5.11.14

E Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

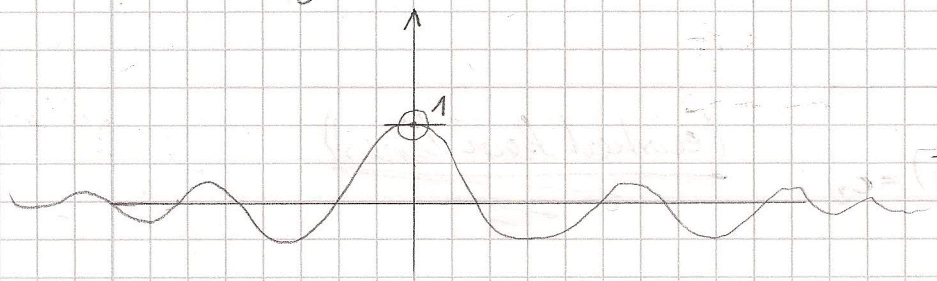
① Definition und Beispiele

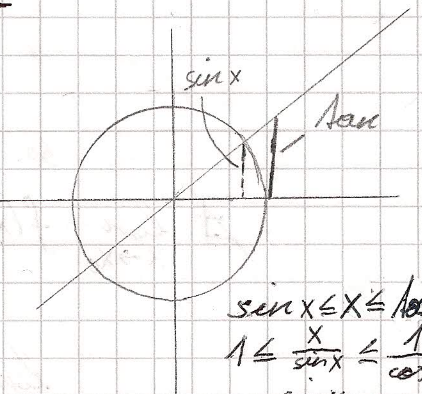
Funktion: $y = f(x)$, x_0

Frage: Gegen welchen Wert strebt $f(x)$ wenn sich x an x_0 nähert?

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$?

Bsp.: $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$





$\sin x \leq x \leq \tan x$

$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$

$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$

$x \to 0: 1 \Rightarrow 1 \quad 1$

also $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

betrachten Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots \to 0$

zugehörige Funktionswerte $f(x_1), f(x_2), \ldots \to 1 = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

> **DEFINITION**
>
> Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert c, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ folgt $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$.

Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$

Gleichwertig zu obiger Definition ist folgende Bedingung:

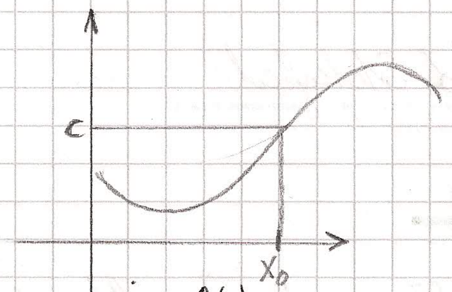
Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert c, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass gilt

Delta

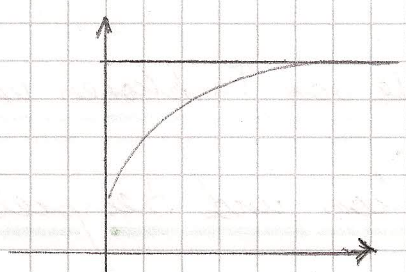
$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon \quad \forall x \in D, x \neq x_0$

Analog ist definiert $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

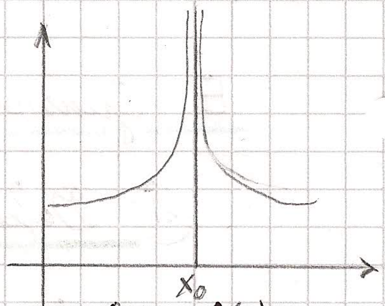
Bsp.:



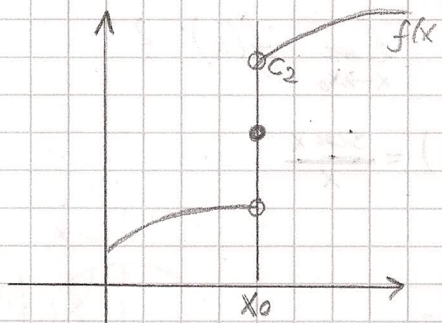
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$



$\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (existiert kein Limes!)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c_2$$

„einseitiger Limes"

Praktische Berechnung von $\lim f(x)$:

1. gem. Definition des Grenzwerts
2. Anwendung von Rechenregeln für Grenzwerte von Summen und Produkten von Funktionen (entsprechend den Regeln von Folgen)
3. Umformen des Ausdrucks für $f(x)$
4. Entwicklung von $f(x)$ in eine Reihe (siehe später)
5. Regeln von de l'Hospital (siehe später)

