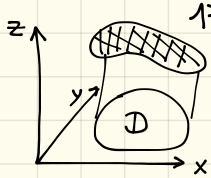
17/12/14

$z = f(x,y) \qquad f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^2}{D} \to \mathbb{R}$



z.B. $f(x,y) = 2x + 3y + 4$ ... Ebene

$= \dfrac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{e^{x+y}}$

- **Quadratische Formen**

sei $A = (a_{ij})$ symmetr. $n \times n$ Matrix (d.h. $A^T = A$)

Bilden $q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$q(x_1,\dots,x_n) = q(\vec{x}) = \underset{1\times n}{\vec{x}^T} \cdot \underset{n \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{\vec{x}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$$

heißt quadr. Form

Polynomfkt von Grad 2

$n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$q(x,y) = \vec{x} \cdot A \cdot x = (x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y) \cdot \begin{pmatrix} ax+by \\ bx+cy \end{pmatrix}$$
$$= ax^2 + bxy + bxy + cy^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

z.B. $q(x,y) = 4x^2 - 10xy + 9y^2 = (x,y)\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Frage: Wann nimmt $q(\vec{x})$ (für $\vec{x} \neq \vec{0}$) nur positive oder nur negative Werte an?

Def.: Eine quadr. Form $q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}$ (bzw. die zugehörige Matrix A) heißt

(i) positiv definit, falls $q(\vec{x}) > 0$, $\forall \vec{x} \neq \vec{0}$

(ii) negativ definit, falls $q(\vec{x}) < 0$, $\forall \vec{x} \neq \vec{0}$

(iii) positiv semidefinit, falls $q(\vec{x}) \geq 0$, $\forall \vec{x}$

(iv) negativ semidefinit, falls $q(\vec{x}) \leq 0$, $\forall \vec{x}$

(v) indefinit, sonst

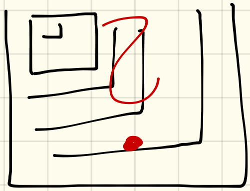
z.B. $q(x,y) = 4x^2 - 10xy - 9y^2 = \underbrace{4x^2 - 10xy + \frac{25}{4}y^2}_{(2x-\frac{5}{2}y)^2} - \frac{25}{4}y^2 + 9y^2$

$$(2x - \tfrac{5}{2}y)^2 + \tfrac{11}{4}y^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ q ist positiv definit $\qquad (2x - \frac{5}{2}y)^2 + \frac{11}{4}y^2 = 0 \Leftrightarrow x=0,\ y=0$

Satz (Hauptminorenkriterium): Eine quadr. Form $q(\vec{x}) = \vec{x}^T \cdot A \cdot \vec{x}$ (bzw. die die zugehörige Matrix A) ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind. Die Form q ist genau dann negativ definit, wenn $-q$ (bzw. $-A$) positiv definit ist.

$$\underbrace{a_{11} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, \quad |A| > 0}_{\text{Hauptminoren}}$$



z.B. $n=2 \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ positiv definit $\Longleftrightarrow$ $a > 0$

$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 > 0$

insbesondere $q = 4x^2 - 10xy + 9y^2$

$\longrightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$: $\left.\begin{array}{l} a = 4 > 0 \\ \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 25 = 11 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ pos. definit

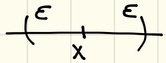
Determinante

② Grenzwert und Stetigkeit

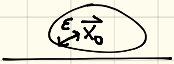
Abstand im $\mathbb{R}^n$: $\quad d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$

euklidischer Abstand

ε-Umgebung $\quad U_\varepsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\} \qquad \varepsilon > 0$

$n=1$: 

offenes Intervall $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$

$n=2$: 

offener Kreis um $\vec{x}_0$ mit Radius ε

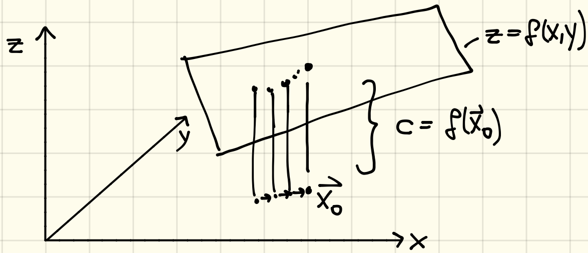
$n=3$: offene Kugel um $\vec{x}_0$ mit Radius ε

Sei $f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{D} \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in D$

Was bedeutet $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = c$?

