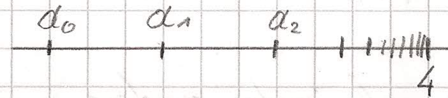
15.10.14



$U_\varepsilon(4) = (4-\varepsilon,\ 4+\varepsilon)$ $\xrightarrow{\text{fast alle}}$ Grenzwert; $\xrightarrow{\infty}$ Häufungswert

je nachdem wie viele Elemente in jeder dieser Umgebungen liegen

Wenn eine Folge einen Grenzwert hat, dann ist das gleichzeitig auch ein Häufungswert (der einzig mögliche).
Allerdings: Wenn eine Folge einen Häufungswert hat, heißt das noch lange nicht, dass das auch der Grenzwert ist.

② Monotonie und Beschränktheit

DEFINITION

Eine Folge (a_n) heißt:
- monoton fallend, wenn $a_{n+1} \leq a_n$
- streng monoton fallend, wenn $a_{n+1} < a_n$
- monoton wachsend, wenn $a_{n+1} \geq a_n$
- streng monoton wachsend, wenn $a_{n+1} > a_n$

$\forall n \in \mathbb{N}$

DEFINITION

Eine Folge heißt beschränkt, wenn es Zahlen a, b gibt, sodass
$\underbrace{a}_{\text{(eine) untere Schranke}} \leq a_n \leq \underbrace{b}_{\text{(eine) obere Schranke}}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$ gilt

Eine Folge kann auch nur nach unten od. nur nach oben beschränkt sein.

BEMERKUNG
- obere/untere Schranke nicht eindeutig
- jede beschränkte Folge besitzt stets eine kleinste obere Schranke = Supremum und eine größte untere Schranke = Infimum. (Vollständigkeit von $\mathbb{R}$)

$$\alpha = \inf a_n, \text{ falls } \begin{cases} \alpha \le a_n & \forall n \\ \alpha' \le a_n & \forall n \Rightarrow \alpha' \le \alpha \end{cases}$$

"α ist größer als jede andere untere Schranke"

analog für β

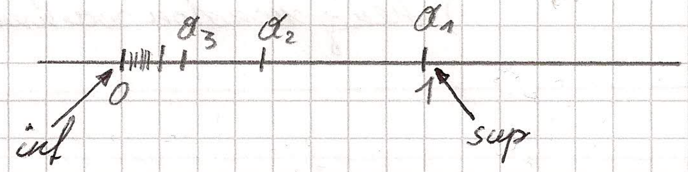
Bsp.: $a_n = \frac{1}{n^2}$: streng monoton fallend, denn

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} = a_n$$

$$\Longleftrightarrow (n+1)^2 > n^2 \quad \forall n \checkmark$$

beschränkt, denn $0 < \frac{1}{n^2} \le 1 = \frac{1}{1^2}$

$$\sup \frac{1}{n^2} = 1$$
$$\inf \frac{1}{n^2} = 0$$

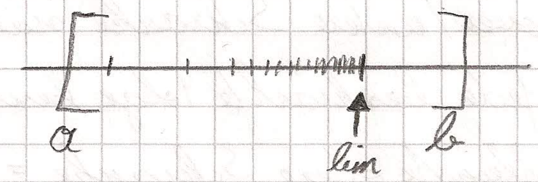


konvergent, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = 0$

Satz: (i) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(ii) Jede beschränkte Folge besitzt mind. einen Häufungswert (Satz von Bolzano-Weierstraß)

(iii) Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist. (Hauptsatz über monotone Folgen)



(Diese Sätze gelten nur für reelle Folgen!)

