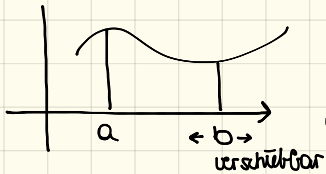
10/12/14

$$f(x) \xrightarrow{\int} \int f(x)\,dx = F(x) \text{ und } F'(x) = f(x)$$

$$f(x), [a,b] \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \text{Fläche}$$

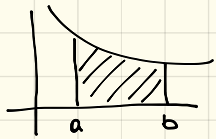


$$\int_a^x f(x)\,dx = F(x)$$

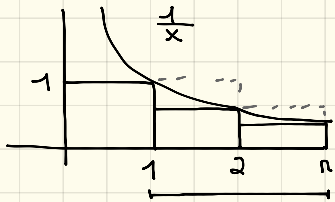
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Bsp.:

- $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^b = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
  $ab > 0$



- Harmonische Zahlen
  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$



(nach unten abschätzen) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln(n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}$
(noch offen)

$$\ln(n) \leq \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}_{H_n} \leq 1 + \ln(n)$$

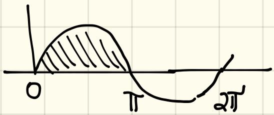
also $\ln(n) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$

Bem.: $0 \leq H_n - \ln(n) \leq 1$

$\hookrightarrow \gamma = 0{,}577\ldots$ Euler-Mascheroni Konstante

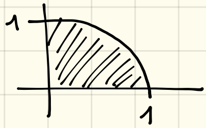
Also: $H_n \sim \ln(n) + \gamma$

- $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 1+1 = 2$



- $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \cos t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt$ = (siehe VE; partielle Integration)

$= \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cdot \cos t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$



Substitution: $x = \sin(t)$

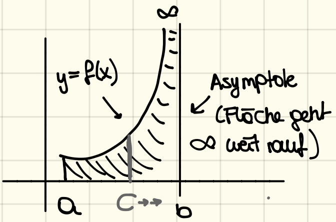
$\frac{dx}{dt} = \cos t$

$dx = \cos t \, dt$

Grenzen: $x = 0 \Rightarrow t = 0$ (arcsin(?))

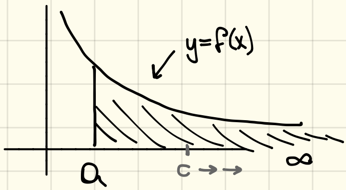
$x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

E Uneigentliche Integrale



uneigtl. Integral 1. Art

$\lim_{c \to b} \int_a^c$



uneigtl. Integral 2. Art

$\lim_{c \to \infty} \int_a^c$

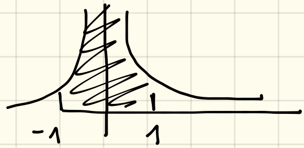
Def.: Sei f auf $[a,b)$ bzw. $[a,\infty)$ definiert und auf jedem Teilintervall $[a,c]$ integrierbar. Dann sind $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\,dx$ bzw. $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,dx$ uneigtl. Integrale 1. bzw. 2. Art. Die Integral konvergieren, falls die angegeb. Limes existieren.

Bsp.: • $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_c^1 = \lim_{c\to 0}\left(2-2\sqrt{c}\right) = 2$

uneigtl. bei $x=0$ (1. Art)

• $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^c e^{-x}\,dx = \lim_{c\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^c = \lim_{c\to\infty}\left(\underbrace{-e^{-c}}_{\text{gegen } 0\ (-e^{-\infty})} + e^{-1}\right) = \frac{1}{e}$

• $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} \overset{?}{=} -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = -1-1 = -2$ (falsch!) da positiv siehe Skizze



$\hookrightarrow \int_{-1}^0 + \int_0^1 \ldots \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to 0} \int_{-1}^c \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to 0} -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^c =$

$= \lim_{c\to 0}\left(-\frac{1}{c}+1\right)$ existiert nicht!

