$
(8.5)

unseres Systems, wobei  $P(s) = s^2 + 4s + 3$  das charakteristische Polynom bezeichnet. Gl.(8.4) kann deshalb auch in der Form

$$Y(s) = \frac{sy(0-) + y'(0-) + 4y(0-) - 5u(0-)}{P(s)} + G(s)U(s)$$
 (8.6)

geschrieben werden.

Die Anfangswerte der Funktionen y und u legen den Anfangszustand fest. Wären sie alle gleich Null, so würde sich Y(s) auf

$$Y_{0Z}(s) = G(s)U(s)$$
(8.7)

reduzieren. Ein Vergleich mit der Faltungsdarstellung (1.61) der Nullzustandsantwort,

$$y_{0Z}(\tau) = \int_{0}^{\infty} g(\tau - \tau') u(\tau') d\tau' = g(\tau) * u(\tau),$$
 (8.8)

zeigt einerseits zusammen mit der Faltungseigenschaft (7.29):  $Y_{0Z}(s) = G(s)U(s)$  ist die Laplace-Transformierte der Nullzustandsantwort, und es gilt

$$g(\tau) \circ - G(s), \tag{8.9}$$

Ein Blick auf die Faltungsdarstellung (1.63) der vollständigen Systemantwort lässt uns andererseits den ersten Summanden rechts in Gl.(8.6) als die Laplace-Transformierte der Nulleingangsantwort  $y_{0\rm E}(\tau)$  identifizieren,

$$Y_{0E}(s) = \frac{sy(0-) + y'(0-) + 4y(0-) - 5u(0-)}{P(s)}.$$
 (8.10)

Sie sehen: Die Laplace-Transformation liefert auf natürliche Weise die additive Aufspaltung der vollständigen Antwort eines Systems in die Nulleingangsantwort und die Nullzustandsantwort.

Um unser Anfangswertproblem tatsächlich zu lösen, setzen wir  $U(s) = \mathcal{L}[3\tau] = 3/s^2$  zusammen mit den Anfangswerten aus (8.2) und (8.3) in Gl.(8.4) ein,

$$Y(s) = \frac{4s+11}{s^2+4s+3} + \frac{3(5s+10)}{s^2(s^2+4s+3)}.$$
 (8.11)

Nun ist rückzutransformieren. Getrennt für die beiden Summanden folgen über die Partialbruchzerlegungen

$$\begin{split} Y_{0\text{E}}(s) &= \frac{7/2}{s+1} + \frac{1/2}{s+3} \ , \\ Y_{0\text{Z}}(s) &= \frac{-25/3}{s} + \frac{10}{s^2} + \frac{15/2}{s+1} + \frac{5/6}{s+3} \end{split}$$

die Funktionen

$$y_{0E}(\tau) = \frac{7}{2}e^{-\tau} + \frac{1}{2}e^{-3\tau}, \quad \tau > 0,$$
 (8.12)

$$y_{0Z}(\tau) = -\frac{25}{3} + 10\tau + \frac{15}{2}e^{-\tau} + \frac{5}{6}e^{-3\tau}, \quad \tau > 0,$$
 (8.13)

zusammen also die vollständige Lösung

$$y(\tau) = 11 e^{-\tau} + \frac{4}{3} e^{-3\tau} - \frac{25}{3} + 10\tau, \quad \tau > 0.$$
 (8.14)

Die im Kapitel 2 beschriebene, klassische Methode<sup>1</sup> führt auf

$$y_h(\tau) = 11 e^{-\tau} + \frac{4}{3} e^{-3\tau}, \quad y_p(\tau) = -\frac{25}{3} + 10\tau, \quad \tau > 0.$$

Die Gesamtlösung ist natürlich für beide Methoden die selbe, die additive Aufspaltung aber eine andere. Im Allgemeinen enthält nämlich die Nullzustandsantwort im Gegensatz zur Partikulärlösung auch natürliche Transienten, die sich durch Anlegen des Eingangssignals an das ursprünglich im Nullzustand befindliche System einstellen. Ist das System stabil, so gehen  $y_{0\rm Z}$  und  $y_{\rm p}$  mit dem Abklingen dieser Transienten ineinander über, während  $y_{0\rm E}$  wie  $y_{\rm h}$  verschwindet.

## Verschobener Anfangszeitpunkt

Die Methode der Laplace-Transformation lässt sich auf jedes System, das durch eine Differentialgleichung des Typs (2.1) beschrieben wird, und für jede Laplace-transformierbare Eingangsfunktion anwenden. Die Lösungsschritte erfolgen immer so, wie in unserem Beispiel skizziert. Bevor wir die damit verknüpfte Betrachtungsweise weiter ausbauen, möchte ich noch kurz auf die Frage der Behandlung von Anfangsbedingungen für  $\tau_0 \neq 0$  eingehen.

Grundsätzlich könnten wir dabei den Zeitverschiebungssatz der Laplace-Transformation benutzen. Es ist aber in der Regel einfacher, von vornherein gleich eine Zeitverschiebung durch Verwendung der Zeitvariablen  $\lambda = \tau - \tau_0$  an Stelle von  $\tau$  durchzuführen. Am Schluss kann wieder auf  $\tau$  übergegangen werden.

Betrachten wir dazu als Beispiel das System

$$y' + 2y = 3u$$
,  $y(1) = 4$ ,

 $<sup>^1\</sup>mathrm{An}$  Stelle der Durchführung der Partialbruchzerlegung ist dabei ein lineares Gleichungssystem zu lösen.

mit der Eingangsfunktion<sup>2</sup>

$$u(\tau) = \left[1 + 5e^{-(\tau - 1)}\right] \varepsilon(\tau - 1).$$

Nach der Variablentransformation  $\tau \mapsto \lambda = \tau - 1$  arbeiten wir mit den Funktionen  $z(\lambda) = y(\lambda + 1)$  und  $v(\lambda) = u(\lambda + 1)$ , haben also ein Anfangswertproblem

$$z' + 2z = 3v$$
,  $z(0) = 4$ ,  $v(\lambda) = (1 + 5e^{-\lambda}) \varepsilon(\lambda)$ 

in der üblichen Form vorliegen. Die Laplace-Transformation liefert

$$Z(s) = \frac{z(0)}{s+2} + \frac{3}{s+2}V(s)$$
$$= \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s(s+2)} + \frac{15}{(s+2)(s+1)}$$

und, nach Partialbruchzerlegung,

$$Z(s) = \frac{4}{s+2} + \frac{3/2}{s} - \frac{3/2}{s+2} - \frac{15}{s+2} + \frac{15}{s+1}$$
$$= -\frac{25/2}{s+2} + \frac{15}{s+1} + \frac{3/2}{s}$$

mit der Laplace-Inversen

$$z(\lambda) = -\frac{25}{2}e^{-2\lambda} + 15e^{-\lambda} + \frac{3}{2}, \quad \lambda > 0.$$

Rückkehr zur ursprünglichen Zeitvariablen führt schließlich auf die gesuchte Lösung

$$y(\tau) = -\frac{25}{2}e^{-2(\tau-1)} + 15e^{-(\tau-1)} + \frac{3}{2}$$
  
= -92, 36 e^{-2\tau} + 40, 77 e^{-\tau} + 1, 5; \tau > 1.

Prüfen Sie die Erfüllung der Differentialgleichung und die Einhaltung der Randbedingung!

## 8.2 Die Sprungantwort

In den beiden ersten Kapiteln haben wir die Sprungantwort (Übergangsfunktion) als ein wichtiges Hilfsmittel zur anschaulichen Charakterisierung des dynamischen Verhaltens von LTI-Systemen kennen gelernt. Die Laplace-Transformation vermittelt hier weitere Einsichten.

### Berechnen der Residuen

Wir wollen für ein System mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{5000(s+1,01)(s+0,1)}{(s+1)(s+10)(s+2+j5)(s+2-j5)}$$
(8.15)

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Da die Eingangsfunktion keinen Stoß enthält und die Übertragungsfunktion eine echt gebrochene rationale Funktion ist (m < n), besitzt das System keinen direkten Durchgriff und  $y(\tau)$  verläuft stetig. Wir brauchen daher nicht zwischen y(1-) und y(1+) zu unterscheiden.

den Kern des dynamischen Verhaltens erkunden. Die Sprungantwort  $h(\tau)$  ist bekanntlich die Nullzustandsantwort des Systems auf den Heaviside-Sprung  $\varepsilon(\tau)$ , d.h. wir haben, ausgehend von Gl.(8.7) mit U(s) = 1/s, wegen

$$h(\tau) = g(\tau) * \varepsilon(\tau) \circ - H(s) = \frac{G(s)}{s}$$
(8.16)

den Ausdruck

$$H(s) = \frac{5000 (s + 1,01) (s + 0,1)}{(s + 1) (s + 10) (s + 2 + j5) (s + 2 - j5) s}$$

$$= \frac{r_1}{s + 1} + \frac{r_2}{s + 10} + \frac{r_3}{s + 2 + j5} + \frac{r_4}{s + 2 - j5} + \frac{r_5}{s}$$
(8.17)

rückzutransformieren:

$$h(\tau) = \left[ r_1 e^{-\tau} + r_2 e^{-10\tau} + r_3 e^{-(2+j5)\tau} + r_4 e^{-(2-j5)\tau} + r_5 \right] \varepsilon(\tau).$$
 (8.18)

Die Residuen  $r_1$  bis  $r_5$  lassen sich z.B. über Gl.(7.7) berechnen,

$$r_{i} = 5000 \frac{\prod_{k=1}^{2} (p_{i} - q_{k})}{\prod_{l=1, l \neq i}^{5} (p_{i} - p_{l})}, \quad i = 1, \dots, 5,$$
(8.19)

wobei die Pole und Nullstellen der rationalen Funktion H(s) mit

$$p_1 = -1$$
;  $p_2 = -10$ ;  $p_3 = -(2 + j5)$ ;  $p_4 = -(2 - j5)$ ;  $p_5 = 0$ ;  $q_1 = -1, 01$ ;  $q_2 = -0, 1$ 

bekannt sind. Wir erhalten

$$r_1 = 0,19231;$$
  $r_2 = 55,556;$   $r_3 = -28,745 + j44,077;$   $r_4 = -28,745 - j44,077;$   $r_5 = 1,7414.$  (8.20)

Die Zählerfaktoren in Gl.(8.19) sind die gerichteten Abstände des Pols  $p_i$  von den Nullstellen. Die Nennerfaktoren sind die gerichteten Abstände des Pols  $p_i$  von den anderen Polen. Sie können diese Faktoren auch graphisch bestimmen und den Winkel des gesuchten Residuums durch Subtraktion der Nennerwinkel von den Zählerwinkeln ermitteln.

## Dominierende Pole und Nullstellen

Die Berechnung der Residuen liefert einen wertvollen Einblick in das allgemeine Zeitverhalten des Systems für den betrachteten Eingang. Nehmen wir z.B. den Pol $p_2=-10$ : Verglichen mit den anderen Polen bewirkt er einen zeitlich sehr rasch veränderlichen Term, der schnell wieder verschwindet. Das zugehörige Residuum  $r_2$  ist aber relativ groß, was zeigt, dass dieser Pol einen merkbaren Einfluss auf das dynamische Verhalten besitzt. Sie sehen das am besten durch

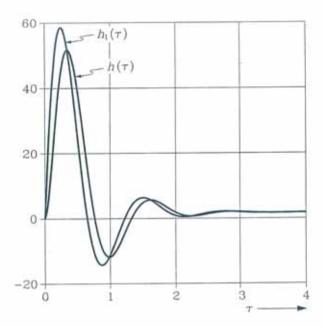


Abb. 8.1 Vergleich der zu den Übertragungsfunktionen G(s) (Gl.(8.15)) und  $G_1(s)$  (Gl.(8.21)) gehörenden Sprungantworten  $h(\tau)$  bzw.  $h_1(\tau)$ .

den Vergleich der Sprungantworten des Systems (8.15) und eines entsprechenden Systems<sup>3</sup>

$$G_1(s) = \frac{500(s+1,01)(s+0,1)}{(s+1)(s+2+j5)(s+2-j5)},$$
(8.21)

das diesen Pol nicht enthält (Abb.8.1).

Der Pol  $p_1=-1$  gehört zu einem vergleichsweise langsam abklingenden Term und würde deshalb normalerweise die Sprungantwort dominieren. Allerdings liegt in unserem Beispiel knapp neben dem Pol  $p_1$  die Nullstelle  $q_1$ , der Abstandsfaktor  $p_1-q_1=0,01$  ist deshalb klein, und dies führt auf den relativ kleinen Wert  $r_1=0,19231$  des zugehörigen Residuums. Eine benachbarte Nullstelle hebt also die Wirkung eines Pols weitgehend auf. Den geringen Einfluss dieser Pol-Nullstellen-Kombination zeigt der Vergleich mit dem System<sup>4</sup>

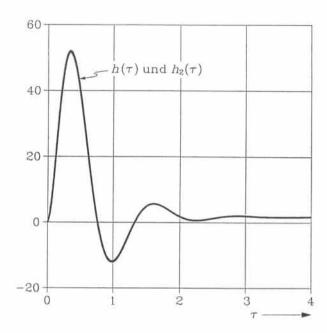
$$G_2(s) = \frac{5050 (s + 0, 1)}{(s + 10) (s + 2 + j5) (s + 2 - j5)},$$
(8.22)

bei dem gegenüber Gl.(8.15) diese Kombination fehlt (Abb.8.2). Wie Sie sehen, stellt das durch Gl.(8.22) beschriebene System dritter Ordnung eine sehr gute Näherung des ursprünglichen Systems vierter Ordnung dar.

Eine weniger gute, aber immer noch zumindest qualitativ brauchbare Nä-

<sup>4</sup>Die Verstärkung wird wieder so angepasst, dass sich gleiche Endwerte der Sprungantworten einstellen.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Gegenüber Gl.(8.15) wird die Verstärkung von 5000 auf 500 zurückgenommen, damit beide Sprungantworten den gleichen Endwert r<sub>5</sub> = 1,7414 annehmen.



**Abb. 8.2** Vergleich der zu den Übertragungsfunktionen G(s) (Gl.(8.15)) und  $G_2(s)$  (Gl.(8.22)) gehörenden Sprungantworten  $h(\tau)$  bzw.  $h_2(\tau)$ . Sie stimmen nahezu vollständig überein.

herung durch ein System zweiter Ordnung wird durch die Übertragungsfunktion

$$G_3(s) = \frac{505(s+0,1)}{(s+2+j5)(s+2-j5)}$$
(8.23)

repräsentiert. Gegenüber Gl.(8.15) wurden der "schnelle" Pol  $p_2 = -10$  und die Pol-Nullstellen-Kombination  $p_1 = -1$ ,  $q_1 = -1$ , 01 entfernt. Wie sich das auswirkt, sehen Sie in Abb.8.3.

Es sind also die relativ nahe bei der imaginären Achse liegenden und daher "schwach gedämpften" konjugiert komplexen Pole  $p_{3,4}=-2\mp \mathrm{j}5$  und die ebenfalls nahe an der imaginären Achse liegende Nullstelle  $q_2=-0,1$ , die das dynamische Verhalten unseres Systems bestimmen. Dass tatsächlich das Zusammenwirken beider, der Nullstelle und des komplexen Polpaars, wesentlich sind, zeigt Abb.8.4.

Hier ist die Sprungantwort des ursprünglichen Systems mit den Sprungantworten der Systeme

$$G_4(s) = \frac{172,42(s+1,01)(s+0,1)}{(s+1)(s+10)}$$
(8.24)

und

$$G_5(s) = \frac{500(s+1,01)}{(s+1)(s+10)(s+2+j5)(s+2-j5)}$$
(8.25)

verglichen, wobei gegenüber dem ursprünglichen System in  $G_4(s)$  das konjugiert komplexe Polpaar und in  $G_5(s)$  die Nullstelle  $q_2$  entfernt wurde. Das dynamische Verhalten wird dadurch radikal geändert.

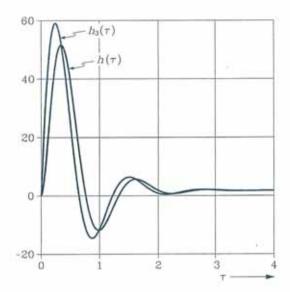


Abb. 8.3 Vergleich der zu den Übertragungsfunktionen G(s) (Gl.(8.15)) und  $G_3(s)$  (Gl.(8.23)) gehörenden Sprungantworten  $h(\tau)$  bzw.  $h_3(\tau)$ . Als Näherung wird der Verlauf von  $h(\tau)$  durch  $h_3(\tau)$  zumindest qualitativ richtig wiedergegeben.

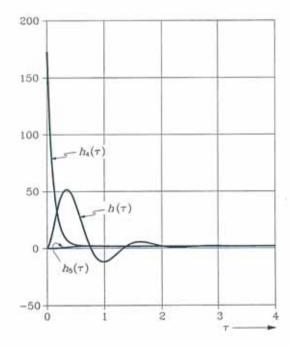


Abb. 8.4 Vergleich der zu den Übertragungsfunktionen G(s) (Gl.(8.15)),  $G_4(s)$  (Gl.(8.24)) und  $G_5(s)$  (Gl.(8.25)) gehörenden Sprungantworten  $h(\tau)$ ,  $h_4(\tau)$  bzw.  $h_5(\tau)$ . Die Pole  $p_3$  und  $p_4$  sowie die Nullstelle  $q_2$  des ursprünglichen Systems sind wesentlich für die richtige Darstellung des dynamischen Verhaltens.

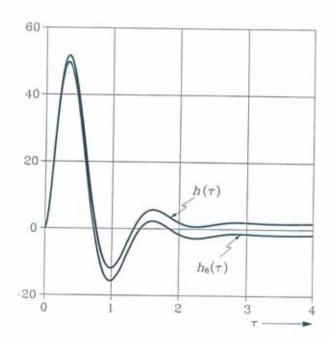


Abb. 8.5 Vergleich der zu den Übertragungsfunktionen G(s) (Gl.(8.15)) und  $G_6(s)$  (Gl.(8.26)) gehörenden Sprungantworten  $h(\tau)$  bzw.  $h_6(\tau)$ .  $h_6(\tau)$  repräsentiert ein Nicht-Minimalwinkelsystem.

## Nicht-Minimalwinkelsystem

Überlegen wir noch, was geschieht, wenn die Nullstelle  $q_2$  anstatt in der linken Halbebene in der rechten liegt, die Übertragungsfunktion also z.B. gegenüber Gl.(8.15) die Form

$$G_6(s) = \frac{5000 (s + 1,01) (s - 0,1)}{(s + 1) (s + 10) (s + 2 + j5) (s + 2 - j5)}$$
(8.26)

besitzt. Die Residuen für die Sprungantwort ergeben sich ähnlich denen unseres ursprünglichen Systems (s.Gl.(8.20)),

$$r_1 = 0,23504;$$
  $r_2 = 56,678;$   
 $r_3 = -27,586 + j45,668;$   $r_4 = -27,586 + j45,668;$  (8.27)  
 $r_5 = -1,7414.$ 

Lediglich die Vorzeichenänderung des Residuums  $r_5 = G_6(0)$ , das den stationären Endwert angibt, ist wesentlich. In Abb.8.5 sehen Sie den Unterschied. Sie erkennen das typische Verhalten eines Nicht-Minimalwinkelsystems: Die Anfangsreaktion erfolgt entgegengesetzt zu dem sich schließlich einstellenden Endwert.

