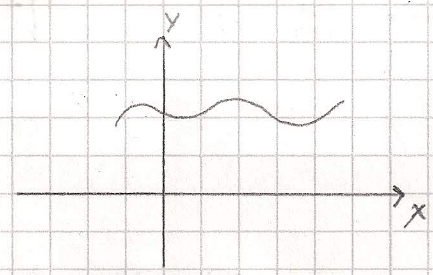
D) Elementare Funktionen

Wir betrachten Funktionen von $f: \underset{\subseteq \mathbb{R}}{D} \to \mathbb{R}$



① Bsp. und einfache Eigenschaften

Polynomfunktionen: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$\in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

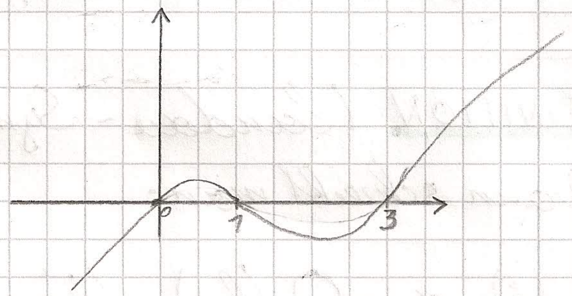
Polynom vom Grad n

z.B.: konstante Funktionen $f(x) = a_0$

lineare Funktionen $f(x) = a_1 x + a_0 = kx + d$

Potenzfunktionen $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

Polynomfunktion 3. Grades $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$

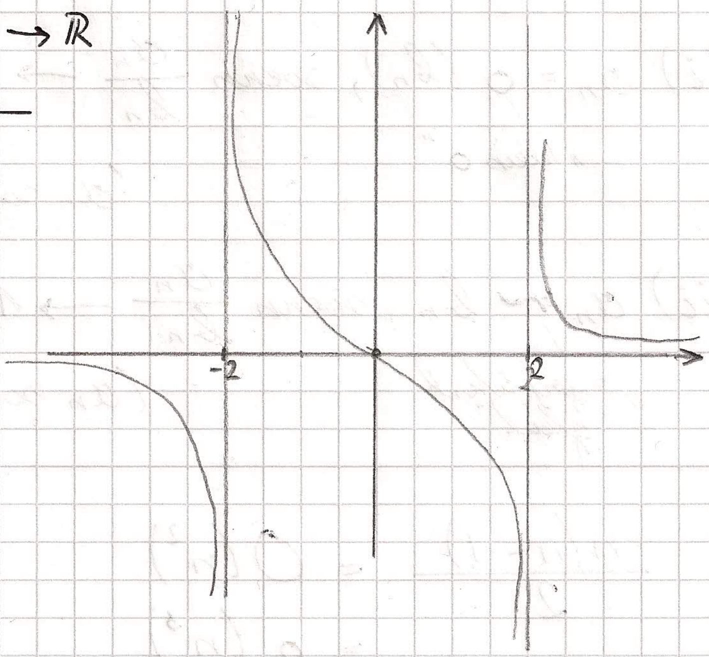


Rationale Funktionen: $f: D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ $\quad$ p, q … Polynome

$D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid q(x) = 0\}$

z.B.: $f: \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$



DEFINITION

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ und $I \subseteq D$ ein Intervall, dann heißt f auf I streng monoton wachsend (bzw. fallend), wenn $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (bzw. $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$), $\forall x, y \in I$

Polynomfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, stückweise monoton, im Allgem. weder injektiv noch surjektiv.

Satz: Jede auf einem Intervall I streng monotone Funktion $f: I \to f(I)$ ist bijektiv und lässt sich daher auf I umkehren.

Beweis: o.B.d.A. sei f streng monoton wachsend.

$x \neq y$, ang. $x < y \to f(x) < f(y)$, also $f(x) \neq f(y)$ — f injektiv

$f: I \to f(I)$ automatisch surjektiv

$\Big\}$ f bijektiv q.e.d.

② Exponentialfunktion und Logarithmus

DEFINITION

Die natürliche Exponentialfunktion ist definiert durch

$$\exp(x) = e^x, \text{ wo } e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\ldots$$

Die allgem. Exponentialfunktion lautet

$$f(x) = a^x \text{ für } a > 0.$$

Frage: Wie ist a^b (für $a>0$) überhaupt definiert?

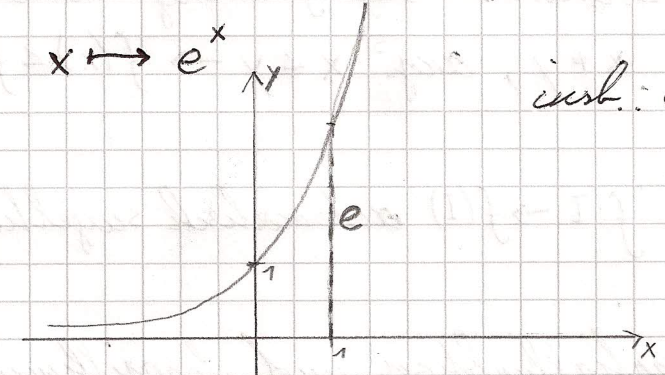
- ganze Exp.: a^n $(n\in\mathbb{Z})$: $a^n = \underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n}$ $\quad n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$

$$a^0 = 1$$
$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

- rationale Exponenten: $a^{\frac{p}{q}}$ $(p,q\in\mathbb{Z}, q>0)$: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
  ($\sqrt[q]{}$ ist stets eindeutig bestimmt)

