14/01/15

$f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{D} \to \mathbb{R} \qquad y = f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$

$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

③ Richtungsableitung

$\vec{v}$ mit $\|\vec{v}\| = 1$

$\vec{x} \in D$

<u>Frage:</u> Wie ändert sich f beim Übergang von $\vec{x}$ zu $\vec{x} + \vec{v}$?

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t \cdot \vec{v}) - f(\vec{x})}{t} \qquad \text{mit } \|\vec{v}\| = 1$$

$$= \operatorname{grad} f(\vec{x}) \cdot \vec{v} \qquad \text{(falls } f \text{ abs. diff.bar)}$$

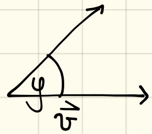
Richtungsabl. von f in Richtung des Einheitsvektors $\vec{v}$

insb. $\vec{v} = \vec{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ k-te Stelle

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{e}_k = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_k} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = f_{x_k} \cdot 1 = f_{x_k}$$

Frage: In welcher Richtung ändert sich f am stärksten

grad f



$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{v} = \|\operatorname{grad} f\| \cdot \underbrace{\|\vec{v}\|}_{1} \cdot \cos\varphi$$

$$= \|\operatorname{grad} f\| \cdot \cos\varphi$$

maximal falls $\cos\varphi = 1$ d.h. $\varphi = 0$

d.h. $\vec{v} \parallel \operatorname{grad} f$

Satz: Der Gradient grad f gibt die Richtung des größten Anstiegs einer Fkt. $f(\vec{v})$ an. Der Wert des größten Anstiegs ist $\|\operatorname{grad} f\|$.

Bsp.: $f(\vec{x}) = f(x,y,z) = e^{-xy} \cdot z^2 \qquad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\ln 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Änderung in x-Richtung: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -ye^{-xy} z^2 \Big|_{x_0} = 36 \cdot \ln 2 \approx 25{,}0$
- Änderung in Richtung d. Einheitsvektors $\vec{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

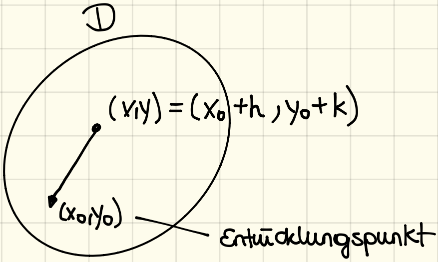
  $$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -ye^{-xy} z^2 \\ -xe^{-xy} z^2 \\ e^{-xy} 2z \end{pmatrix}\Bigg|_{x_0} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \ldots \approx 36{,}6$$

- max. Änderung in Richtung grad f:

  $$\frac{\partial f}{\partial \operatorname{grad} f} = \|\operatorname{grad} f_{x_0}\| = \ldots \approx 79{,}9$$

④ Taylorentwicklung

sei $f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^2}{D} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y)$



betr. Hilfsfkt. $F(t) = f(x_0 + t\cdot h,\, y_0 + t\cdot k)$ $\qquad 0 \leq t \leq 1$

insb. $t=0$: $F(0) = f(x_0, y_0)$

$t = 1$: $F(1) = f(x_0 + h,\, y_0 + k) = f(x,y)$

entwickeln $F(t)$ in Taylorreihe um $t_0 = 0$

$$\Rightarrow \quad F(t) = F(0) + F'(0)\cdot t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \ldots$$

$$t = 1: \quad f(x,y) = f(x_0,y_0) + F'(0)\cdot 1 + \frac{F''(0)}{2!}1^2 + \ldots$$

wobei $F'(0) = f_x(x_0 + t\cdot h, y_0 + t\cdot k)\cdot h + f_y(x_0 + th, y_0 + tk)\cdot k \Big|_{t=0}$

et. Kettenregel

$$= f_x(x_0,y_0)\cdot h + f_y(x_0,y_0)\,k$$

$$F''(0) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x\cdot h + f_y\cdot k)\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}\cdot(f_x\cdot h + f_y k)\,k$$

$$= f_{xx}\cdot h^2 + f_{yx}\cdot hk + f_{xy}\cdot hk + f_{yy}\cdot k^2$$

$$= f_{xx}\cdot h + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2$$

usw.

$$\Rightarrow f(x,y) = \underbrace{\underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{lineare Approximation}} + \frac{1}{2}\left(f_{xx}(x-x_0)^2 + f_{xy}(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(y-y_0)^2\right)} _{\text{quadratische Approximation}} + \ldots + \text{Rest}$$

allg. Glied $\quad \frac{1}{n!}\left((x-x_0)\cdot\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0)$

Restglied $\quad \frac{1}{(n+1)!}\left((x-x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\xi\cdot h, y_0+\xi\cdot k)$

mit $0 < \xi < 1$

Taylorreihe für 2 Variable

Bsp.: $f(x,y) = \left(x + \frac{1}{y^2}\right)(y-2)$ $\qquad$ ges. quadr. Approx. im $(0,1)$