## 8.3 Kombinieren von Teilsystemen

Einer der großen Vorteile, den die vorgestellten Transformationsverfahren bieten, betrifft das Zusammensetzen von Teilsystemen zu u.U. komplizierten Gesamt-

$$(b) \longrightarrow G_1(s) \longrightarrow G_2(s) \longrightarrow G_1(s)G_2(s) \longrightarrow G_2(s) \longrightarrow G_2(s)$$

Abb. 8.6 Reihenkombination zweier linearer, zeitinvarianter Systeme. Das Ersatzsystem wird im Zeitbereich durch das Faltungsprodukt der beiden Gewichtsfunktionen charakterisiert. Die Übertragungsfunktion des Ersatzsystems ist daher das gewöhnliche Produkt der Übertragungsfunktionen der beiden Teilsysteme.

systemen. Ausgehend von den Faltungseigenschaften werden wir dafür einfache Kombinationsregeln finden.

Wichtig ist folgende Voraussetzung: Wir nehmen an, dass die betrachteten Teilsysteme – zumindest näherungsweise – rückwirkungsfrei sind, d.h. das Eingangs-Ausgangs-Verhalten eines Teilsystems, im Speziellen seine Übertragungsfunktion, durch das Zusammenschalten mit anderen Systemen nicht geändert wird. Darauf müssen Sie insbesondere bei elektrischen Realisierungen durch Zweitore achten. Beispielsweise ist die in Abb.2.2b angegebene Schaltung nicht rückwirkungsfrei, weil die Ausgangsspannung von der Ausgangsbeschaltung abhängt. Wir mussten daher ausdrücklich  $i_{\rm A}=0$  fordern. Die Realisierung durch die Schaltung in Abb.2.2c ist dagegen rückwirkungsfrei. Falls nötig, sind die zu kombinierenden Teilsysteme durch geeignete Entkopplungsmaßnahmen – z.B. durch Einfügen von Trennverstärkern – rückwirkungsfrei zu machen.

#### Reihenkombination

Wir betrachten als Erstes die Reihenkombination zweier Systeme mit den Stoßantworten  $g_1(\tau)$  und  $g_2(\tau)$ : Der Ausgang des ersten Systems bildet den Eingang des zweiten. Da das Ausgangssignal eines LTI-Systems durch die Faltung des Eingangssignals mit der Stoßantwort entsteht<sup>5</sup>, erhalten wir die Stoßantwort  $g(\tau)$  der Reihenkombination als Faltungsprodukt der Einzel-Stoßantworten,  $g(\tau)$  $= g_1(\tau) * g_2(\tau)$ , dargestellt in Abb.8.6. Wegen der Kommutativität des Faltungsprodukts ist die Reihenfolge formal vertauschbar<sup>6</sup>.

Da nun die Laplace-Transformation der Stoßantwort die Übertragungsfunktion G(s) liefert und das Faltungsprodukt dem gewöhnlichen Produkt der Laplace-Transformierten korrespondiert, erhalten wir als Zusammensetzungsregel für die Übertragungsfunktionen bei Reihenkombination

$$G(s) = G_1(s)G_2(s).$$
 (8.28)

Die Erweiterung auf eine Reihenkombination mehrerer Systeme ist offensichtlich.

 $<sup>^5{\</sup>rm Wir}$  betrachten hier ausschließlich Nullzustandsantworten.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>In realen Systemen sind solche Vertauschungen natürlich nicht immer möglich, weil die einzelnen Signale physikalisch völlig unterschiedlich realisiert sein können.

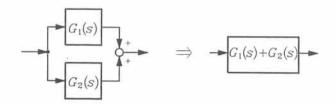


Abb. 8.7 Parallelkombination zweier linearer, zeitinvarianter Systeme. Die Übertragungsfunktion des Ersatzsystems ist die Summe der Übertragungsfunktionen der beiden Teilsysteme.

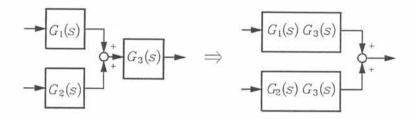


Abb. 8.8 Beispiel für die Kombination dreier linearer, zeitinvarianter Systeme. Die äquivalente Umformung entspricht einer Verlegung des Summationspunktes an den Systemausgang.

## Parallelkombination

Unter der Parallelkombination zweier Systeme verstehen wir die folgende Anordnung: An beiden Systemeingängen liegt das gleiche Signal, und die beiden Ausgangssignale werden additiv überlagert (Abb.8.7). Aus den Eigenschaften des Faltungsprodukts folgt für die Nullzustandsantworten

$$y = y_1 + y_2 = g_1 * u + g_2 * u = (g_1 + g_2) * u,$$

also für die Stoßantwort des Gesamtsystems  $g=g_1+g_2$ . Dem entspricht die Zusammensetzungsregel für die Übertragungsfunktionen bei Parallelkombination

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s).$$
(8.29)

Auch hier ist die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Systeme klar.

Die beiden Grundkombinationen können Sie nach den angegebenen Regeln beliebig erweitern. Abb.8.8 zeigt ein Beispiel dafür.

### System mit Rückführung

Eine wichtige Standardkombination der linearen Systemtheorie sehen Sie in Abb.8.9. Es handelt sich um ein System mit  $R\ddot{u}ckf\ddot{u}hrung$ : Das Ausgangssignal<sup>7</sup> Y(s) des Vorwärtszweigs  $G_1(s)$  wird über das System  $G_2(s)$  wieder an den Eingang zurückgeführt und dort mit dem Eingangssignal U(s) des Gesamtsystems verglichen. Die Differenz dieser beiden Signale, die Abweichung E(s), bildet das Eingangssignal des Vorwärtszweigs.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Wir arbeiten hier gleich mit den Laplace-Transformierten der Nullzustandsantworten.

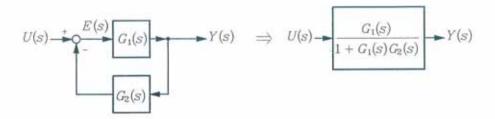


Abb. 8.9 Eine Standardkombination: Lineares, zeitinvariantes System mit Rückführung.

Aus dem Diagramm in Abb.8.9 lässt sich unmittelbar entnehmen:

$$E = U - G_2Y$$
,  $Y = G_1E = G_1U - G_1G_2Y$ .

Daraus folgt für die Übertragungsfunktion G = Y/U des Systems mit Rückführung

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}. \qquad (8.30)$$

Um den Einfluss der Rückführung deutlicher zu sehen, stellen wir die beiden Übertragungsfunktionen durch  $G_1=Q_1/P_1$  und  $G_2=Q_2/P_2$  als Quotienten der entsprechenden Nullstellenpolynome und charakteristischen Polynome dar. Einsetzen in Gl.(8.30) führt auf

$$G(s) = \frac{Q_1(s)P_2(s)}{P_1(s)P_2(s) + Q_1(s)Q_2(s)}.$$
 (8.31)

Die Nullstellen des Systems mit Rückführung werden demnach durch die Nullstellen des Vorwärtszweigs und durch die Pole der Rückführung gebildet,  $Q(s) = Q_1(s)P_2(s)$ . Die Pole des Systems mit Rückführung sind die Wurzeln des charakteristischen Polynoms

$$P(s) = P_1(s)P_2(s) + Q_1(s)Q_2(s).$$
 (8.32)

Eine Rückführung kann das Systemverhalten damit ganz wesentlich ändern.

Einen Sonderfall der Konfiguration aus Abb.8.9 sehen Sie in Abb.8.10. Der Vorwärtszweig besteht hier aus einer Reihenkombination von zwei Systemen mit den Übertragungsfunktionen  $G_{\rm R}(s)$  und  $G_{\rm S}(s)$ , und das Ausgangssignal wird ungeändert an den Eingang zurückgeführt. In regelungstechnischen Anwendungen stellt z.B.  $G_{\rm S}(s)$  einen dynamischen Prozess (eine Regelstrecke) dar. Das

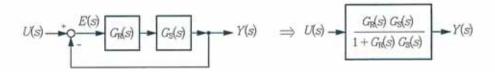


Abb. 8.10 Lineares, zeitinvariantes System mit direkter Rückführung. Vereinfachte Darstellung eines Regelkreises.

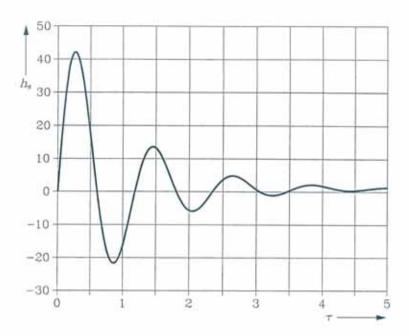


Abb. 8.11 Sprungantwort des Systems mit der Übertragungsfunktion Gl. (8.34). Das ungünstige dynamische Verhalten soll durch eine Regelung verbessert werden.

Ausgangssignal, die Regelgröße Y(s), soll dem Eingangssignal, der Zielgröße (Führungsgröße) U(s) auf vorgeschriebene Weise möglichst gut folgen. Durch Differenzbildung wird deshalb die Abweichung E(s) festgestellt und mit dieser ein Regler  $G_{\rm R}(s)$  aktiviert, der den Prozess im gewünschten Sinn beeinflusst. Das Schema gibt also – in stark vereinfachter Form – das Prinzip eines linearen, zeitinvarianten Regelkreises an. Für seine gesamte Übertragungsfunktion G = Y/U erhalten wir aus Gl.(8.30) mit  $G_1 = G_{\rm R}G_{\rm S}$  (Reihenkombination) und  $G_2 = 1$  (direkte Rückführung)

$$G(s) = \frac{G_R(s)G_S(s)}{1 + G_R(s)G_S(s)}.$$
 (8.33)

Dazu ein Beispiel: Angenommen, ein dynamischer Prozess besitze die Übertragungsfunktion

$$G_S(s) = \frac{290 (s + 0, 1)}{s^2 + 2s + 29}$$
 (8.34)

Die zugehörige Sprungantwort  $h_{\rm S}(\tau)$  in Abb.8.11 zeigt wegen der relativ nahe an der imaginären Achse liegenden Nullstelle ein ungünstiges Übergangsverhalten: Starkes Überschwingen und eine lange Einschwingdauer auf den Endwert  $h_{\rm S}(\infty) = G_{\rm S}(0) = 1$ . Wir binden den Prozess nun in einen Regelkreis nach dem Schema der Abb.8.10 ein und verwenden als Regler ein System erster Ordnung mit Nullstelle,

$$G_{\rm R}(s) = \frac{s+20}{20(s+0,1)}$$
 (8.35)

Die Art der zugehörigen Sprungantwort können Sie Abb.2.5 entnehmen.  $G_{\mathbb{R}}(s)$  wurde so gewählt, dass in der Reihenkombination mit  $G_{\mathbb{S}}$  die ungünstig liegende

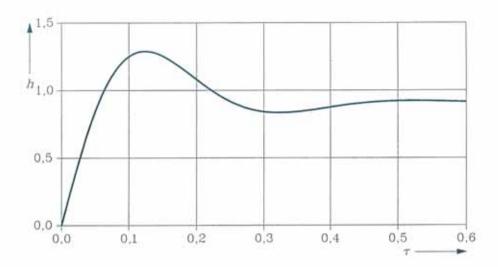


Abb. 8.12 Sprungantwort des Systems mit der Übertragungsfunktion Gl. (8.36). Das dynamische Verhalten wird durch die Regelung bedeutend verbessert. Beachten Sie die gegenüber Abb. 8.11 geänderten Maßstäbe!

Nullstelle kompensiert und durch eine weiter links liegende ersetzt wird. Über Gl.(8.33) erhalten wir die neue Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{14,5(s+20)}{s^2 + 16,5s + 319}$$
(8.36)

und die dazu gehörende Sprungantwort mit dem Endwert  $h(\infty) = G(0) = 0,909$  in Abb.8.12. Wie Sie sehen, ist die Verbesserung ganz erheblich: Der geregelte Prozess zeigt gegenüber dem ungeregelten nur mehr kleines Überschwingen, und der Endwert wird relativ rasch erreicht.

#### Wurzelortskurve

Im Anschluss an das eben behandelte Beispiel möchte ich noch kurz eine Betrachtung betreffend die Pol-Nullstellen-Struktur eines System mit direkter Rückführung anstellen: In der Übertragungsfunktion (8.35) des Reglers haben wir einen Vorfaktor 1/20 angenommen. Welchen Einfluss hat dieser Wert auf das dynamische Verhalten des Gesamtsystems? Zur Beantwortung dieser Frage ersetzen wir den Vorfaktor durch eine allgemeine, reelle Konstante K, im Folgenden kurz Verstärkung genannt, betrachten K als ein eigenes Teilsystem (idealer Verstärker) und fassen den Rest des Reglers und den Prozess zu einem zweiten Teilsystem mit der Übertragungsfunktion

$$G_1(s) = \frac{290 (s + 20)}{s^2 + 2s + 29}$$
(8.37)

zusammen (Abb.8.13). Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems lässt sich dann in der Form

$$G(s) = \frac{KG_1(s)}{1 + KG_1(s)}$$
(8.38)

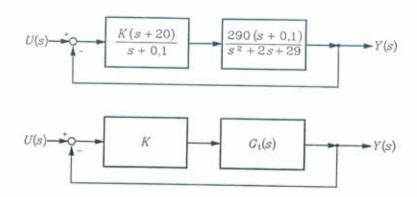


Abb. 8.13 Zur Untersuchung des Einflusses der "Reglerverstärkung"K wird ein idealer Verstärker als Teilsystem definiert und der Rest der Reihenschaltung zu einem zweiten Teilsystem mit der Übertragungsfunktion  $G_1(s)$  (Gl. (8.37)) zusammengefasst.

schreiben. Offensichtlich sind die Nullstellen von G(s) unabhängig von der Verstärkung K und gleich den Nullstellen von  $G_1(s)$ . Dies gilt allgemein für Systeme mit direkter Rückführung.

Um den Einfluss von K auf die Pole zu sehen, setzen wir Gl.(8.37) in (8.38) ein,

$$G(s) = \frac{290K(s+20)}{290K(s+20) + s^2 + 2s + 29} \ .$$

Bei beschränkten Werten von s wird mit wachsenden Werten von K der erste Term im Nenner dominierend, d.h. einer der beiden Pole wandert gegen die Nullstelle des Systems. Explizit erhalten wir die beiden Pole als

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{(145K)^2 - 38(145K) - 28 - (1 + 145K)},$$
 (8.39)

also  $p_{1,2}=-1\pm\mathrm{j}\sqrt{28}$  für K=0 und  $p_1\to-20,\ p_2\to-\infty$  für  $K\to\infty.$ 

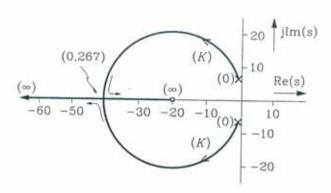


Abb. 8.14 Wurzelortskurven des Systems Gl. (8.38) mit  $G_1$  aus Gl. (8.37). Mit wachsenden Werten der Verstärkung K wandert der Pol  $p_1$ , von -1+j5, 29 für K=0 ausgehend, entlang des oberen Kreisbogens und der reellen Achse zur Nullstelle q=-20 des Systems. Der Pol  $p_2$  wandert, von -1-j5, 29 für K=0 ausgehend, entlang des unteren Kreisbogens und der reellen Achse gegen  $-\infty$ . Für 0< K<0, 267 sind die beiden Systempole konjugiert komplex, für K>0, 267 sind sie reell und negativ.

Darin zeigt sich ebenfalls eine allgemeine Eigenschaft von Systemen mit direkter Rückführung: Mit wachsender Verstärkung K wandern m der n Systempole zu den m festen Nullstellen. Die restlichen n-m Pole wandern entlang bestimmter Asymptoten in das Unendliche<sup>8</sup>. Eine graphische Darstellung der Wege, die die Pole einer Übertragungsfunktion (8.38) durchlaufen, während der Parameter K von Null nach Unendlich strebt, nennen wir die Wurzelortskurven des Systems. Abb.8.14zeigt die Wurzelortskurven für unser Beispiel.

Diese Überlegungen beleuchten nochmals die Bedeutung der Nullstellen eines Systems. Liegt im Speziellen eine Nullstelle in der rechten Halbebene (Nicht-Minimalwinkelsystem), so wird in einer Regelkreis-Konfiguration der betrachteten Art mit steigender Verstärkung auch ein Pol in die rechte Halbebene gezogen: Der Kreis verhält sich dann instabil.

## 8.4 Zusammenfassung

Die einseitige Laplace-Transformation erweist sich als ein nützliches Werkzeug für die Behandlung von LTI-Systemen. Wird die Suche nach der Systemantwort auf ein vorliegendes Eingangssignal und einen Anfangszustand als Anfangswertproblem formuliert, liefert das hier vorgestellte Verfahren die Lösung auf natürliche Weise als Summe der Nulleingangs- und der Nullzustandsantwort.

Als Nullzustandsreaktion auf einen sprungartigen Verlauf der Eingangsgröße eignet sich die **Sprungantwort** besonders gut zur anschaulichen Charakterisierung von LTI-Systemen. Wie sie aufgebaut ist, welche ihrer Komponenten im konkreten Fall wichtig und welche untergeordnet sind, lässt sich aus den bei der Laplace-Rücktransformation zu berechnenden **Residuen** erkennen. Wir können so zum Kern des dynamischen Verhaltens eines Systems vordringen und in manchen Fällen auch einfachere **Ersatzsysteme** finden, die sich im Wesentlichen gleich verhalten.

Das Zusammensetzen rückwirkungsfreier LTI-Systeme zu komplizierteren Strukturen erfolgt nach einfachen Kombinationsregeln, die ihren Ursprung in der Faltungseigenschaft der Laplace-Transformation haben. Neben den Reihenund Parallelkombinationen sind für die Anwendungen vor allem Systeme mit Rückführungen, insbesondere Regelkreisstrukturen, von Interesse.

 $<sup>^8\</sup>mathrm{F\ddot{u}r}\ m>n$  wandern auch Pole aus dem Unendlichen kommend zu Nullstellen.

