Theoretische Informatik Klausur 29-01-25

Aufgabe 1

(a) [10 Punkte]

Betrachten Sie das folgende Problem: EXISTIERTDOPPEL:
Instanz: Ein Programm π (dessen Input und Output ein Integer ist).
Frage: Gibt es einen Input n, sodass π auf n mit dem return-Wert n * 2 terminiert?

Zeigen Sie die Unentscheidbarkeit von EXISTIERTDOPPEL mittels Reduktion vom HALTEPROBLEM und beweisen Sie die Richtung des von Ihnen vorgeschlagenen Korrektheitsbeweises: Wenn R(x) eine positive Instanz von EXISTIERTDOPPEL ist, dann ist x eine positive Instanz vom HALTEPROBLEM.

(b) [2 Punkte]

Ist folgende Aussage korrekt?: Die Reduktion vom HALTEPROBLEM auf EXISTIERTDOPPEL beweist die Nicht-Semi-Entscheidbarkeit von co-EXISTIERTDOPPEL. Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass das HALTEPROBLEM unentscheidbar und semi-entscheidbar ist.
Begründen Sie Ihre Antwort (maximal 3 Sätze).

Aufgabe 2

Betrachten Sie folgende Sprachen:
A = { ww^r | w ϵ {a,b}* } w^r beschreibt das Spiegelbild von w

B = { a^i b^k a^j | i,k,j >= 0 }

(a) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger, dass A kontextfrei ist, indem Sie einen Homomorphismus A = h(Dn ∩ R) angeben. [4 Punkte]

(b) Ist B ebenfalls kontextfrei? Begründen Sie Ihre Antwort. [3 Punkte]

(c) Geben Sie A ∩ B an. [2 Punkte]

(d) Ist A ∩ B kontextfrei? Wenn ja, geben Sie eine Grammatik an, wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort. [3 Punkte]

Aufgabe 3

Begründen Sie, ob folgende Aussagen korrekt sind. Gegebenenfalls benötigt die Antwort konkrete Rechnungen. Punkte gibt es nur für ausreichend begründete Antworten.
[Je 3 Punkte]

(a) Aus der Church-Turing-These folgt: Jede TM-berechenbare Funktion der Form $\mathrm{N}^{\mathrm{k}} \rightarrow \mathrm{N}$ ist primitiv rekursiv.

(b) Für das 2-RM-Programm
(0, {(0,t1,1,2), (1,A2,3), (2,S1,0)}
ist f(2) = 0.

(c) Für f(x,y) = 2xy gilt:

$$\mu o f(2) = 0$$
$$\mu f(2,1) = 1$$
μf(3,1) hingegen bleibt undefiniert.

(d) Aus dem Satz von Rice folgt: Es ist unentscheidbar, ob eine TM auf einem Wort ϵ {0,1}* hält.

Aufgabe 4

(a) Sie kennen bereits das 3-Färbbarkeitsproblem (3-COL).
Betrachten Sie nun die eingeschränkte Version von 3-COL, die sich nur auf Graphen G=(V,E) mit |V| gerade, also Graphen mit gerade Anzahl an Knoten bezieht.
3-COL-G.
Welche der folgenden Vorgehen stellen eine korrekte Reduktion von 3-COL nach 3-COL-G dar?
[Korrekte Antwort 2 Punkte, Keine Antwort 0 Punkte, Falsche Antwort -2 Punkte]

1) Zu jedem Graphen G=(V,E) konstruieren wir einen Graphen G‘ mit
V‘ = V ∪ {v‘} und E‘ = E ∪ [v,v‘] wobei v ein beliebiger Knoten aus V ist.

2) Zu jedem Graphen G=(V,E) konstruieren wir einen Graphen G‘ mit
V‘ = V ∪ {v‘ | v ϵ V } und E‘ = E ∪ {[v,v‘] | v ϵ V}, d.h. mit jedem Knoten wird ein neuer Knoten verbunden.

3) Wenn G=(V,E) und |V| ungerade konstruieren wir einen Graphen G‘ mit
V‘ = V ∪ {v‘} und E‘ = E ∪ {[v,v‘] | v ϵ V}, Wenn |V| gerade, gilt G‘ = G.

4) Wenn G=(V,E) und |V| ungerade konstruieren wir einen Graphen G‘ mit
V‘ = V ∪ {v‘} und E‘ = E ∪ [v,v‘]. Wenn |V| gerade, gilt G‘ = G.

(b) Angenommen wenigstens eine der Reduktionen aus (a) stimmt. Was kann man dann über 3-COL-G sagen, mit dem Wissen, dass 3-COL NP-Vollständig ist? Antworten Sie in 2 Sätzen. [4 Punkte]

Aufgabe 5

(a) Beweisen Sie mithilfe von Annotierungsregeln, dass das folgende Programm partiell korrekt ist und begründen sie die Gültigkeit der auftretenden Implikationen. [8 Punkte]

[Programm was ungefähr so:]
Invariante war gegeben.

{ 2x = y }

y := 0;

while x ≠ y do

x := x + 2

y := y-1

od

{$\exists x' (x = x'/2)$

(b) Berechnen sie sp(wlp(x:=2x, x=y)), d.h. berechnen Sie erst wlp von x := 2x und G = (x=y) und dann G‘ = sp davon.
Intuitiv würde man annehmen, dass G = G‘.
Begründen Sie, worin sich G und G‘ unterscheiden.
[4 Punkte]