$f(x)$, x_0 ... Entwicklungspunkt

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

Taylorreihe

$$f(x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

$\downarrow$ Restglied gibt Fehler an abhängig von n, x

Taylor'sche Formel mit Restglied

SATZ: (Satz von Taylor): Ist $f: I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar, $x, x_0 \in I$, dann gilt die Taylor'sche Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n$$

mit dem Restglied $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,

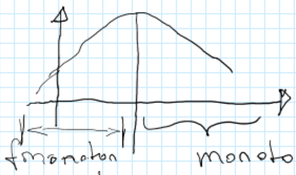
n_0 ξ zwischen x_0 und x liegt.

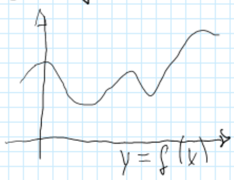
Ist f beliebig oft differenzierbar, so stimmt die Taylorreihe genau dann mit f über ein, wenn $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

4) MONOTONIE, EXTREMWERTE & KONVEXITÄT

Sei $f: I \to \mathbb{R}$ differenzierbar (nach Bedarf)

a) Monotonie:





monoton wachsend $x_1 < x_2 \to f(x_1) \le f(x_2)$

monoton fallend $x_1 < x_2 \to f(x_1) \ge f(x_2)$

SATZ: f ist genau dann monoton wachsend (fallend) auf einem Intervall I, wenn $f'(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$ $\forall x \in I$

Beweis: $(\Rightarrow)$ Sei f monoton wachsend, d.h.

$f(x_1) \le f(x_2)$ für $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \ge 0 \quad \forall x_1, x_2 \in I$$

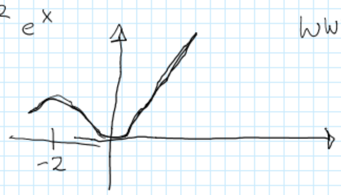
$\Rightarrow f'(x) \ge 0 \quad \forall x \in I$

$(\Leftarrow)$ gelte $f'(x) \ge 0 \quad \forall x \in I$

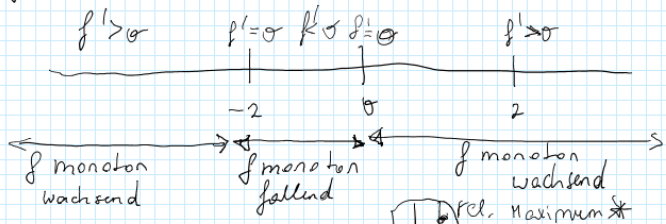
$x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\cdot\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}$

$\Rightarrow f(x_2) \ge f(x_1)$ ✓

Bsp: $f(x) = x^2 e^x$ www.desmos.com

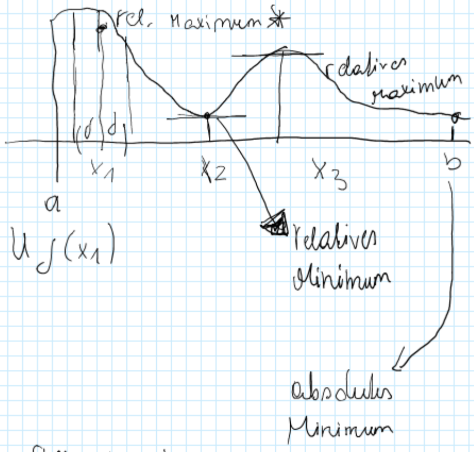


$f'(x) = 2x\,e^x + x^2 + x^2 e^x = x(2+x)\,e^x$



(b) EXTREMWERTE

$f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$



✱ abs. Maximum

Definition: f besitzt an der Stelle x_2 ein relatives Maximum, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ in einer Umgebung $U_\delta(x_0)$ von x_0 gilt; f besitzt in x_0 ein absolutes Maximum auf I, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in I$ gilt.

Analog sind relative und absolute Minima definiert.

SATZ: Für relative Extrema von f gilt:

- (i) notwendige Bedingung:
  f hat ein rel. Extremum in $x_0 \to f'(x_0) = 0$
- (ii) hinreichende Bedingung:
  Wenn $f'(x_0) = 0 \;\wedge\; f''(x_0) \begin{cases} <0 \Rightarrow f: \text{rel. Maxim. in } x_0 \\ >0 \Rightarrow f: \text{rel. Minimum in } x_0 \end{cases}$

Beweis von (ii): gelte $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$
($\Rightarrow f'' < 0$ in einer Umgebung von x_0)