③ Rechnen mit Grenzwerten

Limes-Sätze: Für Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten konvergenter Folgen gilt:

$$\lim a_n = a,\ \lim b_n = b \Rightarrow \lim (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

(falls $b_n \neq 0$, $b \neq 0$)

Sandwich-Theorem:

Für Folgen (a_n), (b_n), (c_n) gilt:

$$\left.\begin{array}{l} a_n \leq c_n \leq b_n \quad \text{für fast alle } n \\ \lim a_n = \lim b_n = a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

wäre $\frac{\infty}{\infty}$, darum durch n^2 dividieren

Bsp.: • $a_n = \dfrac{n^2+n-1}{3n^2+13}$: $\lim a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{13}{n^2}} =$

lim von $\frac{1}{n} = 0$ geht gegen 0, $\frac{1}{n^2}$ ebenso

$$= \frac{1+0-0}{3+0} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$ "Grenzwert"

• $a_n = q^n$: $n \geq 0$ $\quad 1, q, q^2, \ldots$ geometrische Folge

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{für } |q| < 1 \\ 1 & \text{für } q = 1 \\ \infty & \text{für } q > 1 \end{cases}$$

kein Grenzwert, Folge ist "uneigentlich konvergent"

Beweis für $q > 1$: $q = 1 + p$ mit $p > 0$

$$q^n = (1+p)^n = 1^n + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot p +$$

binomische Formel!

$$+ \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot p^2 + \ldots + \binom{n}{n} \cdot 1^0 \cdot p^n$$

$$\geq 1 + n \cdot p \longrightarrow \infty \text{ für } n \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \lim q^n = \infty$$

•) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$: $2; 2{,}25; 2{,}37; 2{,}44; 2{,}49; \ldots$

$\longrightarrow e \approx 2{,}7$

strebt gegen Euler'sche Zahl (ohne Beweis)

•) $a_n = \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$ (siehe Übung)

•) (a_n) Folge mit $\frac{1}{n^\alpha} \leq a_n \leq n^\alpha$ für ein $\alpha > 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$

(Sandwich Theorem)

Beweis: $\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{n^\alpha} \longrightarrow 1$

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n^\alpha}} = \lim \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} = 1$$

Satz: Konvergenzkriterium von Cauchy:
= franz. Mathematiker

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: |a_m - a_n| < \varepsilon \quad \forall m,n > N(\varepsilon)$.

B) Unendliche Reihen

z.B.: •) $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots = 0,111\ldots = 0,\dot{1} = \frac{1}{9}$

•) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - + \ldots = \frac{\pi}{4}$ "Leibniz-Reihe"

•) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots = \ln 2$

ABER $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \infty$ "harmonische Reihe"

① Der Begriff der unendlichen Reihe

Sei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ eine Folge

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \ldots \text{ zugehörige Reihe}$$

Wir betrachten die Folge der Partialsummen: $s_0 = a_0$

$s_1 = a_0 + a_1$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$

$\vdots$

$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$\downarrow$

s für $n \to \infty$?

DEFINITION

Eine unendliche Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ heißt konvergent und besitzt den Grenzwert s, wenn die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergiert und $\lim s_n = s$ gilt.
Andernfalls ist die Reihe divergent.

<u>Bsp.:</u> die unendliche geom. Reihe $\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + \dots$

$$\left.\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\ q s_n &= q + q^2 + \dots\dots + q^n + q^{n+1} \end{aligned}\right\} \ominus$$

$$s_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{(1-q)} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q} \quad \text{falls } |q| < 1$$

$$\boxed{\text{Also: } \sum_{n\geq 0} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1}$$

z.B.: $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = \frac{1}{10} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots\right)}_{\frac{1}{1 - \frac{1}{10}}} =$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{9}$$

<u>Satz:</u> Ist $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergent, so folgt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

aber nicht umgekehrt.

<u>Beweis:</u> (i) Sei $\sum_{n\geq 0} a_n$ konvergent, d.h. $\lim s_n = s$

$$s_n = s_{n-1} + a_n \Rightarrow a_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

q.e.d.

(ii) betrachte $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ "harmonische Reihe"

"$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ist sicher mehr, als wenn ich nur $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ hab. Man schätzt beide durch das Kleinere ab."

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

allg. $s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2} \longrightarrow \infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ ist divergent!