Def.: f besitzt an der Stelle $\vec{x}_0$ den Grenzwert c, wenn zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ existiert, sodass $\underbrace{\|\vec{x}-\vec{x}_0\|}_{\text{zwei Striche wegen Vektor}} < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x)-c|}_{\text{1 Strich, weil Zahl}} < \varepsilon \quad \forall x\in D, \vec{x}\neq\vec{x}_0$

f heißt stetig in $\vec{x}_0$, falls $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$ bzw. stetig in D, falls f in jedem Punkt von D stetig ist.



Es gilt

- durch Anwendung der Grundrechnungsoperationen und des Einsetzens erhält man aus stetige Funktionen immer wieder stetige Funktionen
- Eine auf einem abgeschlossenen und beschränkten Bereich $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (z.B. abgeschlossene Kugel, abgeschlossener Quader) stetige Funktionen ist dort beschränkt und nimmt in D ihr Maximum und Minimum an.

③ Partielle Ableitungen

$z = f(x,y)$, $(x_0,y_0) \in D$ fest

Betrachten $f(x,y_0)$: Fkt. in 1 Variabler x, für festes $y = y_0$
$\hat{=}$ Kurve auf der Fläche $f(x,y)$

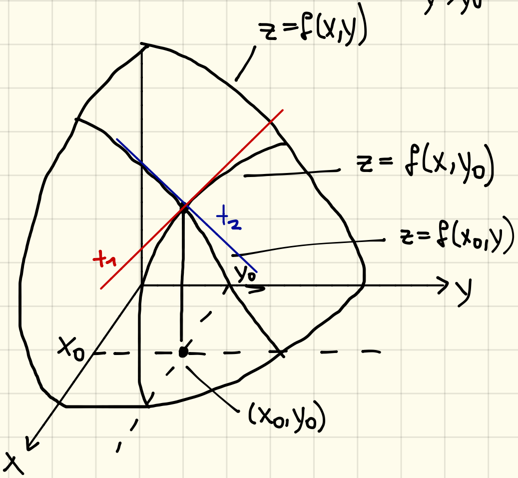
Bilden $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)$

partielles / rundes „d"

partielle Ableitung von f nach x in (x_0,y_0)

analog partielle Ableitung nach y : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) =$

$\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$



$f_x =$ Anstieg d. Tangente t_1
$f_y =$ ——— " ——— t_2
im Punkt (x_0,y_0)

t_1, t_2 spannen die Tangentialebene im Punkt (x_0,y_0) auf:
$z = t(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$ Ebenegl. in Parameterform

Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0$$

$$f_x x + f_y y - z = f_x x_0 + f_y y_0 - f(x_0,y_0)$$
$$z = f_x (x-x_0) + f_y (y-y_0) + f(x_0,y_0)$$

Höhere Ableitungen: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$\vdots$ $\quad = f_{yx}$

$\quad = f_{yy}$

4 verschiedene partielle Ableitungen 2. Ordnung

wobei zumeist $f_{xy} = f_{yx}$ (Satz von Schwarz)

weiteres $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx}$, usw. 8 partielle Ableitungen 3. Ordnung

Bsp.: $z = f(x,y) = x^3 + 2x^2y - y^3 + \sin(x^2+y) + 1$

$f_x = 3x^2 + 4xy - 0 + \cos(x^2+y) \cdot 2x$

$f_y = 2x^2 - 3y^2 + \cos(x^2+y) \cdot 1$

$f_{xx} = 6x + 4y - \sin(x^2+y) 2x \cdot 2x + \cos(x^2+y) \cdot 2$

$f_{xy} = 4x - \sin(x^2+y) \cdot 2x = f_{yx}$

$f_{yy} = -6y - \sin(x^2+y)$