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)}^{0} \cdot (x - x_0) +$$

$$+ \underbrace{\underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}}_{<0} \underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0}}_{\leq 0} \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$$

d.h. relatives Maximum von f an der Stelle x_0 ✓

Bsp. Fortsetzung: $f(x) = x^2 e^x$

$f'(x) = x(2+x)\,e^x = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\; x_2 = 0$

$f''(x) = \ldots = (2 + 4x + x^2) \cdot e^x$

$f''(-2)$

$f''(0)$

$f''(-2) = -2 \cdot e^{-2} < 0$ = relatives Maximum

$f''(0) = 2 > 0$ = relatives Minimum

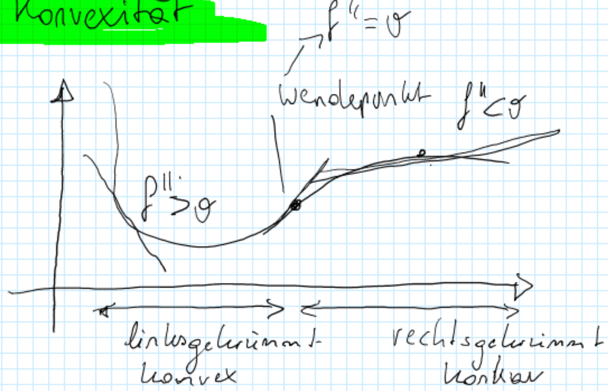
Absolute Extrema auf $\mathbb{R}$:

$f(x) = x^2 e^x \geq 0$, $f(0) = 0 \Rightarrow$ absolutes Minimum bei $x = 0$

$f(-2) = \frac{4}{e^2} > 0$ ... relatives Maximum

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Rightarrow \nexists$ absolutes Maximum

③ Wendepunkte & Konvexität



2. Ableitung bestimmt die Krümmung

DEFINITION: f heißt konvex (konkav), wenn f' monoton wachsend (fallend) ist.
f besitzt an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn f' in x_0 ein rel. Extremum ist.

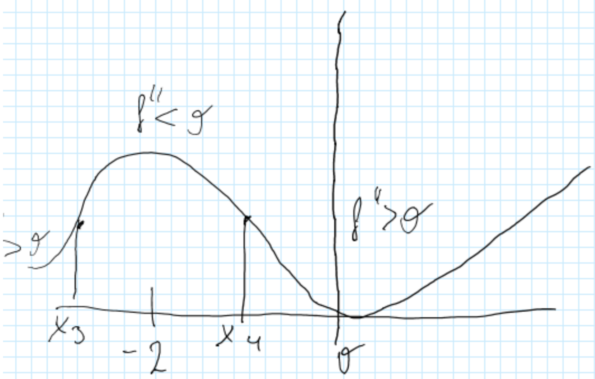
SATZ: f ist genau dann konvex (konkav) auf I, wenn $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) $\forall x \in I$.
Gilt $f''(x_0) = 0$, $f'''(x) \neq 0$, dann besitzt f einen Wendepunkt an der Stelle x_0.

Bsp: Fortsetzung $f(x) = x^2 e^x$

$f''(x) = (2 + 4x + x^2) e^x = 0 \Rightarrow x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{2}$

$f'''(x) = (6 + 6x + x^2) e^x \Rightarrow f'''(x_{3,4}) \neq 0$

also x_3, x_4 Wendepunkte.



C) DAS UNBESTIMMTE INTEGRAL

1) Integration als Umkehrung der Differentiation

Bsp: Wie lautet der Weg $s(t)$ zur Zeit t bei einer Bewegung mit Geschwindigkeit $v(t) = a \cdot t$?

z.B.: $9{,}81 m s^{-2}$

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = at$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{at^2}{2}, \text{ denn } \frac{d}{dt}\frac{at^2}{2} = at \checkmark$$

$$\frac{at^2}{2} + C, \quad C \text{ konstant}$$

DEFINITION: Für eine gegebene Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt jede Funktion $F: I \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$ eine Stammfunktion ein unbestimmtes Integral von f

Schreibweise: $F(x) = \underbrace{\int}_{\text{Integral}} f(x)\, \underbrace{dx}_{\text{Integrationsvariable}}$

Wie sehen alle Stammfunktionen zu f aus?

SATZ: Besitzt f die Stammfunktion F, dann sind alle Stammfunktionen von f gegeben durch $G(x) = F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$

Beweis mittels MWS

Bsp. für Grundintegrale (siehe Schule)

- $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathbb{N}, \text{ auch } n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
- $\int \frac{1}{x}\, dx = \begin{cases} \ln x + C & x > 0 \\ \ln(-x) + C & x < 0 \end{cases}$ kurz $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
- $\int e^x\, dx = e^x + C, \quad \int \sin x\, dx = -\cos x + C \ldots$