## Kapitel 9

## Systeme im Zustandsraum

Bevor wir auf die Details der Zustandsraum-Darstellung von LTI-Systemen eingehen, werden wir kurz einen allgemeineren Standpunkt einnehmen. Angenommen, es ist ein dynamisches System ohne Totzeiten zu beschreiben, nicht notwendig linear oder zeitinvariant, aber mit p Eingangsgrößen und mit q Ausgangsgrößen, zusammengefasst in den  $p \times 1$ - bzw.  $q \times 1$ -Matrizen ("Spaltenvektoren")

$$\underline{u}(\tau) = \begin{bmatrix} u_1(\tau), & \cdots, & u_p(\tau) \end{bmatrix}^T, \tag{9.1}$$

$$\underline{y}(\tau) = \begin{bmatrix} y_1(\tau), & \cdots, & y_q(\tau) \end{bmatrix}^T. \tag{9.2}$$

Lässt sich der momentane Zustand des Systems durch n Zustandsgrößen

$$\underline{x}(\tau) = \begin{bmatrix} x_1(\tau), & \cdots, & x_n(\tau) \end{bmatrix}^T$$
 (9.3)

vollständig erfassen, so nennen wir

$$\underline{x}'(\tau) = f[\underline{x}(\tau), \underline{u}(\tau); \tau], \tag{9.4}$$

$$y(\tau) = h[x(\tau), u(\tau); \tau] \tag{9.5}$$

mit i.A. nichtlinearen Abbildungen  $\underline{f}$  und  $\underline{h}$  ein **Zustandsmodell** des Systems. Den Kern der Beschreibung des dynamischen Verhaltens bildet der Satz (9.4) von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen vorausgesetzt, können wir daraus zu einem Anfangszustand  $\underline{x}(\tau_0)$  und einem für  $\tau > \tau_0$  bekannten Eingang  $\underline{u}(\tau)$  den Zustand  $\underline{x}(\tau)$  zu jedem Zeitpunkt  $\tau > \tau_0$ , und über Gl.(9.5) dann auch den Ausgang  $\underline{y}(\tau)$  bestimmen.

Für  $\mathit{lineare}$  Systeme sind die Abbildungen  $\underline{f}$  und  $\underline{h}$  bezüglich  $\underline{x}$  und  $\underline{u}$  linear, also in der Form

$$\underline{x}'(\tau) = \underline{A}(\tau)\underline{x}(\tau) + \underline{B}(\tau)\underline{u}(\tau), \tag{9.6}$$

$$y(\tau) = \underline{C}(\tau)\underline{x}(\tau) + \underline{D}(\tau)\underline{u}(\tau) \tag{9.7}$$

mit geeigneten, i.A. zeitabhängigen Matrizen  $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$  darstellbar. Für *lineare*, zeitinvariante Systeme sind diese Matrizen schließlich zeitunabhängig, und wir

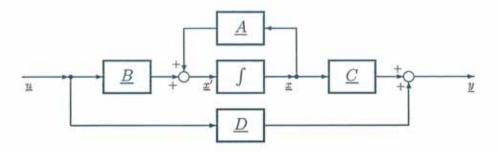


Abb. 9.1 Veranschaulichung der Zustandsgleichungen (9.8), (9.9) durch ein Struktur-Diagramm.  $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$  sind die in (9.10) benannten Zustandsmatrizen.

erhalten ein Zustandsmodell für MIMO-LTI-Systeme<sup>1</sup> ohne Totzeiten

$$\underline{\underline{x}}'(\tau) = \underline{\underline{A}}\underline{x}(\tau) + \underline{\underline{B}}\underline{u}(\tau)$$
(9.8)

$$\underline{y}(\tau) = \underline{C}\underline{x}(\tau) + \underline{D}\underline{u}(\tau)$$
(9.9)

wobei die vier Zustandsmatrizen die Namen und Formate

$$\underline{\underline{A}}$$
 Systemmatrix  $n \times n$ 
 $\underline{\underline{B}}$  Eingangsmatrix  $n \times p$ 
 $\underline{\underline{C}}$  Ausgangsmatrix  $q \times n$ 
 $\underline{\underline{D}}$  Durchgriffsmatrix  $q \times p$ 

$$(9.10)$$

besitzen. Eine Veranschaulichung der Zusammenhänge finden Sie in Abb.9.1.

In den folgenden Abschnitten werden Sie sehen, wie man Zustandsmodelle des Typs (9.8), (9.9) aufstellt, wie man allgemeine Lösungsdarstellungen findet und wie man solche Lösungen in einem geeigneten Vektorraum – dem Zustandsraum – zu interpretieren hat. Die dabei entwickelten Methoden bilden eine gute Grundlage für die rechnerunterstützte Behandlung dynamischer Systeme.

## 9.1 Aufstellen der Zustandsgleichungen

Die Angabe eines Zustandsmodells in der Form (9.8), (9.9) erfordert die Bestimmung der Matrizen (9.10). Allerdings ist – wie Sie gleich sehen werden – die Wahl der Zustandsgrößen nicht eindeutig.

#### Phasen-Variablen für SISO-Systeme

Angenommen, wir kennen von einem SISO-System n-ter Ordnung mit der Eingangsgröße u und der Ausgangsgröße y die System-Differentialgleichung in der Standardform (2.1) und die zugehörige Übertragungsfunktion (2.10),

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_mu^{(m)} + \dots + b_0u,$$
 (9.11)

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} , \qquad (9.12)$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>MIMO: Multiple Input - Multiple Output

und wir möchten ein Zustandsmodell für dieses System als

$$\underline{x}' = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,u,\tag{9.13}$$

$$y = \underline{C}\,\underline{x} + \underline{D}\,u \tag{9.14}$$

angeben. Wegen der SISO-Eigenschaft (p=q=1) reduziert sich die Eingangsmatrix  $\underline{B}$  auf eine  $n\times 1$ -Matrix, die Ausgangsmatrix  $\underline{C}$  auf eine  $1\times n$ -Matrix und die Durchgriffsmatrix auf eine  $1\times 1$ -Matrix, während die Systemmatrix  $\underline{A}$  für unser System n-ter Ordnung jedenfalls durch eine  $n\times n$ -Matrix dargestellt wird.

Eine einfache Möglichkeit des Übergangs auf ein Zustandsmodell finden wir in der Einführung von Phasen-Variablen. Ich möchte dies zunächst an einem Beispiel zeigen: Für das System dritter Ordnung

$$y''' + 4y'' + y' - 6y = u (9.15)$$

definieren wir die drei Zustandsvariablen speziell als die Phasen-Variablen

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y''$$
 (9.16)

und erhalten an Stelle von Gl.(9.15) den Gleichungssatz

$$x'_1 = x_2$$
,  
 $x'_2 = x_3$ ,  
 $x'_3 = 6x_1 - x_2 - 4x_3 + u$ 

und

$$y=x_1$$
.

Die zugehörige Matrix-Darstellung

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u , \qquad (9.17)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{9.18}$$

besitzt dann die gesuchten Formen (9.13), (9.14), wobei hier speziell  $\underline{D} = \underline{0}$  gilt². Das Vorgehen im allgemeinen Fall der Differentialgleichung (9.11) ist ganz ähnlich. Wir setzen der Reihe nach

$$x_1 = y$$
,  $x_2 = y^{(1)}$ ,  $x_3 = y^{(2)}$ , ...,  $x_n = y^{(n-1)}$ ,

erhalten für die  $n\times n$ -Systemmatrix  $\underline{A}$  und die  $n\times 1$ -Eingangsmatrix  $\underline{B}$ 

$$\underline{A} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
-a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}
\end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
(9.19)

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Unser Beispiel-System hat keinen direkten Durchgriff.

und für die  $1 \times n$ -Ausgangsmatrix  $\underline{C}$  und die  $1 \times 1$ -Durchgriffsmatrix  $\underline{D}$  im Fall m < n, also für eine echt gebrochene Übertragungsfunktion G(s),

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$
 (9.20)

Für ein System mit direktem Durchgriff, d.h. m = n, ergeben sich an Stelle von (9.20) die Matrizen

$$C = [b_0 - b_n a_0, b_1 - b_n a_1, \cdots, b_{n-1} - b_n a_{n-1}], \underline{D} = [b_n].$$
 (9.21)

Die Formen (9.20) sind darin als Spezialfälle mit  $b_n = 0$  enthalten.

Den Beweis dafür, dass die Gln.(9.13), (9.14) mit den Matrizen (9.19) und (9.21) tatsächlich unser System (9.11) beschreiben, führen wir am einfachsten für die Nullzustandsantworten im Laplace-Bereich: Ausgeschrieben bedeutet (9.13) mit (9.19)

$$x'_1 = x_2 , \quad x'_2 = x_3 , \quad \dots, \quad x'_{n-1} = x_n ,$$
  
 $x'_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n + u,$  (9.22)

nach Laplace-Transformation mit verschwindenden Anfangswerten also

$$X_2 = sX_1$$
,  $X_3 = sX_2 = s^2X_1$ ,  $X_n = sX_{n-1} = s^{n-1}X_1$ . (9.23)

Damit lassen sich in der Laplace-transformierten Gl.(9.22) alle  $X_k$  bis auf  $X_1$  eliminieren,

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0)X_1 = U.$$

In der Klammer links erscheint das charakteristische Polynom P(s). Somit gilt einerseits

$$P(s)X_1(s) = U(s).$$
 (9.24)

Andererseits bedeutet die Laplace-transformierte Ausgangsgleichung (9.14) mit den Matrizen (9.21)

$$Y = (b_0 - b_n a_0) X_1 + (b_1 - b_n a_1) X_2 + \dots + (b_{n-1} - b_n a_{n-1}) X_n + b_n U,$$

nach Elimination von  $X_2, \ldots, X_n$  mit Hilfe von (9.23) daher

$$Y = (b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0)X_1 - b_n(a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0)X_1 + b_nU.$$

Mit dem Nullstellenpolynom Q(s), dem charakteristischen Polynom P(s) und der Beziehung (9.24) folgt schließlich

$$Y = (Q - b_n s^n) \frac{U}{P} - b_n (P - s^n) \frac{U}{P} + b_n U = \frac{Q}{P} U,$$

was den Quotienten Y(s)/U(s) tatsächlich als die Übertragungsfunktion G(s) = Q(s)/P(s) unseres Systems (9.12) ausweist.

Halten wir fest: Ist von einem SISO-System die Differentialgleichung in der Standardform (9.11) oder die Übertragungsfunktion (9.12) bekannt, so lässt sich ein Zustandsmodell (9.13), (9.14) mit den Phasen-Variablen als Zustandsgrößen durch Aufstellen der Matrizen (9.19) bis (9.21) sofort angeben.

Als Beispiel schreiben wir für unser System dritter Ordnung aus Abb.1.1 mit der Differentialgleichung (2.4) und den Koeffizienten (2.5),

$$y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b_0 u, (9.25)$$

$$a_2 = 0, 4$$
;  $a_1 = 1,03$ ;  $a_0 = 0, 2$ ;  $b_0 = 0, 1$  (9.26)

die Zustandsmatrizen für die Phasen-Variablen als Zustandsgrößen an. Wir erhalten

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0, 2 & -1, 03 & -0, 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{9.27}$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0, 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \underline{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}. \tag{9.28}$$

Die Durchgriffsmatrix  $\underline{D}$  ist gleich der Nullmatrix, weil das System keinen direkten Durchgriff besitzt.

## Anfangsbedingungen

Um die Lösungen der Zustandsgleichungen (9.13) konkret anzugeben, benötigen wir neben der Eingangsfunktion  $u(\tau)$  die Werte der Zustandsgrößen  $\underline{x}$  für den Anfangszeitpunkt  $\tau_0$ .

Angenommen, Sie kennen die Eingangsfunktion  $u(\tau)$  und die Anfangswerte  $y(\tau_0), y^{(1)}(\tau_0), \ldots, y^{(n-1)}(\tau_0)$  der Ausgangsgröße. Die benötigten Anfangswerte  $x_1(\tau_0), \ldots, x_n(\tau_0)$  der Zustandsgrößen lassen sich dann in folgenden Schritten bestimmen.

- 1. Schreiben Sie die Ausgangsgleichung (9.14) explizit an.
- 2. Differenzieren Sie diese Gleichung nach  $\tau$  und ersetzen Sie dann  $\underline{x}'$  mit Hilfe der Systemgleichung (9.13) durch  $\underline{x}$  und  $\underline{u}$ .
- 3. Differenzieren Sie weiter bis zur Ordnung n-1 und drücken Sie in jedem Schritt  $y^{(k)}$  mit Hilfe von (9.13) durch  $\underline{x}$  und  $u, u^{(1)}, \ldots, u^{(k)}$  aus. Es ergeben sich insgesamt n Gleichungen.
- 4. Setzen Sie die bekannten Werte  $y(\tau_0), \ldots, y^{(n-1)}(\tau_0)$  konsistent für  $\tau_0^+$  oder  $\tau_0^-$  ein und lösen Sie dieses lineare Gleichungssystem nach den Unbekannten  $x_1(\tau_0), \ldots, x_n(\tau_0)$  auf.

Ob Sie sich für  $\tau_0^+$  oder  $\tau_0^-$  als Anfangszeitpunkt entscheiden, ist belanglos, wenn das Eingangssignal  $u(\tau)$  keinen Dirac-Stoß enthält. In diesem Fall verlaufen nämlich die Zustandsgrößen immer stetig, weil die Zustandsgleichung (9.13) keine Ableitungen von  $u(\tau)$  enthält.

## Physikalische Zustandsvariablen für SISO-Systeme

Wie schon mehrmals erwähnt, ist die Ordnung n eines Systems gleich der Anzahl der enthaltenen unabhängigen Energiespeicher. Wir können deshalb jedem unabhängigen Energiespeicher eine Zustandsgröße als (bezogenen) Wert jener physikalischen Variablen zuordnen, die zu jedem Zeitpunkt den Energieinhalt bestimmt. Bei Spulen sind dies die Momentanwerte der Verkettungsflüsse oder

der Ströme, bei Kondensatoren der elektrischen Ladungen oder der Spannungen. Diese Beobachtung liefert ein weiteres Verfahren zum Aufstellen der Zustandsgleichungen.

Als Beispiel kann wieder die Schaltung aus Abb.1.1 dienen: Wir haben n=3 unabhängige Energiespeicher, nämlich die beiden Spulen und den Kondensator, und deshalb in Originalvariablen die drei Zustandsgrößen  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  und  $u_C(t)$ . Ausgehend von den Elementegleichungen ergeben sich dann die drei Zustandsgleichungen

$$L_1 di_1/dt = -R_1 i_1 - u_C + u_E ,$$
  
 $L_2 di_2/dt = -(R_2 + R_3)i_2 + u_C ,$   
 $C du_C/dt = i_1 - i_2$  (9.29)

und die Ausgangsgleichung

$$u_{\rm A} = R_3 i_2.$$
 (9.30)

Um sie in der bezogenen Standardform zu schreiben, wählen wir eine einheitliche Bezugsspannung  $U_{\rm B}$ , einen einheitlichen Bezugsstrom  $I_{\rm B}=U_{\rm B}/(R_1+R_2+R_3)$  und eine Bezugsdauer  $T_{\rm B}$ , also

$$i_1 = I_{\rm B} \cdot x_1$$
,  $i_2 = I_{\rm B} \cdot x_2$  mit  $I_{\rm B} = U_{\rm B}/(R_1 + R_2 + R_3)$ ,  $u_{\rm C} = U_{\rm B} \cdot x_3$ ,  $u_{\rm E} = U_{\rm B} \cdot u$ ,  $u_{\rm A} = U_{\rm B} \cdot y$ ,  $t = T_{\rm B} \cdot \tau$ ,

und erhalten mit den in Abb.1.1 angegebenen Parameterwerten sowie der Bezugsdauer  $T_{\rm B}=1\,{\rm ms}$  die Zustandsgleichungen

$$x'_{1} = -0, 1x_{1} - 0, 4x_{3} + 0, 4u ,$$

$$x'_{2} = -0, 3x_{2} + 0, 4x_{3} ,$$

$$x'_{3} = 1, 25x_{1} - 1, 25x_{2}$$

$$(9.31)$$

und die Ausgangsgleichung

$$y = 0, 5x_2$$
 (9.32)

Dies ist die gesuchte Standardform (9.13), (9.14) mit den Matrizen

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 & -0,4 \\ 0 & -0,3 & 0,4 \\ 1,25 & -1,25 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
(9.33)

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} , \qquad \underline{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} . \qquad (9.34)$$

Abgesehen von der Nullmatrix  $\underline{D}$ , die ein System ohne direkten Durchgriff charakterisiert, sehen diese Matrizen ganz anders aus als (9.27) und (9.28). Dass trotzdem das gleiche System beschrieben wird, können Sie durch Elimination von  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  aus den Gln.(9.31) und (9.32) zeigen: Es ergibt sich wieder Gl.(9.25) mit den Koeffizienten (9.26).

Sie sehen: Die Wahl der Zustandsvariablen ist nicht eindeutig.

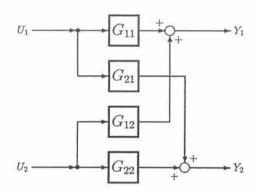


Abb. 9.2 Systeme mit mehreren Eingangs- und Ausgangsgrößen lassen sich als Kombinationen von Systemen mit jeweils nur einer Eingangs- und Ausgangsgröße auffassen.

### MIMO-Systeme

Das Aufstellen eines Zustandsmodells in Form der Gleichungen (9.8), (9.9) für Systeme mit mehreren Eingangs- und Ausgangsgrößen gestaltet sich im Prinzip ähnlich wie für Systeme mit nur einer Eingangs- und Ausgangsgröße, kann aber deutlich komplizierter sein. Insbesondere stoßen wir hier auf das Problem redundanter Zustandsgrößen, selbst dann, wenn die Übertragungsfunktionen bereits bekannt sind.

Ich werde dies an einem System mit zwei Eingangs- und zwei Ausgangsgrößen demonstrieren, dessen Beschreibung (für Nullzustandsantworten) im Laplace-Bereich vorliegt, d.h. in

$$Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s),$$
  

$$Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s)$$
(9.35)

oder in der Matrixform

$$Y(s) = G(s)U(s) (9.36)$$

mit

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$
,  $\underline{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ ,  $\underline{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$  (9.37)

seien die Teilübertragungsfunktionen  $G_{ij}(s)$  bekannt. Wir können das System dann, wie in Abb.9.2 dargestellt, als eine Kombination von SISO-Systemen auffassen und für jedes dieser Teilsysteme die Zustandsgrößen als Phasen-Variablen einführen. Die dazu benötigten Matrizen lassen sich, wie in den Ausdrücken (9.19) bis (9.21) angegeben, aus den Koeffizienten der Zähler- und Nennerpolynome der  $G_{ij}(s)$  gewinnen,

$$G_{11}: \quad \underline{x}_{1}' = \underline{A}_{1}\underline{x}_{1} + \underline{B}_{1}u_{1} , \quad y_{11} = \underline{C}_{1}\underline{x}_{1} + \underline{D}_{1}u_{1} ,$$

$$G_{12}: \quad \underline{x}_{2}' = \underline{A}_{2}\underline{x}_{2} + \underline{B}_{2}u_{2} , \quad y_{12} = \underline{C}_{2}\underline{x}_{2} + \underline{D}_{2}u_{2} ,$$

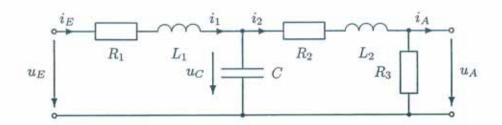
$$G_{21}: \quad \underline{x}_{3}' = \underline{A}_{3}\underline{x}_{3} + \underline{B}_{3}u_{1} , \quad y_{21} = \underline{C}_{3}\underline{x}_{3} + \underline{D}_{3}u_{1} ,$$

$$G_{22}: \quad \underline{x}_{4}' = \underline{A}_{4}\underline{x}_{4} + \underline{B}_{4}u_{2} , \quad y_{22} = \underline{C}_{4}\underline{x}_{4} + \underline{D}_{4}u_{2} ,$$

$$(9.38)$$

wobei

$$y_1 = y_{11} + y_{12} , \quad y_2 = y_{21} + y_{22}$$
 (9.39)



$$R_1 = R_2 = 20 \Omega$$
,  $R_3 = 40 \Omega$   
 $L_1 = L_2 = 0, 2 H$ ,  $C = 10 \mu F$ 

Abb. 9.3 Einfaches Beispiel für ein MIMO-System.  $u_{\rm E}$  und  $i_{\rm A}$  werden als Eingangsgrößen,  $i_{\rm E}$  und  $u_{\rm A}$  als Ausgangsgrößen aufgefasst. Abgesehen von der Wahl des Bezugssinns für  $i_{\rm A}$  entspricht dies im Frequenzbereich der Zweitor-Darstellung der Schaltung in der Parallel-Reihenform.

und jedes  $\underline{x}_i$  die erforderlichen Phasen-Variablen des entsprechenden Teilsystems enthält. Für das Gesamtsystem ist dies alles in der Matrixform

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_1' \\ \underline{x}_2' \\ \underline{x}_3' \\ \underline{x}_4' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_1 & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{A}_2 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}_3 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{A}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \\ \underline{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B}_1 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B}_2 \\ \underline{B}_3 & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{B}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} , \quad (9.40)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C}_1 & \underline{C}_2 & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{C}_3 & \underline{C}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \\ \underline{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{D}_1 & \underline{D}_2 \\ \underline{D}_3 & \underline{D}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
(9.41)

zusammenzufassen. Wie Sie sehen, gelangt man auf diese Weise rasch zu recht großen, in der Regel aber hoch redundanten Gleichungssystemen.

