22. 10. 14

$$\sum_{n\geq 0} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{a_0}_{s_0} + a_1}_{s_1} + a_2}_{s_2} + \dots\dots = s \implies a_n \to 0$$

$$s_0,\ s_1,\ s_2 \dots \to s$$

Partialsumme konvergiert gegen S

Prüfungsfrage aus der letzten Analysisprüfung!

"Wenn so eine Reihe konvergiert, dann folgt daraus?

$\sum a_n < \infty \Rightarrow$ ⊗ (a_n) konvergiert (Folge konvergiert)

⊗ (s_n) konvergiert (Partialsumme konv.)

⊗ $a_n \to 0$ (a_n ist eine Nullfolge)

(alle 3 Antworten stimmen)

DEFINITION

Eine Reihe $\sum_{n\geq 0} a_n$ heißt absolut konvergent, falls $\sum_{n\geq 0} |a_n|$ konvergent ist.

Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergent ist, nennt man bedingt konvergent.

Satz: Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent, aber nicht umgekehrt.

Also: $\sum a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum a_n$ konv. $\Rightarrow \lim a_n = 0$

$$\not\Leftarrow \qquad\qquad \not\Leftarrow$$

(auf keinen Fall gilt die Umkehrung)

Bsp:

•) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{10^n}$ ist absolut konvergent und daher auch konvergent.

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots\ldots = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} - \ldots\ldots = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{10}\right)} =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{11} = \frac{1}{11}$$

•) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots = \infty$ div. (uneigentlich konv. gegen ∞)

$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\ldots = \ln 2$ (siehe später)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \text{abs. konv.}^{*}\ (\text{Umordnungssatz}) \\
 & \text{konvergente Reihen} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\text{unendliche Reihen} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{bedingt konv.} \\
 & \text{divergente Reihen} &
\end{tikzcd}$$

* kann man behandeln wie endliche Summen

(2) Konvergenzkriterien

Satz: (i) Majorantenkriterium: Sind $\sum a_n$, $\sum b_n$ zwei Reihen, sodass $|a_n| \leq b_n$ für fast alle n und $\sum b_n$ konv., dann ist $\sum a_n$ abs. konv.

(ii) Minorantenkriterium: Sind $\sum a_n$, $\sum b_n$ zwei Reihen, sodass $0 \leq a_n \leq b_n$ für fast alle n und $\sum a_n$ divergent, dann ist auch b_n divergent!

(iii) Wurzelkriterium: Gilt für $\sum a_n$, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ für fast alle n, dann ist $\sum a_n$ absolut konv. Falls hingegen $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für ∞ viele n, so ist $\sum a_n$ divergent.

Limesform: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum a_n$ abs. konv.

(iv) Quotientenkriterium: Gilt für $\sum a_n$ (mit $a_n \neq 0$), dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ für fast alle n, dann ist $\sum a_n$ absolut konv. Falls jedoch $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n, so ist $\sum a_n$ divergent.

Limesform: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \sum a_n$ abs. konv.

(v) Leibniz-Kriterium: Ist $\sum (1)^n a_n$ eine alternierende Reihe, sodass a_n monoton gegen 0 konv., dann ist $\sum (-1)^n a_n$ konvergent.

Bsp.: •) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, denn $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} =$

ist abschätzbar durch:

$$= \sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

..... Partialbruchzerlegung

konvergente Majorante $\Rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ konv. $\left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$

•) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergiert, denn $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, $\sum \frac{1}{n}$ div.

div. Minorante

$\Rightarrow \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ div.

Wurzelkriterium

•) $\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^n}$ konv., denn $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$

$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} < 1$ ✓

Quotientenkriterium

......., denn $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{2}$

$\longrightarrow \frac{1}{2} < 1$

•) $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$, $|a_n| = \frac{1}{2n+1} \downarrow 0 \Rightarrow$

monoton fallend gegen 0

$\Rightarrow$ konv. nach Leibniz $\left(= \frac{\pi}{4}\right)$

•) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \ldots$ konv. nach Leibniz $(= \ln 2)$

Rechnen mit Reihen

$$\sum a_n = a,\ \sum b_n = b \implies \sum (a_n \pm b_n) = a \pm b$$
$$\sum (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$$

$$\sum a_n \cdot \sum b_n = ? \longrightarrow \sum c_n \text{ mit } c_0 = a_0 \cdot b_0$$
$$(a_0 + a_1 + a_2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \dots) = ?$$
$$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$
$$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$
$$\vdots$$
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 =$$

