28/01/15

$$y = y(x)$$

$F(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$ ... gewöhnliche DGL n-ter Ordnung

$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ ... explizite DGL 1. Ordnung ... Anfangswertproblem

B Lineare Diff.gleichungen 1. und 2. Ordnung

① Lineare Dgl.en 1. Ordnung

$$y' + a(x) = \begin{cases} 0 & \text{homogene Glg} \\ s(x) & \text{inhomogene Glg} \end{cases}$$

Störfunktion

z.B. $y' \underbrace{- \frac{1-x}{x}}_{a(x)} y = \underbrace{4x^2}_{s(x)}$

Satz: Die Lösungsgesamtheit der linear inhomogenen Dgl. $y' + a(x)y = s(x)$ ist geg. durch $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$, wo $y_h(x)$ die allg. Lösung der zugehörigen homogenen Glg. $y' + a(x)y = 0$ und $y_p(x)$ eine beliebig partikuläre Lösung der inhomogenen Glg. ist.

Lösungsweg:
1. Lösung der homogenen Glg. durch „Trennung d. Variablen"
2. Bestimmung einer part. Lsg. d. inhomo. Glg. durch „Variation der Konstanten"
3. Ermittlung d. Lsg.gesamtheit gemäß $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

ad 1. $y' + a(x)y = 0 \implies \frac{y'}{y} = -a(x)$

$$\ln|x| = -\int a(x)\,dx + C_0$$

$$y_h = C \cdot e^{-\int a(x)\,dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

(Betrag ist im C enthalten, dsug kann man ihn weglassen)

In der Praxis $\frac{dy}{dx} + a(x)y = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)\,dx \qquad \text{„Trennung d. Variablen"}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int a(x)\,dx$$

ad 2. Ansatz für part. Lsg.: $y_p(x) = C(x) + e^{-\int a(x)dx}$

„Variation" der Konstante

Bsp.: $y' - \frac{1-x}{x} y = 4x^2$

homog. Glg.: $y' - \frac{1-x}{x} y = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{x} y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1-x}{x} dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| - x + C_0 \qquad \text{auch } \ln C$$

$$y_h = x \cdot e^{-x} \cdot C \quad , \; C \in \mathbb{R}$$

Var. d. Konst. $y_p(x) = C(x) \cdot x \cdot e^{-x}$

$$\Rightarrow y_p'(x) = C'(x) \cdot x \cdot e^{-x} + C(x) \cdot 1 \cdot e^{-x} - C(x) \cdot x \cdot e^{-x}$$

Einsetzen in inhom. DGL.: $4x^2 = C'(x)x \cdot e^{-x} + \cancel{C(x)e^{-x}} - \cancel{C(x)x \cdot e^{-x}} - \underbrace{\frac{1-x}{x} \cdot C(x)xe^{-x}}_{-\cancel{C(x)e^{-x}} + \cancel{C(x)xe^{-x}}}$

$$4x^2 = C'(x)xe^{-x}$$

(alle $C(x)$ müssen sich rauskürzen (!))

$$C'(x) = 4xe^{x}$$

$$C(x) = 4\int xe^x dx = 4xe^x - 4\int 1e^x dx =$$

$$= 4xe^x - 4e^x = 4e^x(x-1) + \cancel{C}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = C(x) \cdot x \cdot e^{-x} = 4e^x(x-1) \cdot xe^{-x}$$

$$= 4x(x-1)$$

$$\Rightarrow y = y_h + y_p$$

$$= Cxe^{-x} + 4x(x-1) \quad , \; C \in \mathbb{R} \quad \text{... allg. Lsg}$$

② Lineare Dgl.en 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + a\cdot y' + by = \begin{cases} 0 & \text{homogene Glg.} \\ s(x) & \text{inhomogene Glg.} \end{cases}$$

konst. Koeff. (a, b)

$s(x)$: Störfunktion

z.B. $y'' + y' - 2y = 2x - 3$

Wiederum gilt: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

- $y(x)$: allg. Lsg. d. inhom. Glg.
- $y_h(x)$: allg. Lsg. d. hom. Glg. mittels „Exponentialansatz"
- $y_p(x)$: bel. part. Lsg d. inhom. Glg. mittels „Methode d. unbest. Ansatzes"

1. Bestimmung von $y_h(x)$:

betr. hom. Glg. $y'' + ay' + by = 0$

machen Ansatz $y_h(x) = e^{\lambda x}$ „Exponentialansatz"

$y_h'(x) = \lambda e^{\lambda x}$

$y_h''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

Bem.: expon. Wachstum $y' = ry$, $y = c\cdot e^{rx}$

$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ charakteristische Glg.

3 Fälle:
- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$
- $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Satz: Sind λ_1, λ_2 die Lösungen d. charakt. Glg. $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, dann lautet die allg. Lsg d. homogenen Dgl.

$$y_h(x) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_1, \lambda_2 \text{ reell}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) & \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \text{ konj. komplex} \\ (C_1 + C_2) e^{\lambda_1 x} & \lambda_1 = \lambda_2 \text{ reell} \end{cases}$$

mit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2. Bestimmung von $y_p(x)$:

Methode d. unbest. Ansatzes

z.B. Störfunktion $s(x) = a_0$ oder $s(x) = a_0 + a_1 x$

$\Rightarrow$ Ansatz $y_p(x) = A_0$ oder $y_p(x) = A_0 + A_1 x$

Störfunktion $s(x)$	Versuchslösung $y_p(x)$
1	A
$a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$	$A_0 + A_1 x + \dots + A_k x^k$
e^{rx}	$A \cdot e^{rx}$
$(a_0 + \dots + a_k x^k) e^{rx}$	$(A_0 + A_1 x + \dots + A_k x^k) e^{rx}$

Zusatz: Ist ein Summand der Versuchslösung bereits Lsg. der homog. Glg, so ist der gesamte Lösungsansatz mit x zu multiplizieren; Vorgangsweise ggf. wiederholen. (Resonanzfall)

Bsp.: $y'' + y' - 2y = 2x - 3$

ad Resonanzfall: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $y_h = C_1 + C_2 e^{-2x}$

homog. Glg.: $y'' + y' - 2y = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ ... charakt. Glg.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \Rightarrow y_h(x) = C_1 e^{x} + C_2 \cdot e^{-2x}$$

part. Lsg.: $s(x) = 2x - 3$

$\Rightarrow$ Ansatz $y_p(x) = Ax + B$ $\quad (y_p' = A, \; y_p'' = 0)$

einsetzen: $0 + A - 2(Ax + B) = 2x - 3$

$-2Ax + A - 2B = 2x - 3$

Koeff.vgl.:

$$\left.\begin{array}{lll} x^1: & -2A = 2 & \Rightarrow A = -1 \\ x^0: & A - 2B = -3 & \Rightarrow B = 1 \end{array}\right\} y_p = -x + 1$$

$\rightarrow y = y_h + y_p = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + 1 - x$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ... allg. Lsg.