- reelle Exp.: a^b $(b\in\mathbb{R})$: wähle Folge in $\mathbb{Q}$: $(\underset{\in\mathbb{Q}}{b_n}) \to \underset{\in\mathbb{R}}{b}$
  und setze $a^b = \lim\limits_{n\to\infty} a^{b_n}$ (lim. existiert und ist unabhängig von (b_n))

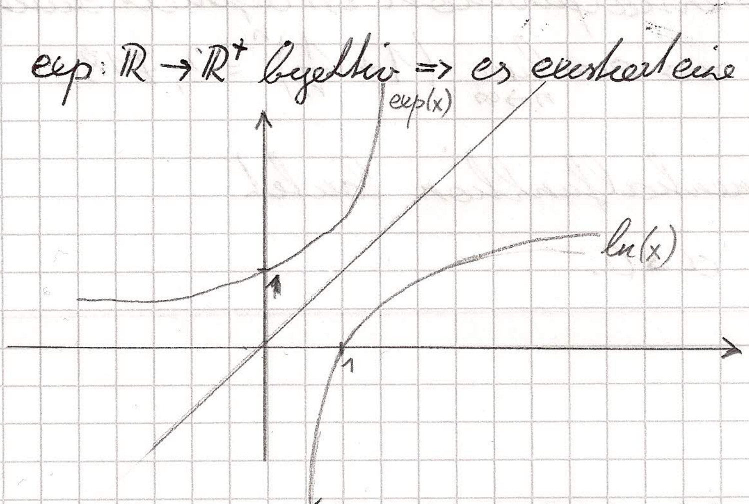
$\exp: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \quad x\longmapsto e^x$



insb.: $e^0 = 1$, $e^1 = e = 2{,}7\ldots$

Es gilt: Die Exp.fkt. $\exp(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend und bildet $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^+$ bijektiv ab. (o. Bew)

$\exp: \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ bijektiv $\Rightarrow$ es existiert eine Umkehrfkt. $\ln: \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$
natürlicher Logarithmus



wo $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y$

insb. $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$

Analog ist $\log_a(x)$ als Umkehrfunktion von a^x definiert, d.h.
Log. zur Basis a

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$$

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen:

z.B.: $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$

$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

$\log a^b = b \cdot \log a$

$a^x = e^{x \cdot \ln a}$, $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

Satz: Die natürliche Exp.fkt. besitzt folgende Eigenschaften:

(i) $e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

(ii) $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ e^x als Potenzreihe

(iii) $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ Funktionalgleichung

③ Winkelfunktionen und Arcusfunktionen

Sinus, Cosinus: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Reihendarstellung: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots = \sum_{n \geq 0} (-1) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \ldots\}$

Nullstellen von Cosinus

BOGENMAß!!!

(gilt nicht im Gradmaß)

BRUNNEN

Erweitern exp, sin, cos auf $\mathbb{C}$ und berechnen:

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \ldots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots\right)}_{\cos x} + i\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)}_{\sin x}$$

also: $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$ Euler'sche Formel

Anwendungen:

- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$
- $\left.\begin{array}{l} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{array}\right\} \Rightarrow \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

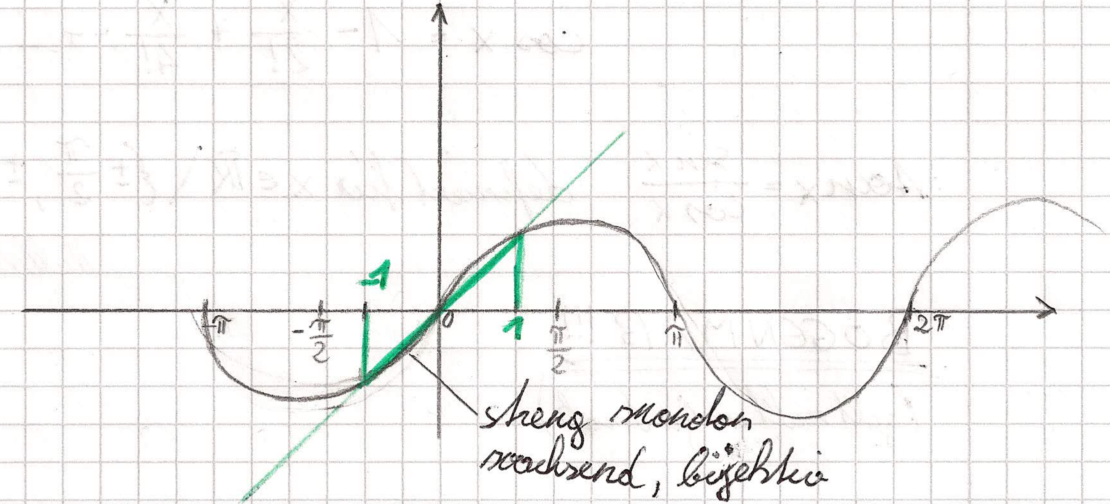
  $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

  Euler'sche Formeln
- $x = \pi : e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

  $\Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$

Umrechnung der Winkelfunktionen:

$\sin x$



$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ bijektiv

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion: $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$