„Cauchy Produkt"

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Produktreihe

$$\sum a_n = a,\ \sum b_n = b \implies \sum c_n = a \cdot b$$

③ Potenzreihen

Bsp.: $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\dots$ Exponentialreihe

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = |x| \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \text{ für } n \to \infty \text{ und jedes feste } x \in \mathbb{R}$$

$\implies \sum \frac{x^n}{n!}$ ist absolut konv. $\forall\ x \in \mathbb{R}$

insb.: $x = 1$: $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$

allgemeine Potenzreihe: $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ oder $\sum a_n (x-x_0)^n$

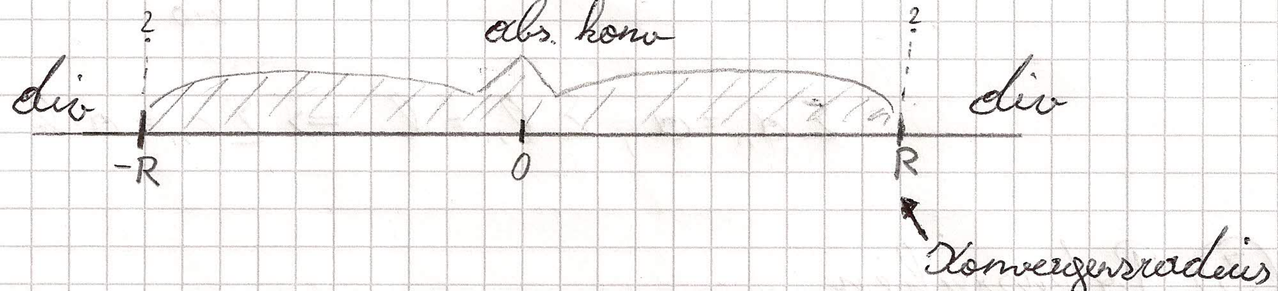
Koeffizienten

Entwicklungspunkt

z.B.: $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots$ Exp. Reihe

$$\sum_{n\geq 0} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots\ldots = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{für } |x|<1 \\ \text{div.} & \text{sonst} \end{cases}$$ geomet. Reihe

Konvergenzverhalten einer Potenzreihe (mit $x_0 = 0$)



Satz: Zu jeder Potenzreihe $\sum a_n x^n$ gibt es eine Zahl R mit $0 \leq R \leq \infty$, sodass die Reihe für alle $|x| < R$ abs. konv. und für $|x| > R$ div. ist.
Dabei gilt: $R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

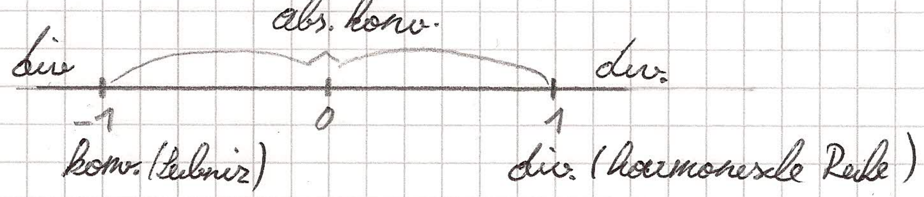
Bemerkung: Wenn $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow R = \infty$ d.h. $\sum$ konv. $\forall x \in \mathbb{R}$

$= \infty \Rightarrow R = 0$, d.h. $\sum$ konv. nur für $x = 0$

Bsp.: $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ $\qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \frac{n}{n+1} \longrightarrow |x| < 1$ für

$|x| < 1$, d.h. abs. konv.

ODER: $\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$



C) Asymptotischer Vergleich von Folgen

DEFINITION (Landau-Symbole): Seien (a_n) und (b_n) Folgen. Dann schreibt man:

(i) $a_n = O(b_n)$ (für $n \to \infty$), wenn $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq C$ für ein $C > 0$

„groß O"

(a_n wächst nicht wesentlich schneller als b_n)

(ii) $a_n = o(b_n)$, wenn $\frac{a_n}{b_n} \to 0$

„klein o"

(a_n wächst langsamer als b_n)

(iii) $a_n \sim b_n$, wenn $\frac{a_n}{b_n} \to 1$

„asymptotisch gleich"

(a_n wächst genauso schnell wie b_n)

Bsp: $\frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$

$= o(n^3)$

$\sim \frac{n^2}{2}$

Quicksort $= O(n \log n)$