• Gammafunktion: $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}\,dt$ für $x>0$

uneigtl. bei $t=0$ (für $x<1$) und bei $t=\infty$

z.B. $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,t^0\,dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = \underbrace{0}_{-e^{-\infty}} + 1 = 1$

ferner $\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x)$ (nachrechnen)

$\Rightarrow \Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1 = 1!$

$\Gamma(3) = 2\cdot\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!$

$\Gamma(4) = 3\cdot\Gamma(3) = 3\cdot 2\cdot 1 = 3!$

allg.: $\Gamma(n+1) = n!$

Satz (Integralkriterium): Sei $f(x) \geq 0$ (für $x\geq 1$) und monoton fallend. Dann gilt $\sum_{n\geq 1} f(x)$ konvergent $\iff \int_1^\infty f(x)\,dx$ konvergiert.

Bsp.: Harmon. Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty$, denn $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^\infty$ $\ln(\infty)$ existiert nicht!

$f(x) = \frac{1}{x}$

3 GRUNDLAGE DER DIFF - UND INTEGRALRECHNUNG IN MEHREREN VARIABLEN

A Funktionen in mehreren Variablen

1 Beispiele und Darstellungen

Einflussgröße : $x_1, x_2, \dots, x_n$

Zielgröße : y

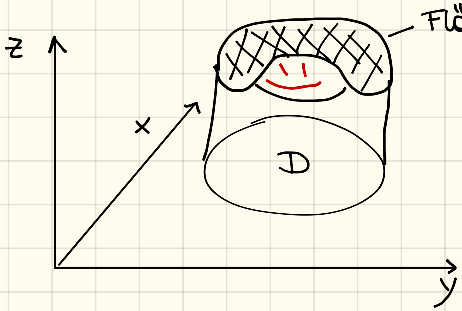
$f: D \to \mathbb{R} \quad , D \subset \mathbb{R}^n$

$(x_1, .., x_n) \in D \longmapsto y = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$

$\vec{x} \in D \longmapsto y = f(\vec{x})$

Sonderfall: $n=2$: $z = f(x,y)$

Fläche im $\mathbb{R}^3$



Bsp.:

- Gesamtwiderstand aus einem Wechselstromkreis

  $R_{ges}(R, R_L, R_C) = \sqrt{R^2 + (R_L + R_C)^2}$

  R: ohmischer Widerstand, R_L: induktiv, R_C: kapazitiv

- Produktionsfaktoren … „Cobb - Douglas"

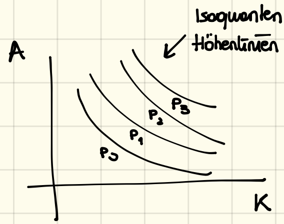
  $D(A, K) = c \cdot A^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha}$

  D: Output, A: Faktor Arbeit, K: Faktor Kapital

  $c > 0, 0 < \alpha < 1$

  $D = \{(A,K) \in \mathbb{R}^2 \mid A > 0, K > 0\}$
  $= (\mathbb{R}_+^2)$

Frage: Für welche Kombinationen der beiden Produktionsfaktoren A und K wird ein geg. Produktergebnis P_0 erreicht?



$P = P_0 : P_0 = c \cdot A^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha} \longrightarrow A = \left(\frac{P_0}{c}\right)^{1/\alpha} K^{\frac{\alpha-1}{2}}$

z.B: $\alpha = \frac{1}{2}$ $\qquad A(k) = \text{konst.} \frac{1}{K}$

- $f: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ $\quad z = ax + by + c$ $\quad , a, b, c \in \mathbb{R}$ lin. Fkt. , Ebene

$z = 4x^2 + 10xy + 9y^2$ quadr. polynomfkt. , Paraboloid

$z = \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\cos\sqrt{x^2+y^2}}$ elementare Fkt. in 2 Variablen

- Polynomfunktion

z.B. $f(x_1, x_2, x_3) : a \cdot x_1^4 x_2^2 x_3 + b \cdot x_1 x_2^2 + c \cdot x_1 x_3 + d \quad , a,b,c,d \in \mathbb{R}, d = 0$

Polynom von Grad 7

allg. $f(x_1, x_2, \dots x_n) : \quad \sum_{i_1=0}^{k_1} \sum_{i_2=0}^{k_2} \dots \sum_{i_n=0}^{k_n} = a_{i_1 i_2 \dots i_n} \cdot x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$

Grad: höchstes $i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$,

sodass $a_{i_1 i_2 \dots i_n} \neq 0$