② Technik des Integrierens

03/12/14

Satz: (Integrationsregel)

(i) $\int (f \pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$, $\int k f\,dx = k \cdot \int f\,dx$ ... Linearität

(ii) $\int f \cdot g'\,dx = f \cdot g - \int f' g\,dx$ ... partielle Integration

(iii) $\int f(g(x))\,dx = \int f(u)\,du$ mit $u = g(x)$ ... Substitutionsregel

In der Praxis $u = g(x) \Rightarrow \frac{du}{dx}$, $du = g'(x)\,dx$

Bspe.:

- $\int \frac{x^4-1}{x}\,dx = \int x^3 - \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^4}{4} - \ln|x| + C$

- $\int \underset{f}{x} \cdot \underset{g'}{\cos x}\,dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x\,dx = x \cdot \sin x - \cos x + C$

- $\int \ln x\,dx = \int \underset{f}{\ln x} \cdot \underset{g'}{1}\,dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\,dx = x \cdot \ln x - x = x(\ln x - 1) + C$

- $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\cos x| + C$

  $\rightarrow u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x = \frac{du}{dx} \rightarrow du = -\sin x\,dx$

- $\int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\underbrace{\frac{x^2}{4}}_{u^2}+1} = \frac{1}{4} \int \frac{2du}{u^2+1} = \frac{2}{4} \arctan(u) = \frac{1}{2} \cdot \arctan\frac{x}{2} + C$

Bem.: $(\arctan)' = \frac{1}{x^2+1}$ $\qquad u = \frac{x}{2} \rightarrow du = \frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = 2du$

③ Partialbruchzerlegung zur Integration rationaler Funktionen

sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $p(x), q(x)$ Polynomfunktionen; o.B.d.A. Grad $p <$ Grad q (Polynomdiv. bereits durchgeführt)

wobei $q(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - \lambda_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{n} Q_j(x)^{e_j}$

reelle Nullstellen λ_i mit Vielfachheit k_i

quadr. Polynome zu je 2 konjugiert komplexe Nullstellen der Vielfachheit e_j

$$\Longrightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{l=1}^{m} \sum_{\mu=1}^{k} \frac{A_{l\mu}}{(x-\lambda_l)^{\mu}} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{c_j} \frac{B_{j\nu}x + C}{Q_j(x)^{\nu}}$$

Ansatz mit unbest. Koeffizienten A, B, C
Berechnung mittels Koeffizientenvergleich

Bsp.: $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+x^2-x+1} = \dfrac{x^2+1}{(x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}$ also $\lambda_1 = 1$ mit $k_1 = 2$ wegen $(x-1)^2$
$\lambda_2 = -1$ mit $k_2 = 1$

$$\Longrightarrow f(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)}$$

$$\frac{x^2+1}{N} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x+1)} \quad | \cdot N$$

$$x^2+1 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2$$

$$\vdots$$

$$x^2+1 = \underbrace{(A+C)}_{1}x^2 + \underbrace{(B-2C)}_{0}x + \underbrace{(-A+B+C)}_{1}$$

$$\begin{aligned} A+C &= 1 \\ B-2C &= 0 \\ A+B+C &= 1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad A = \frac{1}{2},\ B = 1,\ C = \frac{1}{2}$$

$$\text{also } \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + 1 \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)}$$

$$\Longrightarrow \int \text{——}\,''\,\text{——}\, dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \ln|x+1| =$$

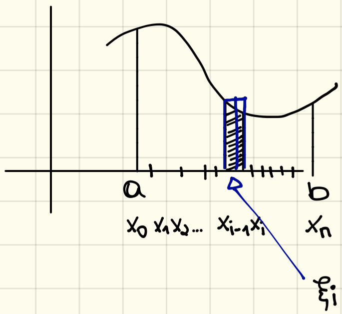
$$= \ln\sqrt{|x^2-1|} - \frac{1}{x-1} + C$$

ln zusammengefasst

D DAS BESTIMMTE INTEGRAL

(1) Die Fläche unter einer Kurve

Kurve geg. durch Fkt. $y = f(x)$ mit $a \leq x \leq b$



Zerlegung $[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

n Teilintervalle der Länge $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$

Zwischenstellen $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, n$

Summe $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta_x \xrightarrow{n \to \infty}$ Fläche $\int_a^b f(x) \cdot dx$

Zwischensumme od. Riemann'sche Summe

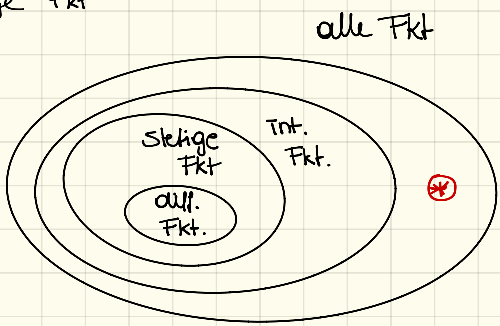
Def.: Falls jede Folge von Zwischensummen $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert konvergiert, so heißt dieser das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)dx$ von f auf $[a,b]$.

Wann existiert das bestimmte Integral?

- jede auf $[a,b]$ definierte monotone Fkt
- jede auf $[a,b]$ (stückweise) stetige Fkt

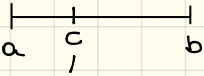
ist integrierbar

(*) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$



Eigenschaften d. best. Integrals

- $\int_a^b (f \pm g)\,dx = \int_a^b f\,dx \pm \int_a^b g\,dx$, $\int_a^b k f\,dx = k \int_a^b f\,dx$
- $\int_a^b f(dx) = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$



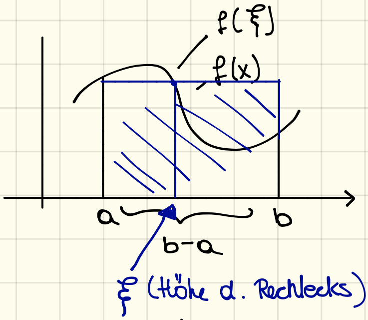
(kann auch außerhalb liegen

wobei $\int_a^b = -\int_b^a$

- $f(x) \leq g(x) \;\forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx$
- $\left| \int_a^b f\,dx \right| \leq \int_a^b |f|\,dx$

② Der Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung

Satz (Mittelwertsatz d. Integralrechnung): Ist f stetig auf $[a,b]$, dann gibt es ein ξ mit $a < \xi < b$, sodass $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\cdot(b-a)$



Beweis mittels MWS der Differentialrechnung

Bem.: $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ heißt Mittelwert (Integralmittel) der Fkt. f auf $[a,b]$

z.B. Bewegung mit Momentangeschwindigkeit, $v(t) = 6t^2 - 4t$, $0 \leq t \leq 3$

$\Rightarrow$ Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{1}{3} \int_0^3 v(t)\,dt = \frac{1}{3} \int_0^3 (6t^2 - 4t)\,dt = \ldots = 12 \; m s^{-1}$$

Satz (Hauptsatz d. Diff.- und Integralrechnung): Ist f stetig im $[a,b]$ und F eine beliebige Stammfkt von f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

<u>Beweisidee:</u> Betr. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ und zeigen, dass F eine Stammfkt. von f ist, d.h. $F' = f$

dann $F(b) - F(a) = \underset{+C}{\int_a^b f(t)\,dt} - \underset{0 \quad -C}{\int_a^a f(t)\,dt} = \int_a^b f(x)\,dx =$