Bsp.:

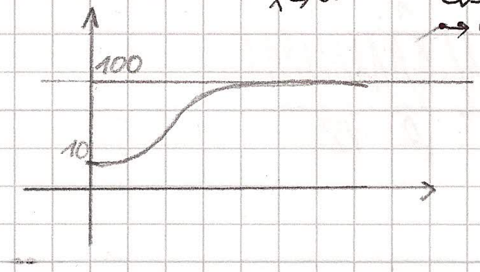
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x+1}{x+1} = \dfrac{\lim (3x+1)}{\lim (x+1)} = \dfrac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$

- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+1}{x+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \dfrac{3+0}{1+0} = \underline{\underline{3}}$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - + \ldots \right) =$

  $= \lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - + \ldots \right) = \underline{\underline{1}}$

•) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{100}{1+9e^{-x}} = \frac{100}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+9\underbrace{e^{-x}}_{\to 0})} = 100$



logistische Kurve

DEFINITION

Stetigkeit: Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ heißt an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, wenn $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(x_0)$. Die Funktion heißt stetig in D, wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in D$ stetig ist.

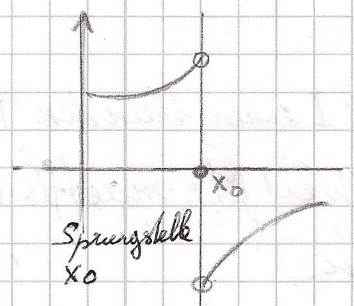
Äquivalente Formulierungen:

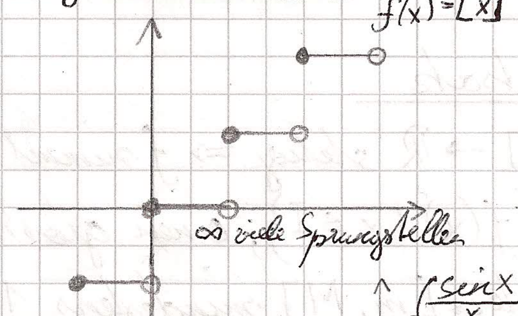
- f ist stetig in x_0, wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$ (= Folgenstetigkeit)
- f ist stetig in x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, sodass $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$
(= Umgebungsstetigkeit

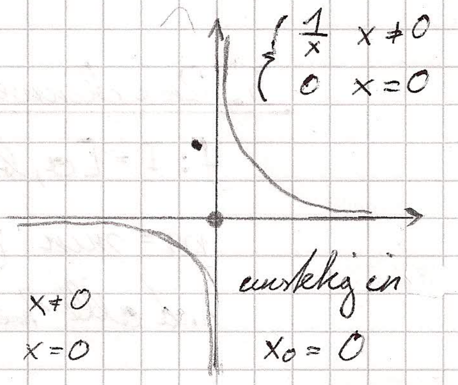
<u>Es gilt:</u> Alle elementaren Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich stetig.

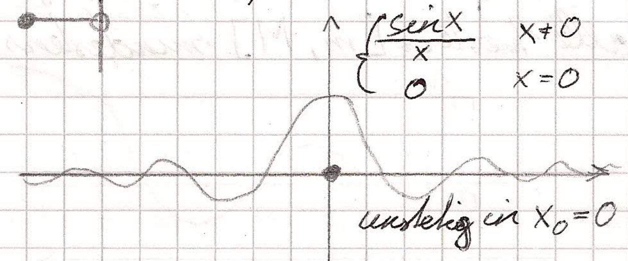
Salopp gesprochen: Funktion ist stetig, wenn man sie zeichnen kann, ohne Stift abzusetzen. (Funktion hat keine Sprungstellen)

<u>Beispiele für nicht stetige Funktionen:</u>



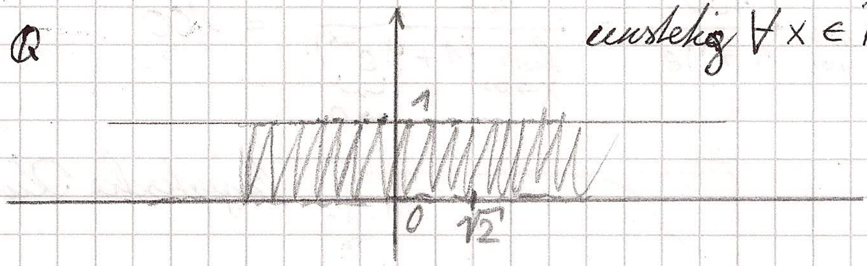






$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ unstetig $\forall x \in \mathbb{R}$

(Funktion kann man eigentlich nicht zeichnen!)

