12.11.14

Nullstellenproblem $f(x) = 0$

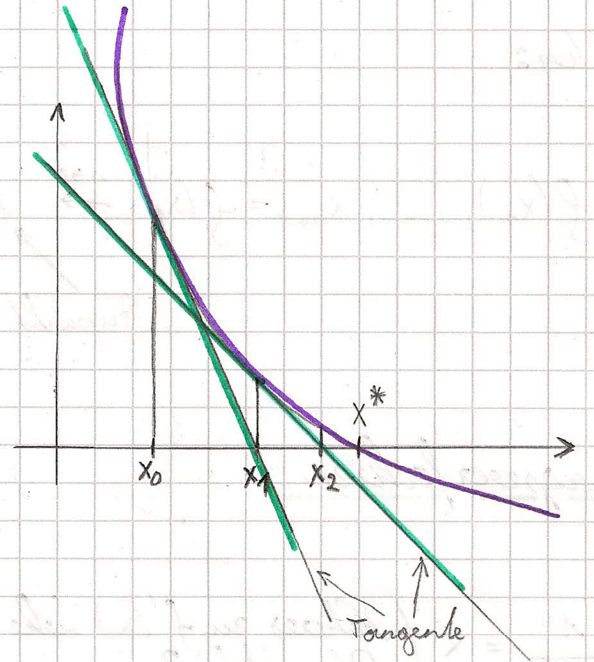
$\updownarrow$

Fixpunktproblem $g(x) = x$

Iterationsverfahren: $x_0,\ x_1 = g(x_0),\ x_2 = g(x_1),\ x_3,\ x_4, \ldots \rightarrow$ Fixpkt. x^*

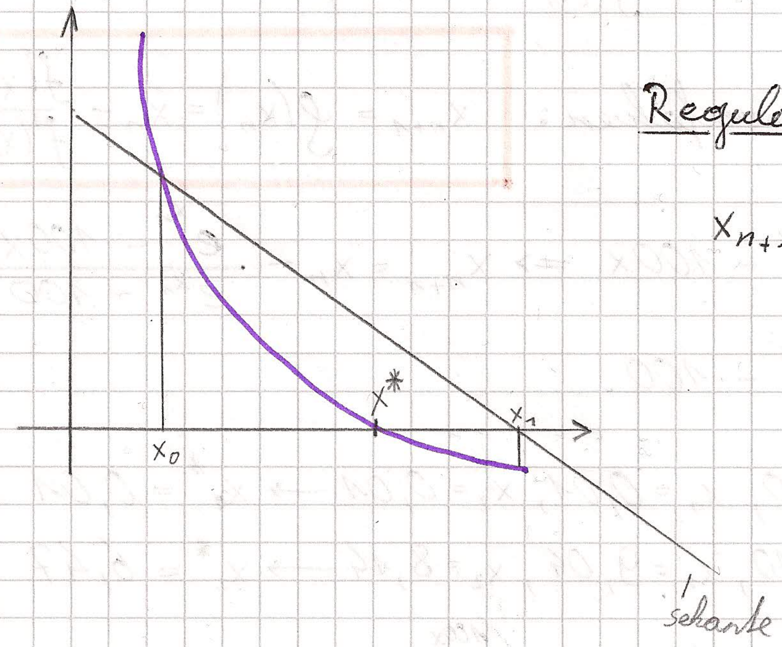
Startwert

laufende Verbesserungen



Newton:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Regula falsi

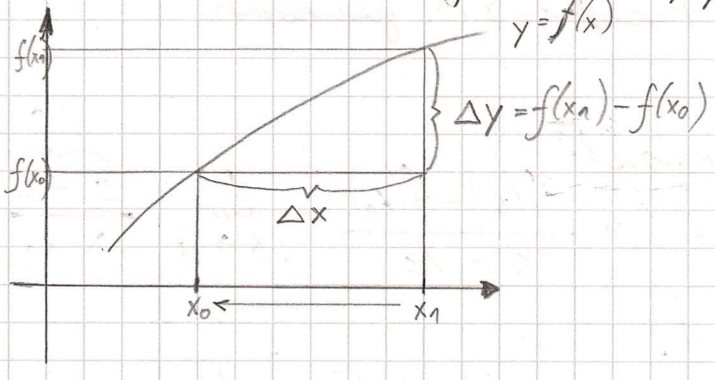
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot f(x_n)$$

2 DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG IN EINER VARIABLEN

A) Die Ableitung

① Definition und Ableitung einfacher Funktionen

betrachten Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Anstieg der Sekante
mittlere Änderung der Funktion f im Intervall $[x_0; x_1]$
Differenzenquotient

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} := f'(x_0)$$

Anstieg der Tangente
momentane Änderung an der Stelle x_0
Differentialquotient

DEFINITION

Unter der Ableitung (dem Differentialquotienten) einer Fkt. $f: D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ versteht man den Grenzwert:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Existiert dieser Grenzwert, so heißt f in x_0 differenzierbar; existiert er für alle $x_0 \in D$, heißt f in D differenzierbar und die Funktion $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$.

Schreibweise: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$

„dy nach dx"

Leibnizschreibweise; sieht nur aus wie ein Bruch, ist aber keiner.