Ein Beispiel soll dies verdeutlichen: Wir betrachten die Schaltung aus Abb. 9.3. Es handelt sich wieder um die Schaltung aus Abb. 1.1, jedoch ohne die Beschränkung  $i_{\rm A}=0$ . Vielmehr sollen  $u_{\rm E}$  und  $i_{\rm A}$  als bekannte Eingangsgrößen und, als Reaktion darauf,  $i_{\rm E}$  und  $u_{\rm A}$  als Ausgangsgrößen aufgefasst werden. Abgesehen vom umgekehrten Vorzeichen von  $i_{\rm A}$  entspricht dies im Frequenzbereich der Zweitor-Darstellung der Schaltung in der Parallel-Reihenform (inverse Hybridform). Die Standard-Wechselstromanalyse mit anschließender Einführung bezogener Größen gemäß

$$u_{\rm E} = U_{\rm B} \cdot u_1$$
,  $i_{\rm E} = I_{\rm B} \cdot y_1$ ,  $I_{\rm B} = U_{\rm B}/(R_1 + R_2 + R_3)$ ,  
 $i_{\rm A} = I_{\rm B} \cdot u_2$ ,  $u_{\rm A} = U_{\rm B} \cdot y_2$ ,  $j_{\rm W} \longmapsto s/T_{\rm B}$  (9.42)

liefert mit den in Abb.9.3 angegebenen Parameterwerten, einer beliebigen Bezugsspannung  $U_{\rm B}$  und der Bezugsdauer  $T_{\rm B}=1\,{\rm ms}$  die Teilübertragungsfunktionen

$$G_{11}(s) = (0, 4s^2 + 0, 12s + 0, 2)/P(s),$$
  
 $G_{12}(s) = G_{21}(s) = 0, 1/P(s),$   
 $G_{22}(s) = (-0, 5s^3 - 0, 1s^2 - 0, 505s - 0, 05)/P(s),$ 

$$(9.43)$$

mit dem für alle  $G_{ij}$  gleichen Nennerpolynom

$$P(s) = s^3 + 0, 4s^2 + 1,03s + 0,2$$
.

Entsprechend Abb.9.2 handelt es sich um eine Kombination von vier Teilsystemen je dritter Ordnung, wobei  $G_{22}$  ein System mit direktem Durchgriff repräsentiert<sup>3</sup>. Wir erhalten damit zwölf (!) Phasen-Variablen als Zustandsgrößen. Die in den Zustandsgleichungen (9.40) aufgeführten Matrizen ergeben sich zu

$$\underline{A}_{i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0, 2 & -1, 03 & -0, 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{B}_{i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (9.44)$$

während sich die für die Ausgangsgleichungen (9.41) erforderlichen Matrizen zu

berechnen lassen. Allerdings ist dieses Gleichungssystem hoch redundant. Tatsächlich reichen für die Beschreibung des Systems drei Zustandsgrößen aus, wie die folgenden Überlegungen zeigen.

Wir setzen das System nun nicht aus Teilsystemen zusammen, sondern führen physikalische Zustandsvariablen ein, nämlich für jeden unabhängigen Energiespeicher die ihm entsprechende Zustandsgröße. Für die Schaltung in Abb.9.3 sind dies die beiden Spulenströme  $i_1, i_2$  und die Kondensatorspannung  $u_{\rm C}$ . In Originalvariablen erhalten wir dann die Zustandsgleichungen

$$L_1 di_1/dt = -R_1 i_1 - u_C + u_E ,$$
  

$$L_2 di_2/dt = -R_2 i_2 + u_C - R_3 (i_2 - i_A) ,$$
  

$$C du_C/dt = i_1 - i_2$$
(9.46)

und die Ausgangsgleichungen

$$i_{\rm E} = i_1 ,$$
  
 $u_{\rm A} = R_3(i_2 - i_{\rm A}).$  (9.47)

Die Normierung der Eingangs- und Ausgangsgrößen durch die Gln.(9.42) und der Zustandsgrößen und der Zeit entsprechend

$$i_1 = I_B \cdot x_1$$
,  $i_2 = I_B \cdot x_2$ ,  $u_C = U_B \cdot x_3$ ,  $t = T_B \cdot \tau$  (9.48)

führt mit den in Abb.9.3 angegebenen Parameterwerten, einer beliebigen Bezugsspannung  $U_{\rm B}$  und der Bezugsdauer  $T_{\rm B}=1\,{\rm ms}$  auf

$$x'_{1} = -0, 1x_{1} - 0, 4x_{3} + 0, 4u_{1},$$

$$x'_{2} = -0, 3x_{2} + 0, 4x_{3} + 0, 2u_{2},$$

$$x'_{3} = 1, 25x_{1} - 1, 25x_{2}$$

$$(9.49)$$

 $<sup>^3</sup>$ Eine sprungartige Änderung von  $i_{\rm A}$  bewirkt über den Widerstand  $R_3$  eine sprungartige Änderung von  $u_{\rm A}$ .

und

$$y_1 = x_1$$
,  
 $y_2 = 0,5x_2 - 0,5u_2$ ,

also auf die Standardform (9.8), (9.9) des Zustandsmodells für MIMO-LTI-Systeme

$$\underline{x}'(\tau) = \underline{A}\,\underline{x}(\tau) + \underline{B}\,\underline{u}(\tau),\tag{9.50}$$

$$y(\tau) = \underline{C}\underline{x}(\tau) + \underline{D}\underline{u}(\tau) \tag{9.51}$$

mit den Matrizen

$$\underline{x} = \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] \; , \qquad \underline{y} = \left[ \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \right] \; , \qquad \underline{u} = \left[ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right] \; ,$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix}
-0,1 & 0 & -0,4 \\
0 & -0,3 & 0,4 \\
1,25 & -1,25 & 0
\end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix}
0,4 & 0 \\
0 & 0,2 \\
0 & 0
\end{bmatrix}, \quad (9.52)$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0, 5 & 0 \end{bmatrix} , \qquad \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0, 5 \end{bmatrix} . \tag{9.53}$$

Offensichtlich ist dieses Modell übersichtlicher und wesentlich einfacher zu behandeln als das kombinierte System (9.40), (9.41).

## 9.2 Lösung der Zustandsgleichungen

Der vorangehende Abschnitt war dem Auffinden von Zustandsmodellen für LTI-Systeme gewidmet. Jetzt wollen wir uns mit der Lösung der resultierenden Zustandsgleichung befassen. Die Lösungsdarstellungen im Zustandsraum präsentieren sich dabei als Alternative zu dem im Kapitel 2 behandelten klassischen Lösungsverfahren bzw. zur Methode der Laplace-Transformation, mit der sich insbesondere MIMO-Systeme sehr gut beschreiben lassen.

#### Ein System erster Ordnung

Wir beginnen mit dem einfachsten Zustandsmodell eines SISO-Systems mit reellwertigen Eingangs- und Ausgangsgrößen  $u(\tau)$  bzw.  $y(\tau)$  und nur einer Zustandsgröße  $x(\tau)$ , beschrieben durch das Modell

$$x'(\tau) = ax(\tau) + bu(\tau), \tag{9.54}$$

$$y(\tau) = cx(\tau) + du(\tau) \tag{9.55}$$

mit reellen Konstanten a,b,c,d. Die dabei entwickelten Methoden lassen sich leicht auf Systeme mit n Zustandsgrößen und mehreren Ein- und Ausgängen erweitern.

Laplace-Transformation der Zustandsgleichung (9.54) liefert mit dem Anfangswert x(0-) der Zustandsgröße zunächst

$$X(s) = (s-a)^{-1}x(0-) + (s-a)^{-1}bU(s).$$
(9.56)

Der erste Term auf der rechten Seite ist der Nulleingangsteil der Zustandsgröße und führt nach der Rücktransformation auf

$$X_{0E}(s) = (s-a)^{-1}x(0-) \bullet - \circ x_{0E}(\tau) = e^{a\tau}x(0-), \quad \tau \geqslant 0.$$
 (9.57)

Den zweiten Term auf der rechten Seite von Gl.(9.56), den Nullzustandsteil der Zustandsgröße, können wir im Zeitbereich als Faltungsintegral darstellen,

$$X_{0Z}(s) = (s-a)^{-1}bU(s) - \alpha x_{0Z}(\tau) = [e^{a\tau}\varepsilon(\tau)] * [bu(\tau)], \qquad (9.58)$$

bei Beschränkung auf rechtsseitige Eingänge also

$$x_{0Z}(\tau) = \int_{0-}^{\tau} e^{a\tau'} bu(\tau - \tau') d\tau' = \int_{0-}^{\tau} e^{a(\tau - \tau')} bu(\tau') d\tau'.$$
 (9.59)

Der Verlauf der vollständigen Zustandsgröße für  $\tau \geqslant 0$  lässt sich demnach als

$$x(\tau) = x_{0E}(\tau) + x_{0Z}(\tau) = e^{a\tau}x(0-) + e^{a\tau} \int_{0-}^{\tau} e^{-a\tau'}bu(\tau')d\tau'$$
 (9.60)

schreiben, sofern der Anfangswert x(0-) und der Verlauf der Eingangsgröße  $u(\tau')$  für  $0 \le \tau' \le \tau$  bekannt sind. Enthält  $u(\tau)$  bei  $\tau = 0$  keinen Dirac-Stoß, brauchen wir nicht zwischen x(0-) und x(0+) zu unterscheiden. Dies setzen wir voraus, wenn wir einfach x(0) schreiben.

Die bisherigen Überlegungen lassen sich für einen beliebigen Anfangszeitpunkt  $\tau_0$  verallgemeinern. Wir erhalten

$$x(\tau) = e^{a(\tau - \tau_0)} x(\tau_0^-) + e^{a\tau} \int_{\tau_0^-}^{\tau} e^{-a\tau'} bu(\tau') d\tau', \quad \tau \geqslant \tau_0 , \qquad (9.61)$$

als die allgemeine Lösung. Überprüfen Sie, dass dieser Ausdruck tatsächlich die Zustandsgleichung (9.54) erfüllt und der Anfangsbedingung genügt!

Für die Ermittlung der Übertragungsfunktion  $G(s) = Y_{0Z}(s)/U(s)$  ist die Laplace-transformierte Ausgangsgleichung (9.55) für den Nullzustandsteil,  $Y_{0Z}(s) = cX_{0Z}(s) + dU(s)$ , heranzuziehen. Einsetzen von  $X_{0Z}(s) = (s-a)^{-1}bU(s)$  liefert

$$G(s) = c(s-a)^{-1}b + d, (9.62)$$

wobei die Konstante d einen direkten Durchgriff gewichtet.

## Das allgemeine Zustandsmodell

Wir betrachten nun ein LTI-System n-ter Ordnung ohne Totzeiten mit p Eingangsgrößen und q Ausgangsgrößen, beschrieben durch die Gleichungen

$$\underline{x}'(\tau) = \underline{A}\,\underline{x}(\tau) + \underline{B}\,\underline{u}(\tau),\tag{9.63}$$

$$y(\tau) = \underline{C}\,\underline{x}(\tau) + \underline{D}\,\underline{u}(\tau). \tag{9.64}$$

Wie bereits in (9.1) bis (9.3) notiert, werden die Eingangsgrößen in der  $p \times 1$ -Matrix  $\underline{u}$ , die Ausgangsgrößen in der  $q \times 1$ -Matrix  $\underline{y}$  und die Zustandsgrößen in der  $n \times 1$ -Matrix  $\underline{x}$  zusammengefasst.  $\underline{A}$  ist die  $n \times n$ -Systemmatrix,  $\underline{B}$  die  $n \times p$ -Eingangsmatrix,  $\underline{C}$  die  $q \times n$ -Ausgangsmatrix und  $\underline{D}$  die  $q \times p$ -Durchgriffsmatrix. Der Anfangszustand  $\underline{x}(0)$  sei bekannt.

Analog zur Behandlung des SISO-Systems erster Ordnung bilden wir die Laplace-Transformierte der Zustandsgleichung (9.63),

$$sX(s) - \underline{x}(0) = \underline{A}X(s) + \underline{B}U(s),$$

und lösen nach X(s) auf,

$$X(s) = (sE - A)^{-1}x(0) + (sE - A)^{-1}BU(s), (9.65)$$

wobei  $\underline{E}$  die  $n \times n$ -Einsmatrix (Einser in der Hauptdiagonalen, alle anderen Elemente Null) bedeutet. Dies lässt sich wieder in den Nulleingangsteil und in den Nullzustandsteil aufspalten,

$$\underline{X}_{0E}(s) = (s\underline{E} - \underline{A})^{-1}\underline{x}(0), \quad \underline{X}_{0Z}(s) = (s\underline{E} - \underline{A})^{-1}\underline{B}\underline{U}(s).$$
 (9.66)

Über die Laplace-Transformation von Gl.(9.64) ergibt sich dann

$$\underline{Y}(s) = \underline{Y}_{0E}(s) + \underline{Y}_{0Z}(s), \tag{9.67}$$

$$\underline{Y}_{0E}(s) = \underline{C}(s\underline{E} - \underline{A})^{-1}\underline{x}(0), \quad \underline{Y}_{0Z}(s) = \left[\underline{C}(s\underline{E} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}\right]\underline{U}(s). \quad (9.68)$$

Führen wir in Erweiterung des SISO-Falls die  $q \times p$ -Übertragungsmatrix  $\underline{G}(s)$  gemäß

$$\underline{Y}_{0Z}(s) = \underline{G}(s)\underline{U}(s) \tag{9.69}$$

ein, so liefert der Vergleich mit (9.68)2 unmittelbar

$$\underline{G}(s) = \underline{C}(s\underline{E} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}$$
(9.70)

als Verallgemeinerung des Ausdrucks (9.62).

#### Die Resolvente

Bei der Lösungsdarstellung im Laplace-Bereich spielt die  $n \times n$ -Matrix  $(s\underline{E} - \underline{A})^{-1}$ , auch Resolvente genannt, eine fundamentale Rolle.

Orientieren wir uns an einem einfachen Beispiel: Angenommen, wir haben ein System zweiter Ordnung mit der Systemmatrix<sup>4</sup>

$$\underline{A} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{array} \right] ,$$

also

$$s\underline{E} - \underline{A} = s \left[ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{array} \right] \;.$$

Die Inversion liefert hier

$$(s\underline{E} - \underline{A})^{-1} = \frac{1}{P(s)} \begin{bmatrix} s+3 & 1\\ -2 & s \end{bmatrix} ,$$
 (9.71)

$$P(s) = \det(s\underline{E} - \underline{A}) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2). \tag{9.72}$$

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>entsprechend z.B. einem SISO-System mit den Koeffizienten  $a_0 = 2$  und  $a_1 = 3$  des charakteristischen Polynoms; vgl.(9.19)<sub>1</sub>

Dass  $det(s\underline{E} - \underline{A})$  gerade das charakteristische Polynom unseres Systems liefert, ist kein Zufall. Tatsächlich stellt

$$\det(s\underline{E} - \underline{A}) = P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$
 (9.73)

immer das charakteristische Polynom des Systems dar, wenn dieses auf die minimale Ordnung reduziert wurde. Das folgt aus (9.19)<sub>1</sub> und der Tatsache, dass die Determinante einer Matrix invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen ist. Durch solch eine Transformation könnten wir insbesondere auf Zustandsvariablen übergehen, mit denen die Systemmatrix die zugeordnete Diagonalform

$$\underline{A}_{d} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{diag} \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$
 (9.74)

mit den Wurzeln des charakteristischen Polynoms als Elemente annimmt.

Für die Darstellung der Lösung im Zeitbereich benötigen wir die inverse Laplace-Transformation der Resolvente, die sich in unserem Beispiel (9.71) zu

$$\mathcal{L}^{-1}\left[ (s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \right] = \begin{bmatrix} 2e^{-\tau} - e^{-2\tau} & e^{-\tau} - e^{-2\tau} \\ -2e^{-\tau} + 2e^{-2\tau} & -e^{-\tau} + 2e^{-2\tau} \end{bmatrix}$$
(9.75)

ergibt, gültig für  $\tau \geq 0$ . Tatsächlich erscheinen die Elemente der  $n \times n$ -Matrix  $\mathcal{L}^{-1}\left[(s\underline{E}-\underline{A})^{-1}\right]$  immer als Linearkombinationen der Funktionen  $e^{p_i\tau}$ , wobei die  $p_i, i=1,\ldots,n$ , die Wurzeln des charakteristischen Polynoms (9.73), also die Pole des Systems sind. Wählen wir speziell Zustandsgrößen, für welche die Systemmatrix in der Diagonalform erscheint, so ist auch  $\mathcal{L}^{-1}\left[(s\underline{E}-\underline{A})^{-1}\right]$  eine Diagonalmatrix mit den Elementen  $e^{p_i\tau}$ . Beispielsweise ergibt sich mit (9.74)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\left(s\underline{E} - \underline{A}_{\mathrm{d}}\right)^{-1}\right] = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\tau} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-2\tau} \end{bmatrix}. \tag{9.76}$$

Übrigens gelten die gleichen Überlegungen auch für komplexe Wurzeln des charakteristischen Polynoms.

