07/01/15

$f: D \to \mathbb{R}$
$\subseteq \mathbb{R}^2$
$\subseteq \mathbb{R}^3$

z.B.: $z = f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + \sin(xy+1)$ Fläche im Raum

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{(x-x_0)}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \text{analog}$$

Bsp.: $P(A,K) = c \cdot A^{\alpha} K^{1-\alpha}$ Cobb-Douglas-Produktionsfkt.

Output — Arbeit 1. Faktor — Kapital 2. Faktor

$c > 0 \ , \ 0 < \alpha < 1$

$$\frac{\partial P}{\partial A} = c \cdot \alpha A^{\alpha-1} K^{1-\alpha} = \alpha \cdot c \left(\frac{K}{A}\right)^{1-\alpha}$$

<u>Grenzproduktivität des Faktors A</u>

das ist Produktionsergebnis, welches durch eine zusätzliche Einheit des Faktors A erzielt werden kann

allg.: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad , \quad y = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$

partielle Ableitungen 1. Ordnung : $\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, n$

— " — 2. Ordnung : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad i,j = 1, \dots, n$

Dabei gilt : man differenziert nach x_i, indem man alle übrigen Variablen konstant hält.

B Differentialrechnung in mehreren Variablen

① Die totale Ableitung

sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $z = f(x,y)$, $(x_0,y_0) \in D$ fest

Def.: f heißt total differenzierbar in (x_0,y_0) $\Longleftrightarrow$

$$\exists\ a, b : f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0)}_{\text{Tangentialebene}} + R(x,y)$$

mit $R(x,y) = o\left(\underbrace{\left\| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\|}_{\text{Abstand (?)}}\right)$

d.h. f lässt sich lokal um (x_0,y_0) durch eine Ebene approximieren

total diff. $\overset{?}{\longleftrightarrow}$ partiell diff

ang. f ist total diff., dann ist f auch partiell nach x, y diff.bar, denn:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + R(x,y)$$

$y = y_0$: $\quad f(x,y_0) - f(x_0,y_0) = a(x-x_0) + b \cdot 0 + R(x,y)$

$x \to x_0$: $\quad \dfrac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x-x_0} = a + \dfrac{R(x,y)}{x-x_0} \to 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = a$$

analog $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = b$

also ist f nach x und y differenzierbar

ABER Umkehrung gilt nicht! (siehe Übung)

Also wenn f total diff $\Rightarrow$ f partiell diff.

und $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{f_x(x_0,y_0)}_{=a}(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + R(x,y)$

?

$$= f(x_0,y_0) + \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + R(x,y)$$

Gradient grad $f(x,y_0)$

analog für $f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{D} \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in D$:

$$f \text{ totaldiff in } \vec{x}_0 \iff f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \operatorname{grad} f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \underbrace{R(\vec{x})}_{o(\|\vec{x}\|)}$$

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ f_{x_2} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$$

Es gilt: Jede totaldiff Fkt ist stetig; ferner existieren alle partielle Ableitungen

② Ableitungsregeln

(o) Alle Regeln für das gewöhnliche Differenzieren bleiben beim partiell. Differenzieren erhalten.

(i) Kettenregel

$n=2$ $\quad f(g,h)$ mit $g(x)$, $h(x)$ $\quad \to$ zusammengesetzte Fkt.: $F(x) = f(g(x), h(x))$

$$\Longrightarrow F'(x) = f_g \cdot g' + f_h \cdot h'$$

bzw. $\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial g} \cdot \dfrac{dg}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial h} \cdot \dfrac{dh}{dx}$

analog für $f(g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$

$f(g(x,y), h(x,y))$

Bsp.: $f(g,h) = 3g^2 + 2h^4$, $\quad g(x) = \sin x$, $\quad h(x) = x \cdot \cos x$

$$\Longrightarrow \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dx} + \frac{\partial f}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dx}$$

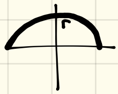
$$= 6g \cdot \cos x + 8h^3 \cdot (\cos x - x(\sin x))$$

$$= 6 \sin x \cos x + 8 \cos^4 x - 8x^4 \cos^3 x \cdot \sin x$$

(ii) Ableitung einer impliziten Funktion

sei $y = y(x)$ implizit geg. durch $F(x,y) = 0$ $\qquad y'(x) = ?$

z.B. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ implizit geg. durch $x^2 + y^2 = r^2 \xrightarrow{\text{diff.}} 2x + 2y \cdot y' = 0$, $y' = -\frac{x}{y}$



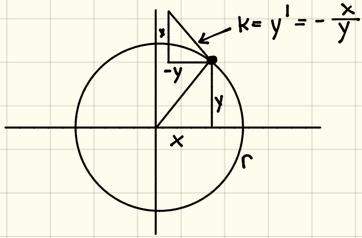
$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$
$$\overset{\shortparallel}{F(x,y)} = 0$$

$$F(x, y(x)) = 0 \overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow} F_x \cdot \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + F_y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Satz (Hauptsatz über implizite Funktionen): Sei $F: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig diff., $F(x_0, y_0) = 0$ und $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Dann hat die Gleichung $F(x,y) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0) eine eindeutig bestimmte Lösung $y(x)$, für die gilt $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$

Bspe.:

- $F(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$

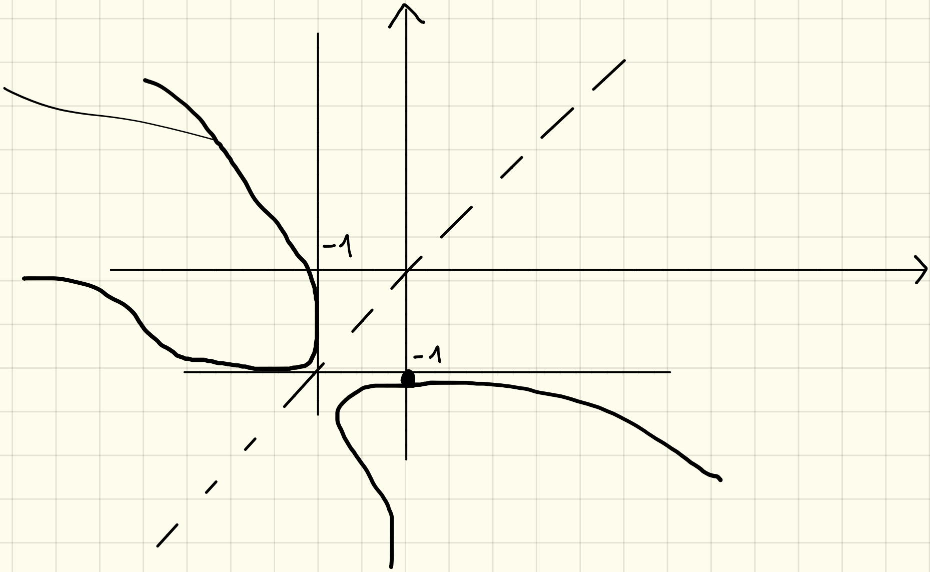


- $F(x,y) = e^{xy} + x + y = 0 \Longrightarrow$ $y = y(x)$ implizit gegeben, aber nicht explizit darstellbar

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{y \cdot e^{xy} + 1}{x \cdot e^{xy} + 1}$$

z.B. $x = 0 \Rightarrow y = e^0 + 0 + y \Rightarrow y = -1$

$$\Rightarrow y'(0) = \frac{(-1) \cdot e^0 + 1}{0 \cdot e^0 + 1} = \frac{0}{1} = 0$$



-1
-1