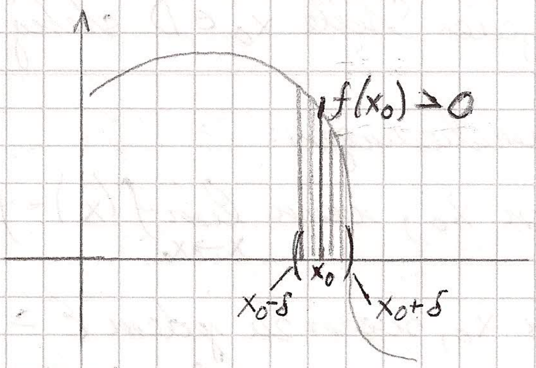


---

② Eigenschaften stetiger Funktionen

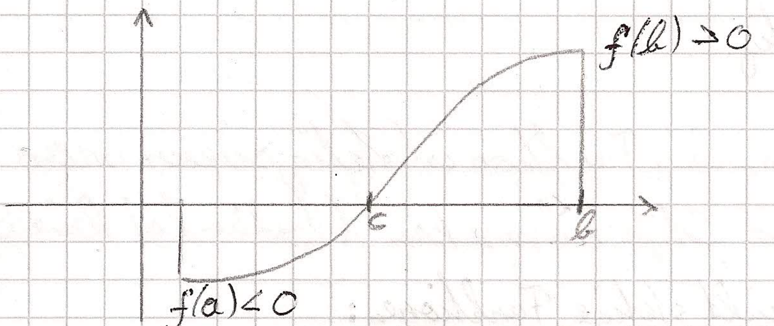
1. Vorzeichenbeständigkeit

f (stetig), $f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists$ Umgebung $U_\delta(x_0): f(x) > 0$
$\forall x \in U_\delta(x_0)$



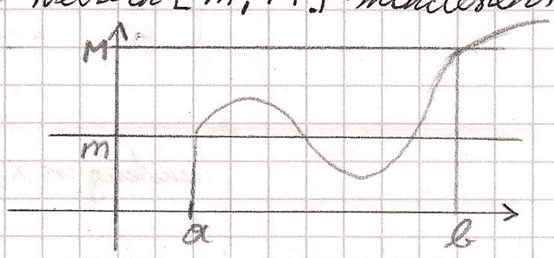
2. Nullstellensatz von Bolzano

$f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0$, $f(b) > 0 \Rightarrow f$ besitzt mindestens eine Nullstelle $c \in I$ mit $f(c) = 0$.



3. Zwischenwertsatz

$f: I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ nimmt auf I einen kleinsten Wert $m = \min\{f(x) \mid x \in I\}$, einen größten Wert $M = \max\{f(x) \mid x \in I\}$ und alle Werte in $[m, M]$ mindestens 1x an.



F Auflösung von Gleichungen

Gleichung $f(x)=0$ z.B.: $f(x) = e^x - 100x = 0$

$$\Updownarrow$$

$$g(x) = x - f(x) = x$$

x Nullstelle von $f(x) \longleftrightarrow x$ Fixpunkt von $g(x)$, also $g(x)=x$

Zum Auffinden von Fixpunkten:

Iterationsverfahren:

$$x_0,\; x_1 = g(x_0),\; x_2 = g(x_1),\; \ldots,\; x_{n+1} = g(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} x^*$$

Startwert

Fixpunkt $g(x^*) = x^*$

① Newton'sches Näherungsverfahren

$$f(x)=0$$

$$\Longleftrightarrow g(x) = x - f(x)\frac{1}{f'(x)} = x \quad \left(\text{Näheres zu } f'(x) \text{ siehe Kapitel 2}\right)$$

$$\Longrightarrow \text{Iterationsverfahren: } \boxed{x_{n+1} = g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \quad n=0,1,2,\ldots$$

Bsp.: $f(x) = e^x - 100x \Longrightarrow x_{n+1} = x_n - \dfrac{e^{x_n} - 100x_n}{e^{x_n} - 100}$

$f'(x) = e^x - 100$

z.B. $x_0 = 0,\; x_1 = 0{,}01,\; x_2 = 0{,}01 \longrightarrow x_1^* = 0{,}01$

$x_0 = 10,\; x_1 = 9{,}04,\; x_2 = 8{,}14 \longrightarrow x_2^* = 6{,}47$