#### Die Matrix-Exponentialfunktion

In Analogie zur skalaren Beziehung

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(s-a)^{-1}\right] = \mathrm{e}^{a\tau}\varepsilon(\tau)$$

schreiben wir für die inverse Laplace-Transformierte der Resolvente

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\left(s\underline{E} - \underline{A}\right)^{-1}\right] = e^{\underline{A}\tau}\varepsilon(\tau) \tag{9.77}$$

mit einer  $n \times n$ -Matrix  $\mathrm{e}^{\underline{A}\tau}$ , deren Elemente Linearkombinationen von  $\mathrm{e}^{p_i\tau}$  mit den Wurzeln  $p_i, i=1,\ldots,n$ , des charakteristischen Polynoms (9.73) sind. Besitzt  $\underline{A}$  die Diagonalform  $\underline{A}_{\mathrm{d}} = \mathrm{diag}\big[p_1, \ldots, p_n\big]$ , so erscheint auch  $\mathrm{e}^{\underline{A}\tau}$  in der Diagonalform

$$e^{\underline{A}_{d}\tau} = \text{diag} \left[ e^{p_{1}\tau}, \dots, e^{p_{n}\tau} \right].$$
 (9.78)

Es gibt eine Reihe von Techniken zur Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion  $e^{\underline{A}\tau}$ . Wir wollen uns hier zunächst mit (9.77) als Definitionsgleichung und als Berechnungsvorschrift begnügen, im Übrigen aber einige Eigenschaften aus der weitgehenden Analogie mit der gewöhnlichen Exponentialfunktion darlegen.

So besitzt die gewöhnliche Exponentialfunktion die beständig konvergente Potenzreihe

 $e^{a\tau} = 1 + a\tau + \frac{(a\tau)^2}{2!} + \frac{(a\tau)^3}{3!} + \cdots,$ 

die auch als Definition von  $e^{a\tau}$  aufgefasst werden kann. Gleiches gilt für  $e^{\underline{A}\tau}$ . Die Matrix-Reihe

$$e^{\underline{A}\tau} = \underline{E} + \underline{A}\tau + \underline{A}^2 \frac{\tau^2}{2!} + \underline{A}^3 \frac{\tau^3}{3!} + \cdots, \qquad (9.79)$$

besitzt eine große grundsätzliche Bedeutung. Beispielsweise können Sie daraus unmittelbar die wichtige Beziehung

$$d e^{\underline{A}\tau}/d\tau = \underline{A}e^{\underline{A}\tau} = e^{\underline{A}\tau}\underline{A}$$
(9.80)

als Matrix-Differentialgleichung für  $e^{\underline{A}\tau}$  ableiten. Sie stellt, zusammen mit der ebenfalls aus (9.79) folgenden Anfangsbedingung  $e^{\underline{A}\cdot 0} = \underline{E}$ , ein wirksames Hilfsmittel zur numerischen Berechnung von  $e^{\underline{A}\tau}$  für variable  $\tau$  dar.

Eine ebenfalls leicht mit der Reihendarstellung (9.79) begründbare Eigenschaft betrifft die Integration:

$$\int_{0}^{\tau} e^{\underline{A}\tau'} d\tau' = \underline{A}^{-1} \left( e^{\underline{A}\tau} - \underline{E} \right) = \left( e^{\underline{A}\tau} - \underline{E} \right) \underline{A}^{-1}, \tag{9.81}$$

vorausgesetzt, die Matrix  $\underline{A}$  ist regulär (invertierbar). Weiters gilt wie für die gewöhnliche Exponentialfunktion

$$e^{\underline{A}\cdot(\tau_1+\tau_2)} = e^{\underline{A}\tau_1}e^{\underline{A}\tau_2}.$$
 (9.82)

Vorsicht ist jedoch bei einer Summe von Matrizen im Exponenten geboten:

$$e^{(\underline{A}_1 + \underline{A}_2)\tau} = e^{\underline{A}_1 \tau} e^{\underline{A}_2 \tau} \iff \underline{A}_1 \underline{A}_2 = \underline{A}_2 \underline{A}_1$$
(9.83)

Abschließend möchte ich noch die Grenzwerteigenschaft

$$\lim_{\tau \to \infty} e^{\underline{A}\tau} = \underline{0} \quad \text{für} \quad \text{Re}(p_i) < 0, \ i = 1, \dots, n,$$
(9.84)

erwähnen, d.h.  $e^{A\tau}$  strebt für wachsende  $\tau$  dann gegen die Nullmatrix, wenn alle Eigenwerte (Wurzeln des charakteristischen Polynoms (9.73), Pole des Systems) der Matrix A in der linken Halbebene liegen.

#### Die allgemeine Lösung im Zeitbereich

Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht, die allgemeine Lösung für das Zustandsmodell (9.63), (9.64) als inverse Laplace-Transformierte der Gln. (9.65) bis (9.68)

anzugeben. Mit den Beziehungen (9.77), (9.82) und der Faltungseigenschaft der Laplace-Transformation erhalten wir, aufgespalten in die Nulleingangs- und Nullzustandsanteile, für die Zustandsgrößen

$$\underline{x}(\tau) = \underline{x}_{0E}(\tau) + \underline{x}_{0Z}(\tau), \quad \underline{x}_{0E}(\tau) = e^{\underline{A}\tau}\underline{x}(0),$$

$$\underline{x}_{0Z}(\tau) = e^{\underline{A}\tau} \int_{0}^{\tau} e^{-\underline{A}\tau'}\underline{B}\,\underline{u}(\tau')d\tau'$$
(9.85)

und für die Ausgangsgrößen

$$\underline{y}(\tau) = \underline{y}_{0E}(\tau) + \underline{y}_{0Z}(\tau), \quad \underline{y}_{0E}(\tau) = \underline{C}e^{\underline{A}\tau}\underline{x}(0),$$

$$\underline{y}_{0Z}(\tau) = \underline{C}e^{\underline{A}\tau}\int_{0}^{\tau} e^{-\underline{A}\tau'}\underline{B}\,\underline{u}(\tau')d\tau' + \underline{D}\,\underline{u}(\tau), \tag{9.86}$$

gültig für  $\tau \geqslant 0$ .

Es ist üblich, die einer Systemmatrix  $\underline{A}$  zugeordnete Matrix-Exponentialfunktion mit dem Symbol  $\underline{\Phi}$  zu bezeichnen und Transitionsmatrix zu nennen<sup>5</sup>,

$$\underline{\underline{\Phi}}(\tau) = e^{\underline{A}\tau} \varepsilon(\tau). \tag{9.87}$$

Die zusammengefassten Lösungen lassen sich dann für einen beliebigen Anfangszeitpunkt  $\tau_0$  in der Form

$$\underline{\underline{y}}(\tau) = \underline{C}\,\underline{x}(\tau) + \underline{D}\,\underline{u}(\tau), \tag{9.88}$$

$$\underline{\underline{x}}(\tau) = \underline{\underline{\Phi}}(\tau - \tau_0)\underline{\underline{x}}(\tau_0^-) + \int_{\tau_0^-}^{\tau} \underline{\underline{\Phi}}(\tau - \tau')\underline{\underline{B}}\underline{\underline{u}}(\tau')d\tau'$$
(9.89)

schreiben. Trotz ihrer Klarheit erweisen sich diese Gleichungen für die Handrechnung als eher mühsam anzuwenden. Ihre wahre Kraft entwickeln sie bei der rechnerunterstützten Behandlung von LTI-Systemen und im Zusammenhang mit Schlüssen, die sich daraus für den Systementwurf und für regelungstechnische Probleme ziehen lassen.

# 9.3 Stoß- und Sprungantworten

In der klassischen Analyse von SISO-LTI-Systemen erfüllen die Stoß- und Sprungantworten wichtige Aufgaben als charakterisierende Funktionen. Eine ähnliche Rolle kommt ihnen auch bei der Beschreibung von MIMO-Systemen mit Zustandsmodellen zu.

Angenommen, das MIMO-System n-ter Ordnung, beschrieben durch die Gleichungen

$$\underline{x}'(\tau) = \underline{A}\,\underline{x}(\tau) + \underline{B}\,\underline{u}(\tau),\tag{9.90}$$

$$y(\tau) = \underline{C}\underline{x}(\tau) + \underline{D}\underline{u}(\tau), \tag{9.91}$$

 $<sup>^5</sup>$ Wir multiplizieren jedes Matrixelement zusätzlich mit dem Heaviside-Sprung  $\varepsilon(\tau)$ , um die Rechtsseitigkeit sicherzustellen.

befinde sich anfänglich im Nullzustand,  $\underline{x}(0-)=\underline{0}$ . Aus dem Satz der p Eingangsgrößen wählen wir eine beliebige, sagen wir, die j-te, gleich dem Dirac-Stoß und halten gleichzeitig alle anderen Eingänge auf Null. Die zugehörige  $p\times 1$ -Matrix der Eingangsgrößen wird mit

$$\underline{u}_{j}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \delta(\tau) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{T} \tag{9.92}$$

bezeichnet, wobei  $\delta(\tau)$  an der j-ten Stelle steht. Die resultierende  $q \times 1$ -Matrix der Ausgangsgrößen heiße  $\underline{g}_j(\tau)$ . Schreiben wir alle  $\underline{g}_j(\tau)$ ,  $j=1,\ldots,p$ , nebeneinander als Spalten auf, so entsteht die  $q \times p$ -Stoßantwort-Matrix

$$\underline{g}(\tau) = \left[\underline{g}_1(\tau), \dots, \underline{g}_p(\tau)\right].$$
 (9.93)

Ähnlich denken wir uns auch die konstante  $n \times p$ -Eingangsmatrix  $\underline{B}$  und die  $q \times p$ -Durchgriffsmatrix  $\underline{D}$  jeweils aus ihren Spalten aufgebaut,

$$\underline{B} = [\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_p], \quad \underline{D} = [\underline{d}_1, \dots, \underline{d}_p], \quad (9.94)$$

so dass mit den Dirac-Eingängen (9.92) speziell

$$\underline{B}\underline{u}_{j}(\tau) = \underline{b}_{j}\delta(\tau), \quad \underline{D}\underline{u}_{j}(\tau) = \underline{d}_{j}\delta(\tau), \quad j = 1, \dots, p,$$
 (9.95)

entsteht. Diese Notationen werden im Folgenden benutzt.

#### Die Stoßantwort

An den j-ten Eingang werde also zum Zeitpunkt  $\tau=0$  ein Dirac-Stoß gelegt, alle anderen Eingänge seien Null, und das System starte vom Nullzustand  $\underline{x}(0-)=\underline{0}$ . Mit (9.88) und (9.89) zeigt sich dann am Ausgang die Stoßantwort

$$\underline{g}_{j}(\tau) = \int_{0}^{\tau} \underline{C} \, \underline{\Phi}(\tau - \tau') \underline{b}_{j} \, \delta(\tau') d\tau' + \underline{d}_{j} \delta(\tau),$$

worin  $\underline{\Phi}(\tau) = e^{\underline{A}\tau} \varepsilon(\tau)$  die Transitionsmatrix (9.87) des Systems bedeutet. Aus der Abtast-Eigenschaft des Dirac-Stoßes folgt

$$\underline{g}_{j}(\tau) = \underline{C} \, \underline{\Phi}(\tau) \underline{b}_{j} + \underline{d}_{j} \delta(\tau), \quad j = 1, \dots, p, \tag{9.96}$$

oder, gemäß (9.93) kombiniert, die  $q \times p$ -Stoßantwort-Matrix

$$\underline{\underline{g}}(\tau) = \underline{\underline{C}}\,\underline{\Phi}(\tau)\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{D}}\delta(\tau). \tag{9.97}$$

Sehen wir uns die zugehörige Laplace-Transformierte an: Wegen  $\mathcal{L}\left[\underline{\Phi}(\tau)\right] = \mathcal{L}\left[e^{\underline{A}\tau}\varepsilon(\tau)\right] = (s\underline{E}-\underline{A})^{-1}$  und  $\mathcal{L}\left[\delta(\tau)\right] = 1$  ergibt sich genau die **Übertragungsmatrix**  $\underline{G}(s)$  aus Gl.(9.70). Wir finden den grundlegenden Zusammenhang

$$\underline{\underline{G}}(s) = \mathcal{L}\left[\underline{g}(\tau)\right] \tag{9.98}$$

demnach auch bei MIMO-Systemen.

### Die Sprungantwort

Ersetzen wir nun in (9.92) den Dirac-Stoß  $\delta(\tau)$  durch den Heaviside-Sprung  $\varepsilon(\tau)$ , so entsteht an Stelle von (9.96) der Ausdruck

$$\underline{h}_{j}(\tau) = \int_{0}^{\tau} \underline{C} \,\underline{\Phi}(\tau - \tau') \underline{b}_{j} \,\varepsilon(\tau') d\tau' + \underline{d}_{j} \varepsilon(\tau)$$

$$= \int_{0}^{\tau} \underline{C} \,\underline{\Phi}(\tau') \underline{b}_{j} \,\varepsilon(\tau - \tau') d\tau' + \underline{d}_{j} \varepsilon(\tau),$$

mit der Integrationsregel (9.81) also

$$\underline{h}_{j}(\tau) = \underline{C} \left[\underline{\Phi}(\tau) - \underline{E}\varepsilon(\tau)\right] \underline{A}^{-1}\underline{b}_{j} + \underline{d}_{j}\varepsilon(\tau), \quad j = 1, \dots, p,$$
(9.99)

und, nach Kombination dieser Spalten entsprechend (9.93), die  $q \times p$ -Sprungantwort-Matrix

$$\underline{\underline{h}}(\tau) = \underline{\underline{C}} \left[\underline{\underline{\Phi}}(\tau) - \underline{\underline{E}}\varepsilon(\tau)\right] \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{D}}\varepsilon(\tau). \tag{9.100}$$

Durch Integration von (9.97) und Differentiation von (9.100) können Sie sich übrigens von den erwarteten Zusammenhängen

$$\underline{h}(\tau) = \int_{0_{-}}^{\tau} \underline{g}(\tau') d\tau', \quad \underline{g}(\tau) = d\underline{h}(\tau)/d\tau$$
 (9.101)

direkt überzeugen.

Ein stabiles System hat alle Eigenwerte  $p_i$  der Systemmatrix  $\underline{A}$  in der linken Halbebene, so dass die Grenzwertregel (9.84)

$$\lim_{\tau \to \infty} \underline{\Phi}(\tau) = \underline{0} \tag{9.102}$$

liefert. Unter dieser Voraussetzung nimmt die Sprungantwort-Matrix den stationären Endwert

$$\underline{h}_{\rm st} = \lim_{\tau \to \infty} \underline{h}(\tau) = -\underline{C} \underline{A}^{-1} \underline{B} + \underline{D}. \tag{9.103}$$

an. Ein Vergleich mit der Darstellung (9.70) der Übertragungsmatrix  $\underline{G}(s)$  führt uns auf den nützlichen Zusammenhang<sup>6</sup>

$$\underline{\underline{h}}_{st} = \lim_{\tau \to \infty} \underline{\underline{h}}(\tau) = \underline{\underline{G}}(0), \qquad (9.104)$$

dem wir in analoger Form auch schon bei SISO-Systemen begegnet sind.

## 9.4 Vektorräume

In diesem Abschnitt möchte ich Sie an einige Ergebnisse der linearen Algebra erinnern, also der Theorie endlich-dimensionaler, linearer Räume (Vektorräume). Wir können uns dabei auf das kanonische Modell des  $\mathbb{R}^n$  beschränken und werden speziell auch die Existenz eines inneren Produkts in der gewöhnlichen euklidischen Form von vornherein voraussetzen. Alle Ergebnisse lassen sich leicht auf den komplexen Vektorraum  $\mathbb{C}^n$  verallgemeinern.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Vergleichen Sie damit den Endwertsatz der Laplace-Transformation.

#### Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$

Die Elemente  $\underline{v}$  ("Vektoren") unseres Vektorraums  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{C}^n$ ) sind die geordneten n-Tupel reeller (komplexer) Zahlen, geschrieben als (transponierte) Spalten

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T. \tag{9.105}$$

Die Addition und die Multiplikation mit rellen (komplexen) Zahlen sind wie üblich koordinatenweise definiert, so dass beliebige, endliche Linearkombinationen der Elemente wieder Elemente unseres Raums ergeben. Der Nullvektor  $\underline{0}$  (das n-Tupel von Nullen) gehört in jedem Fall dazu. In einem Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  lassen sich als Teilmengen **Unter-Vektorräume** der Dimension  $m \leq n$  bilden, die selbst wieder Vektorräume sind. Für n=3 stellen Sie sich diese Unterräume am besten als den  $\mathbb{R}^3$  selbst (m=3), als Ebenen durch den Ursprung (m=2), als Geraden durch den Ursprung (m=1) und als den Ursprung selbst (m=0) vor.

#### Norm und inneres Produkt

Als Norm (Betrag) von Vektoren  $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ reicht für unsere Zwecke die gewöhnliche euklidische Norm

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$
 (9.106)

aus. Sie erfüllt die üblichen, an Normen gestellten Bedingungen, nämlich, dass  $\|\underline{v}\| \geqslant 0$ , und  $\|\underline{v}\| = 0$  genau dann, wenn  $\underline{v} = \underline{0}$ , dass für zwei Vektoren  $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$  stets  $\|\underline{v} + \underline{w}\| \leqslant \|\underline{v}\| + \|\underline{w}\|$  (Dreiecks-Ungleichung) und dass  $\|\alpha\underline{v}\| = |\alpha| \|\underline{v}\|$ . Ein Vektor  $\underline{v}$  heißt normiert, wenn  $\|\underline{v}\| = 1$ .

Damit verträglich ist das innere Produkt zweier Vektoren  $\underline{v},\underline{w}\in\mathbb{R}^n$  die reelle Zahl $^7$ 

$$v \cdot w = v^T w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n, \tag{9.107}$$

so dass speziell  $\|\underline{v}\|^2 = \underline{v} \cdot \underline{v}$  gilt. Die beiden Vektoren  $\underline{v}$  und  $\underline{w}$  heißen **orthogonal**, wenn  $v \cdot w = 0$ .

### Linearkombinationen und Unter-Vektorräume

Sind  $\underline{a}_1,\underline{a}_2\in\mathbb{R}^n, n\geqslant 2$ , zwei gegebene Vektoren, so bilden alle möglichen Linearkombinationen

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 , \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \tag{9.108}$$

einen Unter-Vektorraum, der in diesem Spezialfall zweidimensional ist (eine Ebene durch den Ursprung), oder, wenn  $\underline{a}_1$  und  $\underline{a}_2$  kollinear sind ( $\underline{a}_1 = k\underline{a}_2, k \in \mathbb{R}$ ), sogar nur eindimensional (eine Gerade durch den Ursprung). Für gegebene Vektoren  $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r \in \mathbb{R}^n, r \leqslant n$ , nennen wir die Menge aller Linearkombinationen

$$\operatorname{span}(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r) = \{ \alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_r \underline{a}_r \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^n$$
 (9.109)

die lineare Hülle der Vektoren  $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r$  oder den von  $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r$  aufgespannten Unterraum. Es handelt sich jedenfalls wieder um einen Vektorraum und um eine (nicht notwendig echte) Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Für komplexe Vektoren  $\underline{v},\underline{w}$  wird das innere Produkt durch  $\underline{v}\cdot\underline{w}=\underline{v}^{*T}\underline{w}$  definiert, wobei  $\underline{v}^{*}$  der Vektor mit den zu  $\underline{v}$  konjugiert komplexen Koordinaten ist.

