21. Man überprüfe, ob das Vektorfeld $\vec{f} = (yz, (x-2y)z, (x-y)y)$ eine Stammfunktion besitzt. Wenn ja, gebe man alle Stammfunktionen an.

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ (x-2y)z \\ (x-y)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \rightarrow z = z$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \rightarrow y = y$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y} \rightarrow x - 2y = x - 2y$$

$$F_x = f_1 \rightarrow F = \int yz\,dx = xyz + c(y,z)$$

$$F_y = f_2 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}(xyz + c(y,z)) = (x-2y)z \rightarrow xz + \frac{\partial}{\partial y}(c(y,z)) = xz - 2yz \rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(c(y,z)) = -2yz$$

um auf $\frac{\partial c}{\partial y} = -2yz$ zu kommen, müsste $c(y,z)$ so aussehen: $c(y,z) = -y^2 z + d(z)$

nun haben wir bis jetzt folgende Stammfunktion: $F = xyz - y^2 z + d(z)$

diese wird nun noch mal eingesetzt:

$$F_z = f_3 \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}(xyz - y^2 z + d(z)) = (x-y)y \rightarrow xy + y^2 + \frac{\partial d}{\partial z}(d(z)) = xy - y^2 \rightarrow \frac{\partial d}{\partial z}(d(z)) = 0$$

um auf $\frac{\partial d}{\partial z} = 0$ zu kommen, müsste $d(z)$ so aussehen: $d(z) = c$

also wäre die Stammfunktion: $F = xyz - y^2 z + c$ mit $c \in R$