Interpretation: i.d. Geometrie: Tangentenanstieg

i.d. Naturwissenschaften: momentane Änderung einer Größe

z.B.: Geschwindigkeit

i.d. Wirtschaft: z.B. Grenzkosten

<u>Bsp.:</u>

- $f(x) = c$ konstant

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\overbrace{c-c}^{0}}{x-x_0} = 0 \ \forall x_0$$

- $f(x) = 3x^2+1$

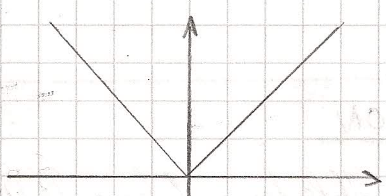
$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{3x^2+1-(3x_0^2+1)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{3\overbrace{(x^2-x_0^2)}^{(\cancel{x-x_0})(x+x_0)}}{\cancel{x-x_0}} =$$

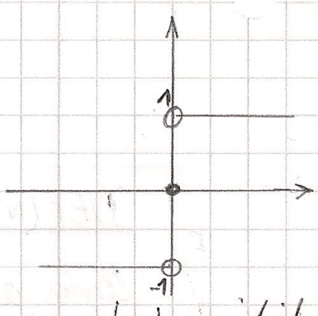
$$\lim_{x\to x_0} = 3(x+x_0) = 6x_0$$

allgemein: $f(x) = ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x) = 2ax+b$

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\cdot x^{n-1}$

- $f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$





$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \text{ existiert nicht!}$$

für $x_0 = 0$

also $|x|$ für $x=0$ ist nicht differenzierbar.

② Eigenschaften und Ableitungsregeln

$$f \text{ stetig} \;\not\Longrightarrow\; f \text{ differenzierbar}$$

$$\overset{?}{\Longleftarrow}$$

Satz: Ist f differenzierbar in x_0, dann ist f dort auch stetig.

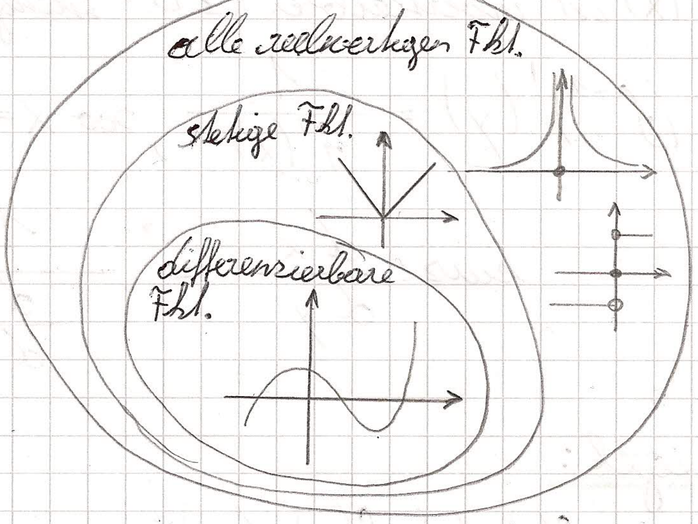
Beweis:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \underbrace{(x-x_0)}$$

$x \to x_0$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \text{ d.h. } f \text{ ist stetig in } x_0 \qquad \text{q.e.d.}$$



Ableitung elementarer Funktionen (Schule)

- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ $\quad (x \in \mathbb{R},\ n \geq 0$ oder $x > 0$ u. $n \in \mathbb{R})$
- $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

usw.

Satz: (Ableitungsregeln)

- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad \forall c \in \mathbb{R}$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ Summenregel
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ Produktregel
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ Quotientenregel
- $D_1 \xrightarrow{g} D_2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

  $f \circ g = F$, d.h. $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$

  $\Longrightarrow F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ Kettenregel

  äußere Ableitung innere Ableitung

  kurz: $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx}$

- $D \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} f(D)$, $y = f(x)$ ist invertierbar (z.B.: streng monoton)

  $\Longrightarrow (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, wo $x = f^{-1}(y)$

  kurz: $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}$

Beweis d. Produktregel:

$$(fg)'(x_0) = \lim \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim \frac{\overbrace{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)} + \overbrace{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}}{x - x_0} =$$

$$= \lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + f(x_0) \cdot \lim \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

q.e.d.

Bsp.:

- $f(x) = x^5 + 3x^3 + 3x + 5 \Longrightarrow f'(x) = 5x^4 + 9x^2 + 3$

- $f(x) = (1 + x^2)\, e^x \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^x + (1 + x^2)\, e^x =$

  $= (1 + 2x + x^2)\, e^x$

- $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$

  $= \begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \tan^2 x \end{cases}$ > sind ident

- $f(x) = \sqrt{\underbrace{1 + x^2}_{g(x)}} = f'(x)\, \dfrac{df}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x =$

  $f(g)$

  $= \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

- $f(x) = \sin \sqrt{\underbrace{1 + x^2}_{f_3}} = f_1(f_2(f_3(x))) \Longrightarrow f'(x) =$

  $f_1 \quad f_2$

  $= f_1'(f_2(f_3(x)) \cdot f_2'(f_3(x)) \cdot f_3'(x) = \cos\sqrt{1+x^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$