Beachten Sie: Ist z.B.  $\underline{a}_3$  eine Linearkombination von  $\underline{a}_1$  und  $\underline{a}_2$ , so gilt  $\operatorname{span}(\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3)=\operatorname{span}(\underline{a}_1,\underline{a}_2)$ . Die **Dimension** m eines gegebenen Unter-Vektorraums  $\mathcal{V}^m$  ist die minimale Anzahl von Vektoren, die benötigt werden, ihn aufzuspannen.

# Lineare Unabhängigkeit und Basis

Ein r-Tupel  $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_r)$  von Vektoren des  $\mathbb{R}^n$  heißt linear unabhängig, wenn sich das Verschwinden ihrer Linearkombination.

$$\alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_r \underline{a}_r = \underline{0},$$

nur mit  $\alpha_1=0,\ldots,\alpha_r=0$  erreichen lässt. Andernfalls heißen die Vektoren linear abhängig. Daraus folgt: Die Vektoren  $\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_r\in\mathbb{R}^n$  sind genau dann linear unabhängig, wenn sich keiner von ihnen als Linearkombination der anderen darstellen lässt. Betrachten wir einen Unter-Vektorraum  $\mathcal{V}^m$ , so ist seine Dimension m gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren, die sich in ihm finden lassen.

Eine Basis eines m-dimensionalen Unter-Vektorraums  $\mathcal{V}^m$  ist ein m-Tupel  $(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m)$  linear unabhängiger Vektoren aus  $\mathcal{V}^m$ , für die  $\operatorname{span}(\underline{b}_1,\ldots,\underline{b}_m)=\mathcal{V}^m$  gilt. Solch eine Basis spannt also den ganzen Unter-Vektorraum auf, d.h. jeder Vektor  $\underline{v}\in\mathcal{V}^m$  lässt sich als Linearkombination

$$\underline{v} = \beta_1 \underline{b}_1 + \dots + \beta_m \underline{b}_m \tag{9.110}$$

angeben. Offensichtlich ist die Wahl einer Basis nicht eindeutig, weil sich z.B. der Basisvektor  $\underline{b}_1$  durch  $\underline{b}_1 + \alpha \underline{b}_2$  ersetzen lässt. Ist eine Basis aber festgelegt, dann gibt es zu jedem Vektor  $\underline{v} \in \mathcal{V}^m$  genau ein m-Tupel  $(\beta_1, \dots, \beta_m)$  von Koeffizienten.

Basisvektoren unterliegen zunächst keiner Beschränkung hinsichtlich ihrer Norm oder ihres inneren Produkts, sie müssen nur linear unabhängig sein. Wenn aber für je zwei Basisvektoren deren inneres Produkt verschwindet,  $\underline{b}_i \cdot \underline{b}_j = 0$  für  $i \neq j$ , so sprechen wir von einer **orthogonalen Basis**. Ist überdies jeder Basisvektor normiert,  $\|\underline{b}_i\| = 1$  bzw.  $\underline{b}_i \cdot \underline{b}_i = 1$ , nennen wir die Basis **orthonormiert**.

Im  $\mathbb{R}^n$  (oder  $\mathbb{C}^n$ ) wird häufig die offensichtlich orthonormierte kanonische Basis

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \underline{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$
(9.111)

verwendet. In der Darstellung (9.110) eines Vektors  $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T$  erscheinen dann als Koeffizienten die **Koordinaten**  $v_1, \dots, v_n$ , also

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + \dots + v_n \underline{e}_n. \tag{9.112}$$

Für andere Basen, die auch orthonormiert sein können, treten i.A. andere Koeffizienten auf.

9.4 Vektorräume 183

#### Transformation von Basen

Im  $\mathbb{R}^n$  und in jedem seiner Unter-Vektorräume gibt es unendlich viele Basen. Für die Anwendungen ist es wichtig zu wissen, wie man von einer Basis zu einer anderen gelangt und wie sich dabei die Darstellungen (9.110) eines Vektors verhalten.

Beginnen wir mit einem Beispiel: Angenommen, ein Vektor  $\underline{v}$  ist im  $\mathbb{R}^3$  in Bezug auf die kanonische Basis  $\mathcal{E} = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  gegeben,

$$\underline{v} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} .$$

Wir wollen die Darstellung des selben Vektors  $\underline{v}$  in Bezug auf eine neue Basis  $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)$  finden, deren Vektoren in der alten Basis durch

$$\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0, 5 \end{bmatrix} , \quad \underline{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bestimmt sind, also die Koeffizienten  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  in

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0, 5 \end{bmatrix} + \beta_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ermitteln. Dies lässt sich als lineares Gleichungsproblem formulieren,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0, 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \text{ oder } \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0, 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Schreiben wir für die beiden Koeffizienten-Tripel des Vektors  $\underline{v}$  mit Bezug auf die kanonische Basis

$$\underline{v}|_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T, \qquad \underline{v}|_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}^T,$$

so gilt

$$\underline{v}|_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0, 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \underline{v}|_{\mathcal{E}} .$$

Wir fassen verallgemeinernd zusammen: Sei  $\underline{P}$  die Matrix, deren Spalten von den Darstellungen (Koordinaten) der neuen Basisvektoren in der alten Basis gebildet wird. Dann gilt für die Darstellungen (Koordinaten) des selben Vektors  $\underline{v}$  in Bezug auf die beiden Basen

$$\underline{\underline{v}}|_{\text{neue Basis}} = \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{v}}|_{\text{alte Basis}}$$
 (9.113)

$$\underline{v}|_{\text{alte Basis}} = \underline{P} \, \underline{v}|_{\text{neue Basis}}$$
 (9.114)

Die Koordinaten transformieren sich in diesem Sinn gegenläufig zu den Basisvektoren.

### Transformation von Zustandskoordinaten

In den hier betrachteten Anwendungen werden die eben besprochenen Transformationen für den Übergang von einem Zustandsmodell zu einem anderen, äquivalenten Zustandsmodell des gleichen Systems benötigt.

Seien – in vereinfachter Schreibweise –  $\underline{x}(\tau)$  die Koordinaten (Zustandskoordinaten, Zustandsgrößen) des Zustandsvektors in Bezug auf eine alte, und  $\underline{\tilde{x}}(\tau)$  die Koordinaten des gleichen Zustandsvektors in Bezug auf eine neue Basis, so dass

$$\underline{x}(\tau) = \underline{P}\,\underline{\tilde{x}}(\tau) \tag{9.115}$$

mit einer konstanten, regulären Transformationsmatrix  $\underline{P}$ . Einsetzen in das alte Zustandsmodell

$$\underline{x}'(\tau) = \underline{A}\underline{x}(\tau) + \underline{B}\underline{u}(\tau),$$
  
$$y(\tau) = \underline{C}\underline{x}(\tau) + \underline{D}\underline{u}(\tau)$$

liefert das neue Zustandsmodell

$$\underline{\tilde{x}}'(\tau) = \underline{\tilde{A}}\,\underline{\tilde{x}}(\tau) + \underline{\tilde{B}}\,\underline{u}(\tau),$$
$$y(\tau) = \underline{\tilde{C}}\,\underline{\tilde{x}}(\tau) + \underline{\tilde{D}}\,\underline{u}(\tau)$$

mit den Matrizen

$$\underline{\tilde{A}} = \underline{P}^{-1}\underline{A}\underline{P}, \quad \underline{\tilde{B}} = \underline{P}^{-1}\underline{B}, \quad \underline{\tilde{C}} = \underline{C}\underline{P}, \quad \underline{\tilde{D}} = \underline{D}.$$
 (9.116)

Die Durchgriffmatrix verhält sich dabei invariant, weil sie direkt die ungeändert bleibenden Eingangs- und Ausgangsgrößen verknüpft.

# 9.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Bei der Lösungsdarstellung im Zustandsraum kommt der Transitionsmatrix  $\underline{\Phi}(\tau) = \mathrm{e}^{\underline{A}\tau}\varepsilon(\tau)$  eine zentrale Rolle zu. Wir werden diese Matrix jetzt etwas genauer untersuchen und dabei auch einige Ergebnisse über lineare Gleichungssysteme zusammenstellen.

### Eigenwertprobleme

Wir betrachten wieder den  $\mathbb{R}^n$  (oder  $\mathbb{C}^n$ ) als Vektorraum und seine Elemente  $\underline{v}$ , die n-Tupel von Zahlen, geschrieben als Spaltenvektoren. Die  $n \times n$ -Matrizen spielen dann die Rolle von linearen Abbildungen (Transformationen): Durch Multiplikation eines Vektors  $\underline{v}$  mit einer  $n \times n$ -Matrix  $\underline{A}$  von links entsteht wieder ein Vektor  $\underline{A}\underline{v}$  unseres Raums. Wir stellen uns nun die Frage: Gibt es Vektoren  $\underline{v} \neq \underline{0}$ , die durch eine gegebene Matrix  $\underline{A}$  auf ein skalares Vielfaches von sich selbst abgebildet werden, d.h.

$$\underline{A}\,\underline{v} = \lambda\underline{v}.\tag{9.117}$$

Die Zahlen  $\lambda$  und Vektoren  $\underline{v}$ , die diese Gleichung erfüllen, heißen Eigenwerte bzw. Eigenvektoren der Matrix  $\underline{A}$ , und ihre Ermittlung nennen wir das zugehörige Eigenwertproblem. Schreiben wir Gl.(9.117) in der Form

$$(\lambda \underline{E} - \underline{A})\underline{v} = \underline{0}, \tag{9.118}$$

ist sofort ersichtlich: Die reellen oder komplexen Eigenwerte  $\lambda$  müssen solche Zahlenwerte annehmen, dass die Matrix  $(\lambda \underline{E} - \underline{A})$  singulär (nicht invertierbar) ist. Wäre sie regulär, gäbe es nur die triviale Lösung v = 0.

Eine Bedingung für die Singularität der  $n \times n$ -Matrix  $(\lambda \underline{E} - \underline{A})$  ist bekanntlich das Verschwinden ihrer Determinante

$$\det(\lambda \underline{E} - \underline{A}) = P(\lambda)$$

$$= \lambda^{n} + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_{1}\lambda + a_{0} = \prod_{i=1}^{\bar{n}} (\lambda - \lambda_{i})^{n_{i}}, \quad (9.119)$$

die das zur Matrix  $\underline{A}$  gehörige charakteristische Polynom  $P(\lambda)$  definiert. Die gesuchten Eigenwerte sind also die (unterschiedlichen) Wurzeln  $\lambda_i$  von  $P(\lambda)$ , wobei  $n_i$  die Vielfachheit der Wurzel  $\lambda_i$  und  $\bar{n}$  die Anzahl der unterschiedlichen Wurzeln bezeichnet. Insgesamt gibt es genau  $n = \sum_{i=1}^{\bar{n}} n_i$  Wurzeln. Besteht die Matrix nur aus reellen Elementen, so sind die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms reell, und die Wurzeln sind entweder reell, oder sie treten in konjugiert komplexen Paaren auf.

Ein einfaches Beispiel: Die Matrix

$$\underline{A} = \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{array} \right]$$

besitzt das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3),$$

also die beiden Eigenwerte  $\lambda_1=2$  und  $\lambda_2=3$ . Die Eigenvektoren  $\underline{v}_1=\begin{bmatrix}v_{11}&v_{12}\end{bmatrix}^T$  und  $\underline{v}_2=\begin{bmatrix}v_{21}&v_{22}\end{bmatrix}^T$  sind aus den beiden homogenen Gleichungssystemen

$$(\lambda_1\underline{E}-\underline{A})\underline{v}_1=\begin{bmatrix}1 & -2\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\v_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\;,\quad (\lambda_2\underline{E}-\underline{A})\underline{v}_2=\begin{bmatrix}2 & -2\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{21}\\v_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

mit singulären Koeffizientenmatrizen zu berechnen. Daraus folgt

$$\underline{v}_1 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
,  $\underline{v}_2 = \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  (9.120)

mit beliebigen Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2$ . Mit Gl.(9.118) ist klar, dass die Eigenvektoren grundsätzlich nur bis auf skalare Vielfache bestimmt sind.

### Eigenwerte und Systempole

Bedeutet  $\underline{A}$  im Speziellen die in den Zustandsgleichungen auftretende Systemmatrix, so sind, wie aus Gl.(9.73) ersichtlich, ihre Eigenwerte genau die Pole des Systems. Sie sind unabhängig von der Wahl einer speziellen Basis: Die durch eine Transformation (9.116)<sub>1</sub> mit einer regulären Matrix  $\underline{P}$  entstehende Systemmatrix  $\underline{A} = \underline{P}^{-1}\underline{A}\,\underline{P}$  – es handelt sich um eine Ähnlichkeitstransformation – liefert wegen<sup>8</sup>

$$\begin{split} \det(\lambda \underline{E} - \underline{\tilde{A}}) &= \det(\lambda \underline{E} - \underline{P}^{-1}\underline{A}\,\underline{P}) = \det[\underline{P}^{-1}(\lambda \underline{E} - \underline{A})\underline{P}] \\ &= \det(\underline{P}^{-1})\det(\lambda \underline{E} - \underline{A})\det(\underline{P}) = \det(\lambda \underline{E} - \underline{A}) \end{split}$$

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Für reguläre Matrizen  $\underline{P}$  gilt  $\det(\underline{P}^{-1}) = 1/\det(\underline{P})$ .

die gleichen Eigenwerte.

## Lineare Gleichungssysteme

Im Abschnitt 2.5 haben Sie einige Ergebnisse über das Lösen linearer algebraischer Gleichungssysteme kennen gelernt. Ich möchte diese Diskussion jetzt von einem etwas allgemeineren Standpunkt aus weiterführen.

Wir untersuchen ein Gleichungssystem der Form

$$\underline{M}\,\underline{x} = \underline{d} \tag{9.121}$$

mit der bekannten  $m \times p$ -Koeffizientenmatrix  $\underline{M}$ , der gesuchten  $p \times 1$ -Lösungsmatrix  $\underline{x}$  und der bekannten  $m \times 1$ -Datenmatrix  $\underline{d}$ . Die Matrix  $\underline{M}$  kann auch als Koordinaten-Darstellung einer linearen Abbildung von einem p-dimensionalen Vektorraum  $\mathcal{V}^p$  in einen m-dimensionalen Vektorraum  $\mathcal{V}^m$  betrachtet werden. Gesucht sind dann jene Vektoren  $\underline{v} \in \mathcal{V}^p$ , die unter dieser Abbildung den Vektor  $\underline{d} \in \mathcal{V}^m$  liefern.

Unabhängig davon, ob die Dimension m größer, gleich oder kleiner p ist, treffen wir auf eine der drei Situationen:

- (i) Es gibt eine eindeutige Lösung.
- (ii) Es gibt unendlich viele Lösungen.
- (iii) Es gibt keine Lösung.

Das Eigenvektorproblem ist ein Sonderfall von (ii). Die Koeffizientenmatrix ist dann die  $n \times n$ -Matrix ( $\lambda \underline{E} - \underline{A}$ ), die Unbekannten sind die Eigenvektoren und die Datenmatrix ist der Nullvektor. Die beiden Vektorräume können miteinander identifiziert werden.

Mit der Anordnung von M als Spaltenvektoren,

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{m}_1 & \underline{m}_2 & \cdots & \underline{m}_p \end{bmatrix}, \tag{9.122}$$

nimmt das System (9.121) die Form

$$x_1\underline{m}_1 + x_2\underline{m}_2 + \dots + x_p\underline{m}_p = \underline{d}$$

einer Bedingung für eine Linearkombination der  $\underline{m}_i$  an. Die Menge aller Linearkombinationen dieser Spaltenvektoren, also deren lineare Hülle, ist offensichtlich die Menge aller Ergebnisse der durch  $\underline{M}$  definierten linearen Abbildung  $\mathcal{V}^p \longrightarrow \mathcal{V}^m$  und bildet einen Unter-Vektorraum von  $\mathcal{V}^m$ , den wir mit

$$\operatorname{im}(\underline{M}) = \operatorname{span}(\underline{m}_1, \underline{m}_2, \dots, \underline{m}_p)$$
 (9.123)

bezeichnen und Bildbereich nennen. Wir schließen daraus: Unser Gleichungssystem  $\underline{M}\,\underline{x}=\underline{d}$  hat genau dann eine Lösung (eindeutig oder nicht), wenn  $\underline{d}\in \operatorname{im}(\underline{M})$ , wenn also der Datenvektor  $\underline{d}$  in dem von den Spaltenvektoren von  $\underline{M}$  aufgespannten Unter-Vektorraum liegt.

Die allgemeine Form der Lösung – wenn es eine gibt – kann als Summe  $\underline{x} = \underline{x}_p + \underline{x}_h$  irgendeiner partikulären Lösung  $\underline{x}_p$  und der homogenen Lösung  $\underline{x}_h$  geschrieben werden, die  $\underline{M}\,\underline{x}_h = \underline{0}$  in allgemeinster Weise erfüllt. Ähnlich wie bei

den linearen Differentialgleichungen enthält  $\underline{x}_h$  freie Konstanten, auf die wir in den Ergebnissen (9.120) unseres letzten Beispiels bereits gestoßen sind.

Die prinzipielle Lösungstechnik möchte ich an Hand des Beispiels

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$
 (9.124)

erläutern: Einfügen von Nullzeilen in die Koeffizientenmatrix und, entsprechend, in die Datenmatrix ändert die Lösung nicht, d.h. wir können auch

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$
(9.125)

nehmen. Dies ist bereits die gesuchte Form, die i.A. durch Zeilenoperationen erst hergestellt werden muss. Sie heißt **modifizierte Hermite-Normalform** und besitzt die folgenden Eigenschaften: Die modifizierte Koeffizientenmatrix  $\underline{M}'$ 

- (i) hat mindestens so viele Zeilen wie Spalten (hat sie ursprünglich weniger Zeilen als Spalten, werden Nullzeilen eingefügt);
- (ii) hat die obere Dreiecksform (alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonale sind Nullen);
- (iii) hat entweder 0 oder 1 in der Hauptdiagonale.
- (iv) Jede Spalte mit 1 in der Hauptdiagonale hat sonst nur Nullen.

Wegen dieser besonderen Form können wir eine partikuläre Lösung und zwei unabhängige homogene Lösungen von (9.125) durch Inspektion bestimmen:<sup>9</sup>

$$\underline{x}_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{\mathbf{h}1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{\mathbf{h}2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

 $\underline{x}_{\rm p}$  ist die rechte Seite der Normalform (9.125).  $\underline{x}_{\rm h1}$  und  $\underline{x}_{\rm h2}$  sind der zweite bzw. der vierte Spaltenvektor von  $\underline{M}'$ , nämlich die Spalten mit 0 in der Hauptdiagonale, wobei zusätzlich eine -1 in der Reihe entsprechend der Spaltennummer einzufügen ist (hier in der zweiten bzw. in der vierten Zeile). Die vollständige Lösung ist

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

mit beliebigen Zahlen  $\alpha_1, \alpha_2$ . Es gibt also unendlich viele Lösungen.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Prüfen Sie die Lösungseigenschaft!