$f = xy - 2x + \frac{1}{y} - \frac{2}{y^2}$ $\qquad f(0,1) = -1$

$f_x = y - 2$ $\qquad f_x(0,1) = -1$

$f_y = x - \frac{1}{y^2} + \frac{4}{y^3}$ $\qquad f_y(0,1) = 3$

$f_{xx} = 0$ $\qquad = 0$

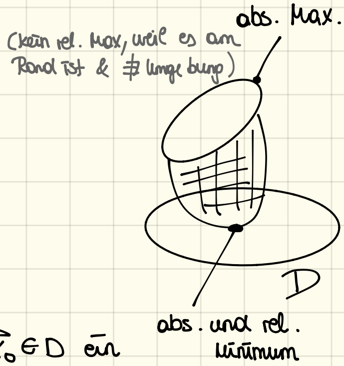
$f_{xy} = 1$ $\qquad = 1$

$f_{yy} = \frac{2}{y^3} - \frac{12}{y^4}$ $\qquad f_{yy}(0,1) = -10$

$$\Rightarrow f(x,y) \approx -1 - 1(x-0) + 3(y-1) + \frac{1}{2!}\left(0 + 2\cdot 1\cdot x(y-1) - 10(y-1)^2\right)$$

$$= -1 - x + 3y - 3 + x(y-1) - 5(y-1)^2$$

C Bestimmung von Extrema



① Lokale Extrema (ohne Nebenbedingungen)

betr. Funktion $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n) \quad D \to \mathbb{R}$
suchen Maxima oder Minima von f

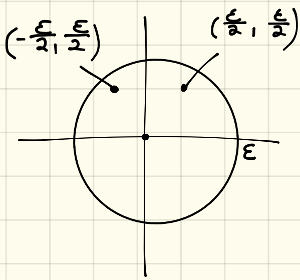
Def.: Eine Fkt $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, besitzt a.d. Stelle $\vec{x}_0 \in D$ ein

- relatives (= lokales) Maximum (bzw. Minimum), wenn es eine Umgebung $U_\varepsilon(\vec{x}_0)$ von $\vec{x}_0$ gibt, sodass $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ (bzw. $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$) für alle $\vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}_0) \cap D$ gilt.
- absolutes (= globales) Maximum (bzw. Minimum), wenn obige Ungleichung für alle $\vec{x} \in D$ gilt.

Satz (Notwendige Bedingung für rel. Extrema): Besitzt f in einem inneren Punkt $\vec{x}_0$ ein rel. Extremum, so gilt $f_{x_1}(\vec{x}_0) = \dots = f_{x_n}(\vec{x}_0) = 0$
kurz $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = 0$
$\vec{x}_0$ heißt dann stationärer Punkt

ACHTUNG: Diese Bedingung ist nicht hinreichend
z.B.: $f(x,y) = x \cdot y$ in $(0,0)$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= y\Big|_{(0,0)} = 0 \\ f_y &= x\Big|_{(0,0)} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ ist stationärer Punkt}$$



ABER $f(0,0) = 0$
$f(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) = \frac{\varepsilon^2}{4} > 0$ $\to$ Sattelpunkt
$f(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}) = -\frac{\varepsilon^2}{4} < 0$

Bsp.: $f(x,y) = x^2+y^2$

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 2x = 0 \\ f_y = 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y)=(0,0) \qquad f(0,0)=0 \leq x^2+y^2 = f(x,y)$$

rel. = abs. Min.

Satz (Hinreichende Bedingung für n=2): Gilt für $f(x,y)$, dass $f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$ und

$$D(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)} > 0, \qquad \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = H_f \text{ ... Hesse Matrix von } f$$

dann nimmt f in (x_0,y_0) ein relatives Extremum an, und zwar ein rel. Max für $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ und ein rel. Minimum für $f_{xx}(x_0,y_0)>0$. Im Fall $D(x_0,y_0)<0$ liegt kein Extremum vor, sondern ein Sattelpunkt.

Bsp.: $f(x,y) = x^3+3xy^2-15x-12y$

notw. Bed.:

$$\left.\begin{array}{l} f_x = 3x^2+3y^2-15 = 0 \\ f_y = 6xy - 12 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{(1,2),(-1,-2),(2,1),(-2,-1)}_{\text{4 stationäre Punkt}}$$

(4 mögl. Extrema)

hinreichende Bed.:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36(x^2-y^2)$$

$$\left.\begin{array}{l} D(1,2) = -108 < 0 \\ D(-1,-2) = \quad < 0 \end{array}\right\} \text{Sattelpunkte}$$

$D(2,1) = 108 > 0$, $f_{xx}(2,1) = 12 > 0 \Rightarrow$ rel. Min

$D(-2,-1) =$ $\Rightarrow$ rel. Max.