19.11.14

$$y = f(x): \; y' = f'(x)$$

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]'$$

Bsp: $f(x) = \ln(x)$: $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$

$x > 0$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}$$

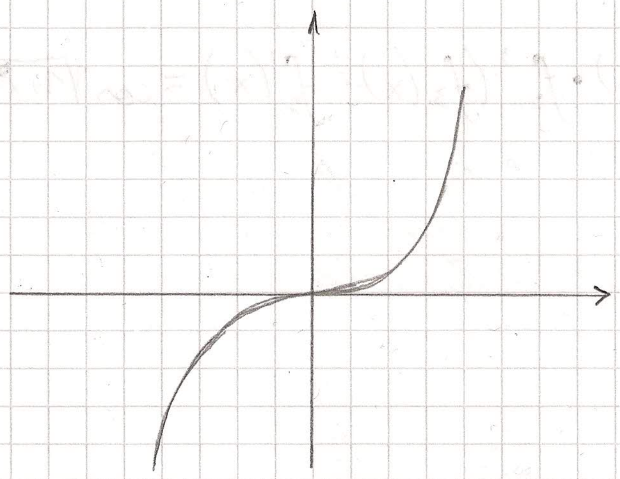
$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x^n} (-1)^{n-1} \text{ für } n \geq 1$$

Bsp: $f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow f'(x) = 2|x|$$

f'' existiert nicht für

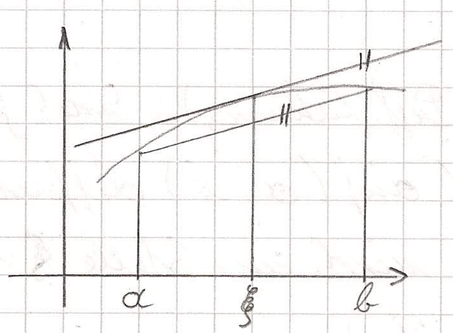


B) Die Taylor'sche Formel u. d. Mittelwertsatz

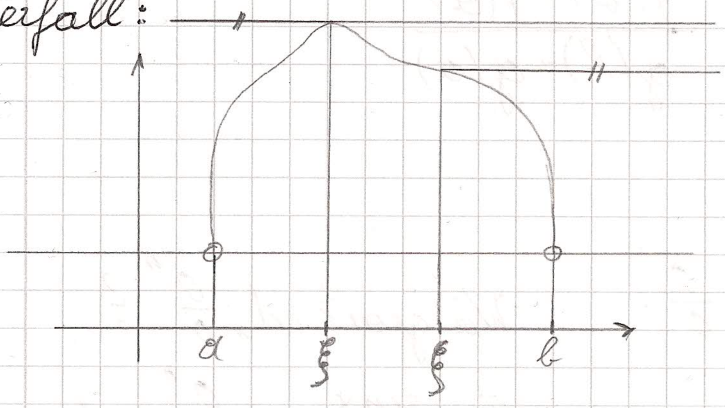
(1) Der Mittelwertsatz

Satz: (MWS der Differentialrechnung)
Ist f auf dem abgeschlossenem Intervall $[a, b]$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar, dann gibt es mindestens eine Stelle ξ (ksi) mit $a < \xi < b$, sodass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Sonderfall:



Satz von Rolle

Bew.: o.B.d.A. sei f nicht linear (sonst trivial)
bilden $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$

$\Rightarrow F$ stetig, $F(a) = F(b) = 0$, $F \neq 0$

$\Rightarrow F$ besitzt ein Minimum oder Maximum in einem Punkt ξ mit $a < \xi < b$

$\Rightarrow F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ Schule, Abschnitt 4

$\Rightarrow F'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

q.e.d

Satz: Seien f, g differenzierbare Funktionen auf $[a, b] = I$ und $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in I$, dann gilt $f(x) = g(x) + C$ mit C konstant.

Bew.: setzen $F(x) = f(x) - g(x)$, $x_0 \in I$ beliebig

$$\Rightarrow F(x) - F(x_0) = \underbrace{F'(\xi)}_{0} \cdot (x - x_0) = 0 \quad \forall x \Rightarrow F(x) = \underbrace{F(x_0)}_{C} \; \forall x$$

② Der verallgemeinerte MWS

Satz: (Verallgemeinerter MWS d. Diff.rechnung): Sind f, g auf dem Intervall $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \quad \forall x$, dann gibt es mind. eine Stelle ξ mit $a < \xi < b$, sodass

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Unbestimmte Formen:

z.B.: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = „\frac{0}{0}"$ Wie groß ist $„\frac{0}{0}"$?

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = „\frac{0}{0}" = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = „\frac{0}{0}" = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = „\frac{0}{0}" = 3$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = „\frac{0}{0}" = 0$$

Weitere unbestimmte Formen:

$\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Satz: (Regel von de l'Hospital): Sind f, g Funktionen, die in einer Umgebung von x_0 differenzierbar sind, gilt $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so folgt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Eine analoge Aussage gilt für $x \to \infty$ oder auch falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$

Bew.: $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi) \cdot \cancel{(x - x_0)}}{g'(\xi)\,\cancel{(x - x_0)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

ξ liegt zw. x und x_0

$$x \to x_0 \Rightarrow \xi \to x_0: \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi \to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bsp.:

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{e^x} = \ldots = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{n! \, x^0}{e^x} = 0$

  d.h. e^x wächst schneller als jede Potenz von x.

- $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \ln x \overset{0(-\infty)}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to 0} (-x) = 0$

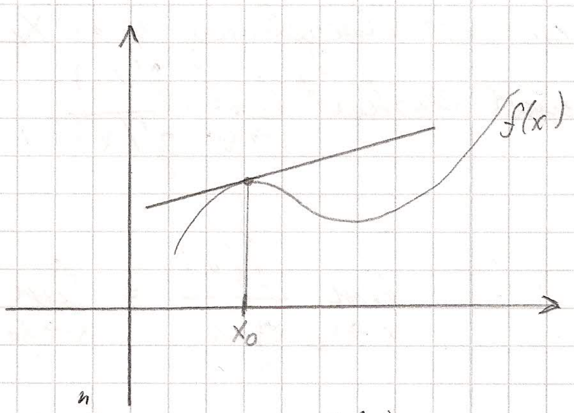
- $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = „1^{\infty}“ \qquad a^b = e^{b \cdot \ln a}$

  $\lim\limits_{x \to \infty} x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \overset{\infty \cdot 0}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$

  $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e^1 = e$

③ Taylorreihen

geg.: Fkt. $f(x)$, x_0 fester Pkt.



Näherung von $f(x)$:

$$y = \overset{a_0}{f(x_0)} + \overset{a_1}{f'(x_0)}\,(x - x_0)$$

Tangentengleichung

bessere Näherung:

$$f(x) \approx \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots}_{\sum\limits_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n}$$

Potenzreihe in x um Pkt x_0

angenommen $f(x)$ ist durch eine Potenzreihe darstellbar, d.h.

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-x_0)^n$$

$$\Rightarrow f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots : f(x_0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots : f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \dots : f''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}$$

allgemein gilt $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0) + \dots =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt x_0

Sonderfall $x_0 = 0$: $f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!} + \ldots =$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

<u>Bsp.:</u> • $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$f'(x) = f''(x) = \ldots = e^x$, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$$

Exponentialreihe

• $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} \bigg|_{x=1} = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

$$\Rightarrow \ln x = \ln 1 + 1\cdot(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - + \ldots$$

$$x \mapsto x+1: \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \ldots =$$

$$= \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$x = 1: \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$$

Leibnizreihe