Die homogenen Lösungen bilden einen Unter-Vektorraum von  $\mathcal{V}^p$ , in unserem Fall span $(\underline{x}_{h1},\underline{x}_{h2})$ . Es ist dies der Kern der durch  $\underline{M}$  repräsentierten linearen Abbildung  $\mathcal{V}^p \longrightarrow \mathcal{V}^m$ . Wir schreiben

$$\ker(\underline{M}) = \operatorname{span}(\underline{x}_{h1}, \underline{x}_{h2}, \dots, \underline{x}_{h\nu}), \tag{9.126}$$

wobei  $\underline{x}_{h1}, \underline{x}_{h2}, \dots, \underline{x}_{h\nu}$  die linear unabhängigen Lösungen des homogenen Problems  $\underline{M}\,\underline{x}_h = \underline{0}$  sind. Ihre Anzahl ist gleich der Dimension des Kerns unserer linearen Abbildung,  $\nu = \dim[\ker(\underline{M})]$ ,  $\min^{10} 0 \leqslant \nu \leqslant p$ . Weiters gilt, wenn  $\gamma = \operatorname{ran}(\underline{M}) = \dim[\operatorname{im}(\underline{M})]$  den Rang der Matrix  $\underline{M}$ , also die Anzahl ihrer linear unabhängigen Spaltenvektoren bezeichnet, die bekannte Dimensionsformel für lineare Abbildungen  $\mathcal{V}^p \longrightarrow \mathcal{V}^m$ 

$$\dim[\ker(\underline{M})] + \dim[\operatorname{im}(\underline{M})] = p \quad \text{bzw.}$$

$$\dim[\ker(\underline{M})] + \operatorname{ran}(\underline{M}) = p \quad \text{oder} \quad \nu + \gamma = p. \tag{9.127}$$

Überprüfen Sie dies an der Hermite-Normalform (9.125) unseres Beispiels und machen Sie sich dabei auch  $\ker(\underline{M}) = \ker(\underline{M}')$  klar.

Es folgen einige interessante Eigenschaften des Rangs einer  $m \times p$ -Matrix  $\underline{M}$  bzw. der durch sie repräsentierten linearen Abbildung  $\mathcal{V}^p \longrightarrow \mathcal{V}^m$ :

- (i)  $\operatorname{ran}(\underline{M})$  ist die Anzahl der linear unabhängigen Spalten von  $\underline{M}$ .
- (ii)  $\operatorname{ran}(\underline{M})$  ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von  $\underline{M}$ .
- (iii)  $\operatorname{ran}(\underline{M}) = \operatorname{ran}(\underline{M}^T)$
- (iv)  $ran(\underline{M}) \leq min(m, p)$
- (v) Quadratische  $m \times m$ -Matrizen  $\underline{M}$  besitzen genau dann eine Inverse  $\underline{M}^{-1}$  (sind regulär), wenn  $\operatorname{ran}(\underline{M}) = m$ .
- (vi) Der Rang einer Matrix bleibt ungeändert, wenn sie von links oder von rechts mit einer quadratischen, regulären Matrix multipliziert wird.
- (vii) Mit  $\operatorname{ran}(\underline{M}_1) = \gamma_1$  und  $\operatorname{ran}(\underline{M}_2) = \gamma_2$  gilt  $\operatorname{ran}(\underline{M}_1\underline{M}_2) \leqslant \min(\gamma_1,\gamma_2)$ .

Zusammenfassend halten wir fest: Ist  $\underline{M}$  eine  $m \times p$ -Matrix, so hat das lineare Gleichungssystem  $\underline{M} \, \underline{x} = \underline{d}$  genau dann eine Lösung, wenn  $\underline{d} \in \operatorname{im}(\underline{M})$ . Gibt es solch eine Lösung, so hat sie die Form  $\underline{x} = \underline{x}_p + \underline{x}_h$  mit irgend einem speziellen Lösungsvektor  $\underline{x}_p$  und einem allgemeinen Element  $\underline{x}_h \in \ker(\underline{M})$ . Sie ist genau dann eindeutig, wenn  $\ker(\underline{M}) = \{\underline{0}\}$ , d.h. wenn  $\operatorname{ran}(\underline{M}) = p$ .

### Zeilenoperationen

Die tatsächliche Berechnung der Lösungen des Gleichungssystems  $\underline{M}\,\underline{x}=\underline{d}$  mit der  $m\times p$ -Koeffizientenmatrix  $\underline{M}$  kann nach einer Erweiterung des im Abschnitt 2.5 beschriebenen Verfahrens erfolgen: Falls nötig, ergänzen wir zuerst  $\underline{M}$  und  $\underline{d}$  durch Nullzeilen zu  $\underline{M}'$  und  $\underline{d}'$  so, dass  $\underline{M}'$  mindestens so viele Zeilen wie Spalten besitzt. Dann werden an der erweiterten Matrix  $[\underline{M}',\underline{d}']$  systematisch elementare

 $<sup>^{10}\</sup>mathrm{Es}$  ist  $\nu=p$  genau dann, wenn  $\underline{M}$  eine Nullmatrix ist.

Zeilenoperationen mit dem Ziel durchgeführt, daraus die Form  $[\underline{N}\underline{M}',\underline{N}\underline{d}']$  herzustellen, worin  $\underline{N}\underline{M}'$  die modifizierte Hermite-Normalform von  $\underline{M}$  bedeutet. <sup>11</sup> Die vollständige Lösung ist dann aus  $\underline{N}\underline{M}'\underline{x} = \underline{N}\underline{d}'$ , wie im letzten Beispiel beschrieben, durch Inspektion abzulesen.

Wir bemerken: Soll unser Gleichungssystem eine Lösung besitzen, muss der Datenvektor  $\underline{d}$  eine Linearkombination der Spaltenvektoren  $\underline{m}_i$  von  $\underline{M}$  sein. Somit existiert eine Lösung (eindeutig oder nicht) genau dann, wenn  $\operatorname{ran}(\underline{M}) = \operatorname{ran}[\underline{M},\underline{d}]$ .

## Transformation auf Diagonalform

Nach dem Exkurs in die Welt der linearen Gleichungssysteme wenden wir uns wieder dem Themenkreis der Eigenwerte und Eigenvektoren von  $n \times n$ -Matrizen und deren Verwendung zu. Ein wichtiger Punkt für unsere Anwendungen ist z.B. die Diagonalisierbarkeit: Lässt sich eine Basis finden, in der die Systemmatrix die Diagonalform  $\underline{\Lambda} = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$  annimmt, so sind die zugehörigen Zustandsgleichungen entkoppelt und die Transitionsmatrix besitzt für  $\tau > 0$  die einfache Form

$$\mathbf{e}^{\Delta \tau} = \mathrm{diag}[\mathbf{e}^{\lambda_1 \tau}, \mathbf{e}^{\lambda_2 \tau}, \dots, \mathbf{e}^{\lambda_n \tau}]. \tag{9.128}$$

Angenommen, eine  $n \times n$ -Matrix  $\underline{A}$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$  (reell oder komplex, alle unterschiedlich oder teilweise wiederholt) und n zugehörige, linear unabhängige Eigenvektoren  $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ . Wenn wir damit die so genannte Modalmatrix

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n \end{bmatrix} \tag{9.129}$$

bilden, entsteht durch eine Ähnlichkeitstransformation aus  $\underline{A}$  die Diagonalform

$$\underline{P^{-1}\underline{A}\,\underline{P}} = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]. \tag{9.130}$$

Dies lässt sich mit Hilfe der Eigenwertgleichung (9.117) zeigen.

Die Spaltenvektoren von  $\underline{P}$  sind also die Eigenvektoren  $\underline{v}_i, i=1,\ldots,n$ , von  $\underline{A}$ . Aber auch die Zeilenvektoren von  $\underline{P}^{-1}$ , nennen wir sie  $\underline{w}_i^T, i=1,\ldots,n$ , haben spezielle Eigenschaften. Die  $\underline{w}_i$  heißen linke oder reziproke Eigenvektoren von  $\underline{A}$ , und sie erfüllen

$$(\lambda_i \underline{E} - \underline{A}^T) \underline{w}_i = \underline{0}$$
 bzw.  $\underline{w}_i^T (\lambda_i \underline{E} - \underline{A}) = \underline{0}$ . (9.131)

Aus  $\underline{P}^{-1}\underline{P}=\left[\underline{w}_i^T\underline{v}_j\right]=\underline{E}$ schließen wir überdies

$$\underline{w}_i \cdot \underline{v}_j = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für} & i = j, \\ 0 & \text{für} & i \neq j, \end{array} \right.$$

was sich anschaulich als Orthogonalität interpretieren lässt.

 $<sup>^{11}</sup>$ Wie im Abschnitt 2.5 beschrieben, lässt sich die Kombination aller ausgeführten elementaren Zeilenoperationen in der Multiplikation von links mit einer regulären Matrix  $\underline{N}$  zusammenfassen. Für quadratische, reguläre Matrizen  $\underline{M}$  ergibt sich als Hermite-Normalform von  $\underline{M}$  die Einsmatrix.

#### Jordan-Normalform

Es kann vorkommen, dass für die  $n \times n$ -Matrix  $\underline{A}$  bei mehrfachen Eigenwerten die Eigenvektoren linear abhängig sind und sich damit keine Modalmatrix  $\underline{P}$  finden lässt, die  $\underline{A}$  diagonalisiert. Wir müssen uns dann mit einer "fast diagonalen" Form, der Jordan-Normalform, zufrieden geben. In ihr treten die Eigenwerte zwar wieder in der Hauptdiagonalen auf, zusätzlich aber noch 1 über jedem wiederholten Eigenwert für jeden fehlenden Eigenvektor. Beispielsweise ist

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

die Jordan-Normalform einer Matrix mit dem charakteristischen Polynom  $P(\lambda) = (\lambda - 2)^3 (\lambda - 3)^2$  und mit nur je einem Eigenvektor  $\underline{v}_1$  für  $\lambda_1 = 2$  und  $\underline{v}_2$  für  $\lambda_2 = 3$ .

Im Zusammenhang mit dem aus SISO-Systemen abgeleiteten Modell für Phasen-Variablen (Abschnitt 9.1) trifft man häufig auf diese Situation, dass zu jedem unterschiedlichen Eigenwert nur je ein Eigenvektor gehört. Zum Beispiel ist der Systemmatrix (vgl. (9.19)<sub>1</sub>)

$$\underline{A} = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{array} \right]$$

mit dem charakteristischen Polynom  $P(\lambda)=(\lambda-2)^3$ , also dem Eigenwert  $\lambda_1=2$  mit der Vielfachheit  $n_1=3$ , der einzige Eigenvektor

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$$

zugeordnet. Zum Aufstellen der regulären Matrix  $\underline{P}$  brauchen wir aber drei unabhängige Vektoren. Wir setzen dann eine Kette linearer Gleichungssysteme für verallgemeinerte Eigenvektoren  $\underline{g}_{1,1},\underline{g}_{1,2},\ldots$ , an, in unserem Fall

$$(\underline{A} - \lambda_1 \underline{E})\underline{g}_{1,1} = \underline{v}_1, \quad (\underline{A} - \lambda_1 \underline{E})\underline{g}_{1,2} = \underline{g}_{1,1}.$$

Das erste dieser Systeme,

$$\left[\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 8 & -12 & 4 \end{array}\right] \underline{g}_{1,1} = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \end{array}\right] \ ,$$

liefert über elementare Zeilenoperationen

$$\left[\begin{array}{ccccc} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 8 & -12 & 4 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,5 & -1 \\ 0 & 1 & -0,5 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -0,25 & -1 \\ 0 & 1 & -0,5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

eine partikuläre Lösung

$$\underline{g}_{1,1} = \left[ \begin{array}{ccc} -1 & -1 & 0 \end{array} \right]^T.$$

Entsprechend erhalten wir aus dem zweiten System

$$\left[\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 8 & -12 & 4 \end{array}\right] \underline{g}_{1,2} = \left[\begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right] \;, \quad \underline{g}_{1,2} = \left[\begin{array}{c} 0,75 \\ 0,5 \\ 0 \end{array}\right] \;.$$

Wir bilden damit

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{g}_{1,1} & \underline{g}_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0.75 \\ 2 & -1 & 0.5 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad \underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

und erhalten in

$$\underline{P}^{-1}\underline{A}\,\underline{P} = \left[ \begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

die gesuchte Jordan-Normalform.

### Reelle symmetrische Matrizen

Ein weiterer, in den Anwendungen häufig auftretender Spezialfall verdient eine besondere Erwähnung: Reelle  $n \times n$ -Matrizen, für die  $\underline{A} = \underline{A}^T$  gilt, die also symmetrisch bezüglich Spiegelung an ihrer Hauptdiagonale sind. Wir können dann notieren:

- Alle Eigenwerte λ<sub>i</sub> sind reell.
- Jedem Eigenwert λ<sub>i</sub> mit der Vielfachheit n<sub>i</sub> sind n<sub>i</sub> linear unabhängige Eigenvektoren zugeordnet.
- (iii) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal.
- (iv) Auch wenn Eigenwerte mehrfach vorkommen, gibt es immer eine orthogonale Matrix  $\underline{Q}$  (d.h.  $\underline{Q}^T\underline{Q} = \underline{E}$ ), so dass  $\underline{Q}^{-1}\underline{A}\,\underline{Q} = \mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n]$ .

Wegen (ii) und (iii) können wir für jeden Eigenvektor-Raum der Dimension  $n_i$  eine orthonormale Basis konstruieren<sup>12</sup> und damit auch für den ganzen Raum. Die so gebildete Modalmatrix  $\underline{Q}$  der Eigenvektoren hat also orthonormale Spalten und besitzt deshalb die Eigenschaft  $\underline{Q}^T = \underline{Q}^{-1}$ . Dies begründet (iv).

### Eigenwerte und Eigenvektoren der Transitionsmatrix

Von unserem gegenwärtigen Standpunkt aus ist die Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren vor allem in ihren Anwendungen auf die Systemmatrix  $\underline{A}$  bzw. die Transitionsmatrix  $\underline{\Phi}(\tau) = e^{\underline{A}\tau} \varepsilon(\tau)$  interessant.

Wir betrachten die Matrix-Potenzreihe (9.79),

$$e^{\underline{A}\tau} = \underline{E} + \underline{A}\tau + \underline{A}^2 \frac{\tau^2}{2!} + \underline{A}^3 \frac{\tau^3}{3!} + \cdots . \qquad (9.132)$$

Hat die  $n \times n$ -Matrix  $\underline{A}$  die maximale Anzahl n linear unabhängiger Eigenvektoren, so gilt bekanntlich  $\underline{A} = \underline{P} \underline{\Lambda} \underline{P}^{-1}$ , wobei  $\underline{P}$  die mit den Eigenvektoren

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>z.B. mit dem bekannten Orthonormalisierungsverfahren nach Erhard Schmidt

gebildete Modalmatrix und  $\underline{\Lambda}$  die Diagonalmatrix der (entsprechend ihrer Vielfachheit wiederholten) n Eigenwerte bedeutet. Einsetzen in die rechte Seite des Ausdrucks (9.132),

$$e^{\underline{A}\tau} = \underline{E} + (\underline{P}\underline{\Lambda}\underline{P}^{-1})\tau + (\underline{P}\underline{\Lambda}\underline{P}^{-1})^2 \frac{\tau^2}{2!} + (\underline{P}\underline{\Lambda}\underline{P}^{-1})^3 \frac{\tau^3}{3!} + \cdots,$$

liefert wegen  $\underline{E} = \underline{P} \underline{E} \underline{P}^{-1}$ ,  $(\underline{P} \underline{\Lambda} \underline{P}^{-1})^2 = \underline{P} \underline{\Lambda} \underline{P}^{-1} \underline{P} \underline{\Lambda} \underline{P}^{-1} = \underline{P} \underline{\Lambda}^2 \underline{P}^{-1}$ , all mein  $(\underline{P} \underline{\Lambda} \underline{P}^{-1})^n = \underline{P} \underline{\Lambda}^n \underline{P}^{-1}$ , die wichtige Relation

$$e^{\underline{A}\tau} = \underline{P} e^{\underline{\Lambda}\tau} \underline{P}^{-1}.$$
 (9.133)

Da sich

$$e^{\underline{\Lambda}\tau} = \operatorname{diag}[e^{\lambda_1\tau}, e^{\lambda_2\tau}, \dots, e^{\lambda_n\tau}] \tag{9.134}$$

relativ leicht berechnen lässt, stellt (9.133) einen nützlichen Ausdruck zur expliziten Bestimmung von  $e^{A\tau}$  für variable  $\tau$  dar.

Wir können noch einen Schritt weiter gehen. Die Komposition von  $\underline{P}$  durch die Eigenvektoren  $\underline{v}_i$  und von  $\underline{P}^{-1}$  durch die in (9.131) definierten reziproken Eigenvektoren  $\underline{w}_i$  ergibt

$$\mathbf{e}^{\underline{A}\tau} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1\tau} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{\lambda_2\tau} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{e}^{\lambda_n\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \underline{w}_2^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{\lambda_1\tau} \underline{w}_1^T \\ \mathbf{e}^{\lambda_2\tau} \underline{w}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}^{\lambda_n\tau} \underline{w}_n^T \end{bmatrix} .$$

Dies wird meist in der Form einer "dyadischen Summe"

$$e^{\underline{A}\tau} = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i \tau} \underline{v}_i \underline{w}_i^T$$
(9.135)

geschrieben und liefert einen expliziten Ausdruck für  $e^{\underline{A}\tau}$ . Beachten Sie: Jeder der Terme  $\underline{v}_i\underline{w}_i^T$  ist eine  $n\times n$ -Matrix!

#### Modaldarstellung

Gl.(9.135) zeigt die explizite Abhängigkeit der Transitionsmatrix von den Eigenwerten  $\lambda_i$ , den Eigenvektoren  $\underline{v}_i$  und den reziproken Eigenvektoren  $\underline{w}_i$  der Systemmatrix  $\underline{A}$  (kurz: des Systems). In Verbindung mit den Lösungen (9.89) der Zustandsgleichungen lässt sich diese explizite Abhängigkeit auch auf die Darstellung (9.88) der Ausgangsgröße übertragen:

$$\underline{y}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} [\underline{C} \, \underline{v}_i] [\underline{w}_i^T \underline{x}(\tau_0^-)] \, e^{\lambda_i (\tau - \tau_0)} 
+ \sum_{i=1}^{n} [\underline{C} \, \underline{v}_i] [\underline{w}_i^T \underline{B}] \int_{\tau_0^-}^{\tau} e^{\lambda_i (\tau - \tau')} \underline{u}(\tau') d\tau' + \underline{D} \, \underline{u}(\tau),$$
(9.136)

gültig für  $\tau \geqslant \tau_0$ . Diese Form heißt Modaldarstellung der Systemantwort, weil sie angibt, auf welche Weise die einzelnen, jeweils durch einen Eigenwert repräsentierten Moden in der Systemantwort erscheinen.

# Berechnen der Transitionsmatrix aus der Jordan-Form

Es ist noch der Fall zu erledigen, in dem die  $n \times n$ -Systemmatrix  $\underline{A}$  weniger als die maximale Anzahl n linear unabhängiger Eigenvektoren aufweist. Zwar kann  $\underline{A}$  dann nicht auf die Diagonalform  $\underline{A}$ , wohl aber auf die Jordan-Normalform  $\underline{J}$  gebracht und entsprechend als  $\underline{A} = \underline{P} \, \underline{J} \, \underline{P}^{-1}$  geschrieben werden. Die Spalten von  $\underline{P}$  werden durch die Eigenvektoren und die verallgemeinerten Eigenvektoren gebildet. In  $\underline{J}$  stehen entlang der Hauptdiagonalen einzelne Blöcke (die "Jordan-Kästchen"), z.B.

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

für einen Eigenwert  $\lambda_i$  der Vielfachheit  $n_i = 3$ , zu dem nur ein Eigenvektor gehört. Auch hier gilt entsprechend Gl.(9.133) die Relation

$$e^{\underline{A}\tau} = \underline{P} e^{\underline{J}\tau} \underline{P}^{-1}, \tag{9.137}$$

wir müssen uns also  $e^{J\tau}$  ansehen.

Mit  $\underline{J}$  nimmt auch  $\mathrm{e}^{\underline{J}\tau}$  eine entsprechende Block-Diagonalform an. Für die dabei auftretenden Standard-Blöcke finden wir

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \tau\right) = \begin{bmatrix} e^{\lambda \tau} & \tau e^{\lambda \tau} \\ 0 & e^{\lambda \tau} \end{bmatrix} ,$$

$$\exp\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tau\right) = \begin{bmatrix} e^{\lambda \tau} & \tau e^{\lambda \tau} & (\tau^2/2!)e^{\lambda \tau} \\ 0 & e^{\lambda \tau} & \tau e^{\lambda \tau} \\ 0 & 0 & e^{\lambda \tau} \end{bmatrix} ,$$

usw. In Verbindung mit Gl.(9.137) kann damit  $e^{\underline{A}\tau}$  für den allgemeinen Fall berechnet werden.

### Der Satz von Cayley-Hamilton

Bei der Besprechung von Manipulationen mit Matrizen darf ein berühmter Satz nicht unerwähnt bleiben: Das Cayley-Hamilton-Theorem besagt, dass jede quadratische Matrix ihrer eigenen charakteristischen Gleichung genügt. Besitzt also eine  $n \times n$ -Matrix  $\underline{A}$  das charakteristische Polynom

$$P(\lambda) = \det(\lambda \underline{E} - \underline{A}) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \tag{9.138}$$

so gilt

$$\underline{A}^{n} + a_{n-1}\underline{A}^{n-1} + \dots + a_{1}\underline{A} + a_{0}\underline{E} = \underline{0}. \tag{9.139}$$

Das Cayley-Hamilton-Theorem hat viele Anwendungen. Unter ihnen findet sich z.B. die Möglichkeit, unendliche Matrix-Potenzreihen wie etwa (9.132) auf eine Summe von nur n Termen zu reduzieren, weil sich mit  $\mathrm{Gl.}(9.139)$  jede höhere

als die (n-1)-te Potenz von  $\underline{A}$  auf eine Linearkombination der n Matrizen  $\underline{E}, \underline{A}, \dots, \underline{A}^{n-1}$  zurückführen lässt. Wir können also sofort

$$e^{\underline{A}\tau} = \alpha_0(\tau)\underline{E} + \alpha_1(\tau)\underline{A} + \alpha_2(\tau)\underline{A}^2 + \dots + \alpha_{n-1}(\tau)\underline{A}^{n-1}$$
(9.140)

hinschreiben. Wie aber sind die Funktionen  $\alpha_k(\tau)$  zu ermitteln?

Den Schlüssel zur Lösung dieses Problems liefert die Beobachtung, dass mit Gl.(9.140) auch

$$e^{\lambda_i \tau} = \alpha_0(\tau) + \alpha_1(\tau)\lambda_i + \alpha_2(\tau)\lambda_i^2 + \dots + \alpha_{n-1}(\tau)\lambda_i^{n-1}$$
(9.141)

besteht. Sie können nämlich in der Potenzreihe für  $e^{\lambda_i \tau}$  höhere als die (n-1)-ten Potenzen von  $\lambda_i$  in gleicher Weise mit der charakteristischen Gleichung  $P(\lambda_i) = 0$  eliminieren und bekommen deshalb die gleichen Koeffizienten  $\alpha_k(\tau)$ . Sind die  $\lambda_i$  alle unterschiedlich, brauchen wir nur (9.141) für jeden dieser Eigenwerte anzuschreiben und das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(\tau) \\ \alpha_1(\tau) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \tau} \\ e^{\lambda_2 \tau} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n \tau} \end{bmatrix}$$

zu lösen. Die spezielle Koeffizientenmatrix heißt übrigens Vandermonde-Matrix.

Hat ein Eigenwert  $\lambda_i$  eine Vielfachheit  $n_i>1$ , ist grundsätzlich das gleiche Verfahren anzuwenden. Man benutzt jedoch zusätzlich Ableitungen der Zeilen nach  $\lambda_i$  bis zur Ordnung  $n_i-1$ , um wieder auf ein System von n unabhängigen Gleichungen zu kommen. Besitzt z.B. der Eigenwert  $\lambda_1$  die Vielfachheit  $n_1=3$  und sind alle anderen  $\lambda_i$  einfach, dann ist

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda_1 & \cdots & (n-1)\lambda_1^{n-2} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & (n-1)(n-2)\lambda_1^{n-3} \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \cdots & \lambda_4^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(\tau) \\ \alpha_1(\tau) \\ \alpha_2(\tau) \\ \alpha_3(\tau) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \tau} \\ \tau e^{\lambda_1 \tau} \\ \tau^2 e^{\lambda_1 \tau} \\ e^{\lambda_4 \tau} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n \tau} \end{bmatrix}$$

zu schreiben. Beachten Sie, dass die ursprünglichen Gleichungen und daher auch die rechten Seiten nach  $\lambda_1$  abzuleiten sind.

Die Berechnung von  $e^{\underline{A}\tau}$  für variable  $\tau$  mit Hilfe des Cayley-Hamilton-Theorems ist recht bequem anzuwenden und auch für Handrechnungen mit einem Taschenrechner gut brauchbar.

## 9.6 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

In der modernen Systemtheorie sind die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit von Systemen wichtige Themen. Dies gilt in gleichem Maß auch für die Anwendungen. Ich kann hier nicht auf die vielen damit verknüpften Details eingehen, möchte in diesem letzten Abschnitt aber wenigstens erläutern, worum es grundsätzlich geht.

Angenommen, wir haben ein Zustandsmodell

$$\underline{x}'(\tau) = \underline{A}\,\underline{x}(\tau) + \underline{B}\,\underline{u}(\tau),\tag{9.142}$$

$$y(\tau) = \underline{C}\,\underline{x}(\tau) + \underline{D}\,\underline{u}(\tau) \tag{9.143}$$

mit  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  vorliegen. Die *Steuerbarkeit* des damit beschriebenen Systems betrifft die Frage: Wenn wir vom Nullzustand aus starten, in welche Bereiche des Zustandsraums können wir dann mit geeigneten Eingängen (Steuerungen)  $\underline{u}(\tau)$  mit  $\tau \in (0, \tau_1]$  während eines endlichen Zeitintervalls gelangen? Zustände, die sich erreichen lassen, heißen ansteuerbare Zustände. Ist jeder Zustand  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  erreichbar, so nennen wir das System vollständig steuerbar.

Die Beobachtbarkeit eines Systems bezieht sich auf seine Nulleingangsantwort: Gibt es, abgesehen vom Nullzustand, irgend welche  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ , die als Anfangszustand eine identisch verschwindende Nulleingangsantwort liefern? Solche Zustände heißen nicht beobachtbar. Sie tragen nie etwas zur Systemantwort bei und können deshalb von außen nicht identifiziert werden. Wenn es diese Zustände nicht gibt, heißt das System vollständig beobachtbar.

#### Steuerbarkeit

Beginnen wir mit einem System, das nur eine einzige (skalare) Eingangsgröße  $u(\tau)$  besitzt (SI-System). Dann reduziert sich die Eingangsmatrix  $\underline{B}$  auf einen n-dimensionalen Spaltenvektor  $\underline{b}$ , und die Nullzustandsantwort lässt sich für  $\tau \in (0,\tau_1]$  im Zustandsraum als

$$\underline{x}_{0Z}(\tau) = \int_0^{\tau} e^{\underline{A}(\tau - \tau')} \underline{b} \, u(\tau') d\tau' = \int_0^{\tau} e^{\underline{A}\tau'} \underline{b} \, u(\tau - \tau') d\tau'$$
 (9.144)

angeben. Daraus folgt unter Verwendung der mit Hilfe des Cayley-Hamilton-Theorems gewonnenen Darstellung (9.140) der Transitionsmatrix  $e^{A\tau}$ 

$$\underline{x}_{0Z}(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(\tau) \underline{A}^k \underline{b} , \qquad \beta_k(\tau) = \int_0^{\tau} \alpha_k(\tau') u(\tau - \tau') d\tau', \qquad (9.145)$$

d.h.  $\underline{x}_{0Z}(\tau)$  ist eine Linearkombination der n Vektoren  $\underline{A}^k\underline{b}, k=0,1,\ldots,n-1$ . Nun müssen aber alle diese Linearkombinationen im Bildbereich der durch die Matrix

$$\underline{M}_{s} = \left[\underline{b} \quad \underline{A}\,\underline{b} \quad \cdots \quad \underline{A}^{n-1}\underline{b}\right] \tag{9.146}$$

repräsentierten linearen Abbildung  $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  liegen, und  $Gl.(9.145)_1$  besagt

$$\underline{x}_{0\mathrm{Z}}(\tau) \in \mathrm{im}(\underline{M}_{\mathrm{s}}).$$
 (9.147)

Tatsächlich ist im $(\underline{M}_s)$ , ein (möglicherweise unechter) Unter-Vektorraum von  $\mathbb{R}^n$ , der ansteuerbare Unterraum unseres Systems: Liegt ein Zustand  $\underline{x}$  nicht in im $(\underline{M}_s)$ , so ist er durch die Linearkombination (9.145) nicht erreichbar, wie immer auch  $u(\tau)$  gewählt wird<sup>13</sup>. Umgekehrt ergibt sich der nicht-ansteuerbare Unterraum unseres Systems, ebenfalls ein Unter-Vektorraum von  $\mathbb{R}^n$ , als der

 $<sup>^{13}</sup>$ Eine Basis von im $(\underline{M}_s)$  lässt sich durch Ausführen von Zeilenoperationen an  $\underline{M}_s^T$  gewinnen. Die Basisvektoren sind dann die nicht verschwindenden Zeilen der resultierenden Hermite-Normalform von  $\underline{M}_s^T$ .

Kern  $\ker(\underline{M}_s^T)$  der transponierten Abbildung. Offensichtlich ist das System dann vollständig steuerbar, wenn  $\underline{M}_s$  den maximalen Rang n aufweist. Für  $\operatorname{ran}(\underline{M}_s) = \gamma_s < n$  ist das System n-ter Ordnung auf ein System der Ordnung  $\gamma_s$  reduzierbar (hinreichende Bedingung).

Die bisherigen Überlegungen lassen sich ganz leicht auf Systeme mit p > 1 Eingangsgrößen, zusammengefasst in  $\underline{u}(\tau)$ ,  $\tau \in (0, \tau_1]$ , verallgemeinern (MI-Systeme). Wir komponieren dann die  $n \times p$ -Eingangsmatrix durch ihre Spalten,

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 & \underline{b}_2 & \cdots & \underline{b}_p \end{bmatrix},$$

und schließen über die Darstellung der Transitionsmatrix mit Hilfe des Cayley-Hamilton-Theorems

$$\underline{x}_{0Z}(\tau) \in \operatorname{span}(\underline{b}_1, \underline{A}\,\underline{b}_1, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_p, \underline{A}\,\underline{b}_p, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{b}_p)$$

oder, äquivalent,

$$\underline{x}_{0Z}(\tau) \in \operatorname{im}(\underline{M}_s)$$
 (9.148)

mit der  $n \times np$ -Steuerbarkeitsmatrix

$$\underline{M}_{s} = [\underline{B} \quad \underline{A}\underline{B} \quad \cdots \quad \underline{A}^{n-1}\underline{B}]. \tag{9.149}$$

Die Bedingung für die vollständige Steuerbarkeit des Systems ist wieder  $\operatorname{ran}(\underline{M}_s) = n$ .

Übrigens lässt sich zeigen, dass, wenn  $\operatorname{ran}(\underline{B}) = p$ , was üblicherweise der Fall ist, die Einträge nach  $\underline{A}^{n-p}\underline{B}$  in (9.149) bei der Rangbestimmung von  $\underline{M}_s$  keine Rolle spielen. Die  $n \times np$ -Matrix  $\underline{M}_s$  kann also in der Regel durch die  $n \times [(n-p+1)p]$ -Matrix

$$\underline{M}_{s} = [\underline{B} \quad \underline{A}\underline{B} \quad \cdots \quad \underline{A}^{n-p}\underline{B}] \tag{9.150}$$

ersetzt werden.

### Beobachtbarkeit

Wir untersuchen nun die Bedingungen für die zur Steuerbarkeit in gewissem Sinn duale Eigenschaft der Zustands-Beobachtbarkeit und gehen dabei von der Nulleingangsantwort

$$\underline{y}_{0E}(\tau) = \underline{C} e^{\underline{A}\tau} \underline{x}(0), \quad \tau \geqslant 0,$$
 (9.151)

aus. Gibt es Zustände  $\underline{x}_{\rm nb} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{x}_{\rm nb} \neq \underline{0}$ , die – als Anfangszustände genommen – ein immer verschwindendes  $\underline{y}_{\rm 0E}(\tau)$  liefern, für die also

$$\underline{y}_{0\mathrm{E}}(\tau) = \underline{C} \, \mathrm{e}^{\underline{A}\tau} \underline{x}_{\mathrm{nb}} = \underline{0} \quad \text{für alle } \tau \geqslant 0 \tag{9.152}$$

gilt? Solch ein nicht beobachtbarer Zustand  $\underline{x}_{nb}$  muss notwendig zum Kern der durch  $\underline{C}\,\mathrm{e}^{\underline{A}\tau}$  repräsentierten linearen Abbildung gehören.

Einsetzen der mit Hilfe des Cayley-Hamilton-Theorems gewonnenen Darstellung (9.140) der Transitionsmatrix  $e^{\Delta \tau}$  in (9.152) liefert

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) \underline{C} \underline{A}^k \underline{x}_{nb} = \underline{0} \quad \text{für alle } \tau \geqslant 0$$
 (9.153)

und, weil die Funktionen  $\alpha_k(\tau)$  linear unabhängig sind, die n Bedingungen

$$\underline{C} \underline{A}^{k} \underline{x}_{nb} = \underline{0}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1,$$
 (9.154)

die wir auch in der Form eines linearen, homogenen Gleichungssystems

$$\underline{M}_{\rm b}\underline{x}_{\rm nb} = \underline{0} \tag{9.155}$$

mit der  $qn \times n$ -Beobachtbarkeitsmatrix

$$\underline{M}_{b} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C}\underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$
(9.156)

schreiben können.

Hat  $\underline{M}_{\rm b}$  den maximalen Rang n, so besitzt (9.155) nur die triviale Lösung: Das System ist vollständig beobachtbar. Andernfalls gibt es nicht beobachtbare Zustände, die zusammen den Kern  $\ker(\underline{M}_{\rm b})$  bilden, einen Unter-Vektorraum unseres Zustandsraums  $\mathbb{R}^n$ . Tatsächlich spielen auch hier bei der Rangbestimmung die in (9.156) unterhalb von  $\underline{C}\,\underline{A}^{n-q}$  stehenden Einträge keine Rolle, wenn  $\operatorname{ran}(\underline{C}) = q$  ist. Wir können dann an Stelle der  $qn \times n$ -Matrix (9.156) genauso gut die  $[(n-q+1)q] \times n$ -Matrix

$$\underline{M}_{b} = \begin{bmatrix} \underline{C} \\ \underline{C}\underline{A} \\ \vdots \\ \underline{C}\underline{A}^{n-q} \end{bmatrix}$$
(9.157)

benutzen.

Ein kleines Beispiel: Für das SISO-System

$$\underline{x}' = \left[ \begin{array}{ccc} -2,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & -2,5 & -0,5 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \underline{x} + \left[ \begin{array}{c} 0,25 \\ -0,25 \\ 1 \end{array} \right] u \; ,$$
 
$$y = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \underline{x}$$

berechnen wir die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\underline{M}_{\mathbf{b}} = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{array} \right] \; .$$

Ihr Rang ist 2, weil  $\underline{M}_{\rm b}$  offensichtlich nur zwei linear unabhängige Spalten hat. Ihr Kern, bestimmt z.B. durch Zeilenoperationen, ist

$$\ker(\underline{M}_{\mathrm{b}}) = \mathrm{span} \left( \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \right) = \mathrm{span} \left( \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \right) \ ,$$

d.h. die Zustandsgröße  $x_1$  ist nicht beobachtbar.

Eine wichtige Bemerkung: Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sind keine intrinsischen, dem System selbst zukommenden Eigenschaften, weil sie von der Wahl der Zustandsvariablen abhängen. Ein Zustandsmodell kann in einem Koordinatensystem vollständig steuerbar sein und nicht beobachtbare Zustände besitzen, in anderen Zustandskoordinaten aber nicht ansteuerbare Zustände haben, jedoch vollständig beobachtbar sein.

# 9.7 Zusammenfassung

Lineare Systeme, insbesondere solche mit mehreren Eingangs- und Ausgangsgrößen, lassen sich oft mit Vorteil durch ein **Zustandsmodell** beschreiben. Die individuellen **Zustandsvariablen** können, müssen aber nicht eine physikalische Bedeutung haben. In jedem Fall können wir für lineare, zeitinvariante Systeme ohne Totzeiten immer mindestens ein Zustandsmodell in der Standardform mit vier konstanten **Zustandsmatrizen** angeben.

Die allgemeine Lösung der Zustandsgleichungen und die daraus resultierende Systemantwort ist in einer zumindest formal einfachen und sehr übersichtlichen Form mit Hilfe der Transitionsmatrix, die für LTI-Systeme ohne Totzeiten durch eine Matrix-Exponentialfunktion ausgedrückt wird, angebbar. Wir treffen dabei auf die Verallgemeinerungen bewährter, ein System vollständig und anschaulich charakterisierender Funktionen, nämlich die Stoßantwort und die Sprungantwort, die im MIMO-Fall als zeitabhängige Matrizen erscheinen.

Für die effiziente, rechnerunterstützte Behandlung von Systemen im Zustandsraum brauchen wir einige Ergebnisse der linearen Algebra, also der Theorie der Vektorräume und der damit verknüpften linearen Abbildungen. Wir gewinnen damit die Möglichkeit, scheinbar unterschiedliche Zustandsmodelle durch Koordinaten-Transformationen ineinander überzuführen, diverse Redundanzen eines Modell aufzudecken und durch die Wahl geeigneter Koordinaten besonders einfache Beschreibungen zu finden. Auch Fragen der Steuerbarkeit von Systemen durch die Eingangsgrößen und die Beobachtbarkeit der inneren Systemzustände lassen sich mit diesen Methoden präzise formulieren und beantworten.